

Le equazioni algebriche

La parola "equazione" è utilizzata in due sensi: 1) una espressione algebrica in cui figurano una o più incognite ed il segno = (uguale).

Abbiamo già visto nei sistemi lineari che occorrono tante equazioni (indipendenti) quante sono le incognite.

2) una espressione algebrica in cui figurano due o più variabili ed il segno = (uguale); e sono dette equazione della retta, del cerchio, della circonferenza, dell'ellisse, di una conica, di un solido sfera, cilindro, cono ecc.

Abbiamo visto come le equazioni lineari in due incognite rappresentino nel piano una retta, ed in tre incognite, nello spazio tridimensionale, un piano.

Abbiamo trattato le coniche (vol II); ed i solidi (vol IV).
Vogliamo qui trattare la risoluzione delle incognite nelle equazioni (dette algebriche), cioè costituite da potenze della variabile, con grado superiore a due.

Per il teorema fondamentale dell'algebra (Teorema di J. La Ronde D'Alembert: 1717, 1783) che dice: "Ogni equazione algebrica in una incognita ha almeno una radice reale o complessa che la soddisfa." Sappiamo che la soluzione esiste, Però non equa

zioni di grado superiore al IV non si hanno formule risolutive in generale, e, caso per caso operiamo, e spesso si opera per tentativi.

Qui tratteremo i polinomi in generale e le equazioni di 3° e 4° grado in particolare.

Ma l'espressione in x può essere con operatori logaritmici, trigonometrici, iperbolici ecc. ove, in certi casi, a tutt'oggi, non è stata trovata una formula risolutiva, per cui l'equazione può risolversi solo per tentativi. A questo proposito, precisiamo che mediante operatori da noi introdotti e pubblicati, (in particolare il $\alpha f(x) = \frac{f(x)}{x}$), è possibile esplicitare incognite in equazioni a tutt'oggi risolte per tentativi.

Trattandosi di operatori che agiscono su funzioni, (non su valori numerici), l'argomento sarà analizzato a suo tempo.

I Polinomi (divisibilità dei polinomi)

Un polinomio di grado "n" può ridursi alla forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Ovvio che dividendo per a_n il coeff. di x^n è: 1,

e l'espressione come abbiamo già visto (vol II) è il risultato dei prodotti dei binomi:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_m) = 0$$

ove: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$; sono le radici reali o complesse dell'equazione.

I coefficienti della x sono espressi da:

(v. Vol II):

$$a_i = \sum_{i=1}^{i=m} \binom{m}{i} \left(\sum \prod \alpha \right) (x^{n-i}) (-1)^{2m-i}$$

Proponiamoci il problema inverso: dato il polinomio: ove: ($a_m = 1$)

$$X^n + a_{m-1}X^{n-1} + a_{m-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + a_0 = 0$$

Ricordando che le radici complesse sono a due a due coniugate $(a+ib)$; $(a-ib)$ è evidente che le equazioni di grado dispari ammettono almeno una radice reale e le restanti possono essere coppie reali o coppie immaginarie.

Per $a_n = +1$, i restanti coefficienti assumono la forma:

$$X^n - S X^{n-1} + \sum \prod \binom{m}{2} - \sum \prod \binom{m}{3} + \dots + (-1)^n P = 0$$

ove: S = somma delle radici reali o complesse

$\sum \prod \binom{m}{2}$ = somma dei prodotti a due a due delle radici

$\sum \prod \binom{m}{3}$ = " " " a tre a tre delle radici

P = prodotto delle radici.

Una coppia di radici reali α_1, α_2 avrà come somma $S = (\alpha_1 + \alpha_2)$ e come prodotto $P = (\alpha_1 \alpha_2)$.

Ma se: $\alpha_1 = (a - ib)$; $\alpha_2 = (a + ib)$ sono complesse coniugate la loro somma $S = 2a$ ed il loro prodotto $P = (a^2 + b^2)$. Anche in questo caso S e P reali perciò esiste sempre un trinomio, a termini reali, di secondo grado $(x^2 - Sx + P)$ che divide esattamente qualunque polinomio di grado $n > 2$.

Un'altra osservazione importante è che se il polinomio ha il termine noto $a_0 < 0$ ammette almeno una radice reale > 0 se il polinomio è di grado pari ammette almeno una coppia di radici reali di cui almeno una > 0

Da questa osservazione è facile calcolare per tentativi la radice > 0 , infatti per $x = 0$ il polinomio vale $a_0 < 0$, sostituiamo ad $x = N$ un numero $N > 0$ tale che il valore del polinomio sia maggiore di zero la nostra radice α sarà $0 < \alpha < N$ quindi preso un valore intermedio fra 0 ed N si sostituisce nel polinomio, si assume sempre il valore intermedio fra i due che sostituiti nel polinomio hanno dato segni opposti.

Il metodo piú banale per vedere se un polinomio $N(x)$ è multiplo di un polinomio $D(x)$ è quello di eseguire la divisione:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Se $R(x) = 0$ (resto = zero) $\therefore N(x)$ è divisibile per $D(x)$ cioè $N(x)$ è multiplo di $D(x)$.

Spesso interessa il caso in cui $D(x) = (x - \alpha)$ è un binomio, in questo caso la divisione può essere semplificata con la regola di Ruffini.

Regola di Ruffini

Il quoziente $Q(x)$ della divisione di un polinomio $N(x)$ di grado (n) per il binomio $(x - \alpha) = D(x)$ è un polinomio di grado $(n-1)$ i cui coefficienti si ottengono come segue:

- Il primo coefficiente di $Q(x)$ è uguale al primo coefficiente di $N(x)$
- I coefficienti successivi si ottengono sommando al coefficiente di $N(x)$ il precedente di $Q(x)$ moltiplicato per α .
- La somma col termine noto di $N(x)$ del prodotto di α col precedente di $Q(x)$ è il resto della divisione.

Conviene fare una tabella come segue:

Sia $N(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$Dx = (x - \alpha)$

	a_n	a_{n-1}	$a_{n-2} \dots$	a_1	a_0
α		αa_n	$\alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_n$	\dots	\dots
	a_n	$(a_{n-1} + \alpha a_n)$	$(a_{n-2} + \alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_n)$	\dots	<u>resto</u>

Esempio: $N(x) = (2x^3 - x^2 - 10x + 8) / (x - 2) = D(x)$

	2	-1	-10	8
2		4	6	-8
	2	3	-4	zero

$Q(x) = (2x^2 + 3x - 4)$ (essendo $a_0 = -4 < 0$)

anche $Q(x)$ ammette almeno una radice positiva se uguagliato a zero cioè è divisibile per $(x - \alpha)$ con $\alpha > 0$

infatti: $0 < \alpha < 1$; $0,5 < \alpha < 1$; $0,8 < \alpha < 0,9$;

	2	3	-4
0,85		1,7	+3,995
	2	4,7	-0,005 = (Resto)

La radice positiva è $\frac{\sqrt{41} - 3}{4} = 0,850781059$.

	2	3	-4
$\frac{\sqrt{41} - 3}{4}$		$\frac{\sqrt{41} - 3}{2}$	$\frac{41 - 9}{8} = \frac{32}{8} = +4$
	2	$\frac{\sqrt{41} + 3}{2}$	zero

Supponiamo di cercare la radice reale di $x^3 - 5,5x^2 + 12x - 9 = 0$
 sappiamo che una almeno è positiva avendo $(-9) < 0$

proviamo $\alpha = +1$:

1	-5,5	12	-9
1	1	-4,5	+7,5
1	-4,5	+7,5	-1,5 < 0 (negative)

proviamo

$\alpha = +2$

1	-5,5	12	-9
2	2	-7,0	+10
1	-3,5	+5	+1 > 0 (positivo)

Il resto > 0 e < 0 ci dice che $1 < \alpha < 2$

proviamo:

$\alpha = 1,5$

1	-5,5	12	-9
1,5	1,5	-6	+9
1	-4	+6	0 zero

cioè:

$(x - 1,5)(x^2 - 4x + 6) = (x^3 - 5,5x^2 + 12x - 9)$

(Le altre due radici $\alpha_2 = (2 - \sqrt{2}i)$; $\alpha_3 = (2 + \sqrt{2}i)$)

1	-5,5	12	-9
$2 - \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2}$	$-9 + 1,5\sqrt{2}$	+9
1	$-3,5 - \sqrt{2}$	$3 + 1,5\sqrt{2}$	0

$2 + \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$-9 - 1,5\sqrt{2}$	+9
1	$-3,5 + \sqrt{2}$	$3 - 1,5\sqrt{2}$	0

$2 + \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$-3 - 1,5\sqrt{2}$	0
1	-1,5	0	0

1,5	1,5	$-3 + 1,5\sqrt{2}$	0
1	$-2 + \sqrt{2}$	0	0

$(x - 1,5)(x - 2 - \sqrt{2}i)(x - 2 + \sqrt{2}i) = (x^3 - 5,5x^2 + 12x - 9)$

Equazioni di terzo grado

Si hanno le seguenti possibilità:

1) un radice reale e due complesse coniugate

2) tre radici reali $\begin{cases} - \text{uguali fra loro} \\ - \text{due uguali} \\ - \text{diverse} \end{cases}$

Se le radici sono: α ; $a+ib$; $a-ib$

abbiamo: $(x-\alpha)[x^2-2ax+a^2+b^2]=0$

cioè:
$$x^3 - (2a+\alpha)x^2 + (a^2+b^2+2a\alpha)x - \alpha(a^2+b^2) = 0$$

Se le radici sono: α ; β ; γ (reali)

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$$

$$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - (\alpha\beta\gamma) = 0$$

$$x^3 - Sx^2 + Qx - P = 0$$

L'equazione generale si presenta:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

ove: $-\frac{a_2}{a_3} = S$; $\frac{a_1}{a_3} = Q$; $-\frac{a_0}{a_3} = P$;

poniamo: $x = \left(K - \frac{S}{3}\right)$ = (scostamento dalla media)

cioè $x = \left(K - \frac{a_2}{3a_3}\right)$

$$x^2 = \left[K^2 - \frac{2a_2}{3a_3}K + \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 \right]$$

$$x^3 = \left[K^3 - \frac{a_2}{a_3}K^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2K - \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 \right] \text{ (sostituendo)}$$

$$a_3 x^3 = a_3 K^3 - \cancel{a_2} K^2 + \frac{\cancel{a_2} a_2^2}{3 a_3^2} K - \frac{\cancel{a_2} a_2^3}{27 a_3^3}$$

$$a_2 x^2 = \quad + \cancel{a_2} K^2 - \frac{2}{3} \frac{a_2^2}{a_3} K + \frac{3 a_2^3}{27 a_3^2}$$

$$a_1 x = \quad \quad \quad a_1 K - \frac{a_1 a_2}{3 a_3}$$

$$a_0 = \quad \quad \quad + a_0$$

$$a_3 K^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3 a_3} \right) K + \left(\frac{2}{27} \frac{a_2^3}{a_3^2} - \frac{a_1 a_2}{3 a_3} + a_0 \right) = 0$$

dividiamo per a_3 :

$$K^3 + \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3} \frac{a_2^2}{a_3^2} \right) K + \frac{1}{27} \left(\frac{2 a_2^3}{a_3^3} - 9 \frac{a_1 a_2}{a_3^2} + 27 \frac{a_0}{a_3} \right) = 0$$

per distinguere il prodotto delle radici in x (che abbiamo posto = P) dal prodotto delle radici in K , e per distinguere la $\Sigma \pi_i^3$ delle radici in x (che abbiamo posto = Q) dalla $\Sigma \pi_i^3$ delle radici in K ;

poniamo: (scambiando in lettere minuscole Q con a e P con b)

$$\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3} \frac{a_2^2}{a_3^2} \right) = a$$

$$\left[\frac{1}{27} \left(\frac{2 a_2^3}{a_3^3} - 9 \frac{a_1 a_2}{a_3^2} + 27 \frac{a_0}{a_3} \right) \right] = b$$

avremo:

$$\boxed{K^3 + aK + b = 0} \quad (\text{equazione ridotta})$$

Una incognita si può sempre pensare costituita dalla somma di due valori; poniamo: $\boxed{K = (U + V)}$ e

$$\text{sostituendo: } U^3 + V^3 + 3U^2V + 3UV^2 + aU + aV + b = 0$$

$$\text{cioè: } \boxed{(U^3 + V^3) + (U+V)(3UV + a) + b = 0} \quad (1)$$

Le coppie $(u+v)=K$ sono infinite, quindi per definirne una consideriamo una equazione di 2° in z le cui radici siano la somma ed il prodotto avremo:

$z^2 - Sz + P = 0$. Notiamo nell'equazione (1) che il secondo termine si annulla se $(3UV+a) = 0$ cioè: $UV = -\frac{a}{3}$

in questo caso la (1) diventa: $U^3 + V^3 + b = 0$

perciò avremo: $(U^3 + V^3) = -b$ somma e prodotto da sostituire
 $UV^3 = \left(-\frac{a}{3}\right)^3$

cioè: $z^2 - (U^3 + V^3)z + V^3U^3 = 0$ diventa:

$$z^2 + bz - \frac{a^3}{27} = 0$$

risolvendo:

$$z = \begin{cases} U^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^3}{27}} \\ V^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^3}{27}} \end{cases}$$

quindi:

$$U = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

$$V = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

e ricordando le tre radici cubiche dell'unità, (ω, ω^2)

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} = 1 \\ = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \\ = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \end{cases} = \begin{cases} = 1 \\ = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}) \\ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$K_1 = (U + V) = K_1 = (U + V)$$

$$K_2 = \frac{U}{2}(-1 - \sqrt{3}) + \frac{V}{2}(-1 + \sqrt{3}) = K_2 = -\left(\frac{U+V}{2}\right) - \left(\frac{U-V}{2}\right)\sqrt{3}$$

$$K_3 = \frac{U}{2}(-1 + \sqrt{3}) + \frac{V}{2}(-1 - \sqrt{3}) = K_3 = -\left(\frac{U+V}{2}\right) + \left(\frac{U-V}{2}\right)\sqrt{3}$$

Si noti che solo la prima radice è reale, le altre sono immaginarie coniugate ($\sqrt{-3}$).

Questo procedimento è possibile solo se $(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3 \geq 0$ e poiché certamente $(\frac{b}{2})^2 > 0$, il segno di "a" nella equazione ridotta: $x^3 + ax + b = 0$ deve essere negativo ed $|\frac{a}{3}|^3 > |\frac{b}{2}|^2$ affinché si abbia il caso di tre radici reali. Si hanno tre casi:

- 1) $(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3 > 0$ una radice reale e due immaginarie coniugate
- 2) $(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3 = 0$ tre radici reali di cui almeno due uguali
- 3) $(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3 < 0$ tre radici reali diverse.

Si noti che $a = (\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2})$ poiché a_3 si può porre $a_3 > 0$: $a = \frac{1}{a_3} (a_1 - \frac{a_2 a_2}{3 a_3})$ quindi affinché $a < 0$ deve essere: $a = \frac{1}{a_3} (a_1 a_3 - \frac{a_2^2}{3})$ cioè: $(\frac{a_2^2}{3} > a_1 a_3)$. Quando è possibile dividere per a_3^3 l'intera equazione diventa del tipo: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

ove: $a = \frac{1}{3}(3q - p^2)$; $b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$

Nel secondo caso avremo: $U = V = \sqrt[3]{\frac{b}{2}}$

cioè: $x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$; $x_2 = x_3 = -(\frac{U+V}{2}) = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$

$x = (K + \frac{p}{3})$ $x_1 = (2\sqrt[3]{\frac{b}{2}} + \frac{p}{3})$; $x_3 = x_2 = \frac{p}{3} - \sqrt[3]{\frac{b}{2}}$

3° caso detto irriducibile.

Ricordiamo che un numero complesso elevato ad esponente frazionario può esprimersi nelle forme:

$$(a+ib)^{m/n} = (\vec{V})^{m/n} = (|V|e^{i\theta})^{m/n} = (|V|^{m/n} \cdot e^{i\frac{m}{n}\theta}) = \\ = [|V| (\cos\theta + i\sin\theta)]^{m/n} = [|V|^{m/n} (\cos(\frac{m}{n}\theta) + i\sin(\frac{m}{n}\theta))]$$

Nel nostro terzo caso avremo: $(a+ib)^{\frac{1}{3}}$

cioè: $\boxed{(\sqrt{a^2+b^2})^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3} \right)}$

Abbiamo già accennato al problema della trisezione dell'angolo, (che è, a tutt'oggi, non risolto); cioè non è possibile, col solo ausilio della squadra e del compasso dividere un angolo in tre parti uguali. Oppure: non è possibile graficamente estrarre la radice cubica di una grandezza in scala, senza l'ausilio di curve predisegnate. Ed infine per esprimere le funzioni trigonometriche di $(\alpha/3)$ in funzione di (α) , occorre risolvere una equazione di terzo grado, mentre sappiamo trovare le funzioni trigonometriche del triplo di un angolo.

Noi useremo: $\cos 3\theta = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ che scritta nella forma:

$$\boxed{4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) = 0}$$

è appunto una equazione di 3° grado già ridotta ad essere mancante del termine al quadrato.

quindi l'equazione:

$$K^3 + aK + b = 0$$

confrontata con:

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) = 0$$

posto: $K = m \cos \theta$

abbiamo:

$$m^3 \cos^3 \theta + a m \cos \theta + b = 0$$

se pensiamo che una equazione uguagliata a zero può essere stata moltiplicata per una costante arbitraria, resta valido che confrontando i coefficienti:

$$\frac{4}{m^3} = \frac{-3}{a m} = \frac{-\cos(3\theta)}{b}$$

dai primi due termini della doppia uguaglianza si ha:

$$m = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

ricordiamo che:
 $(uv = -\frac{a}{3})$

dai secondi due termini:

$$\cos(3\theta) = \frac{3b}{am} = \frac{3b}{2a\sqrt{-a/3}}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3b}{2a\sqrt{-a/3}}\right)$$

ed anche:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2}{3}\pi$$

$$\theta_3 = \theta_1 + \frac{4}{3}\pi$$

cioè le radici dell'equazione: $K^3 + aK + b = 0$ sono:

$$K_1 = \left(2\sqrt{\frac{-a}{3}}\right) \cos(\theta_1) ; K_2 = \left(2\sqrt{\frac{-a}{3}}\right) \cos(\theta_2) ; K_3 = \left(2\sqrt{\frac{-a}{3}}\right) \cos(\theta_3)$$

Si noti che, affinché: $\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)$ sia < 0 deve essere: $P < 0$ e quindi diventa possibile applicare la trasformazione trigonometrica ove: $\frac{m}{2} = \sqrt{\frac{-D}{3}}$ che diventerebbe $m =$ immaginario se $a > 0$.

Questi procedimenti risolvono l'equazione ridotta nell'incognita K ; per trovare le radici dell'equazione data, dovremo ricordare che:

$$x = K - \frac{a_1/a_2}{3}$$

Facciamo degli esempi numerici. (dei 3 casi)

Caso 1°) Prima di tutto costruiamoci una equazione di terzo grado con una sola radice reale e due immaginarie coniugate. Per esempio le radici siano:

$$x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = 2 + i5 \quad ; \quad x_3 = 2 - i5$$

e l'equazione sia moltiplicata per 4; avremo:

$$4(x-3)(x-2-i5)(x-2+i5) = 0$$

$$4(x-3)(x^2-4x+29) = 0$$

$$4(x^3 - 4x^2 + 41x - 87) = 0$$

$$(4x^3 - 28x^2 + 164x - 348) = 0$$

Supponiamo di non sapere a quale caso appartenga e poniamo: $x = \left(K - \frac{1}{3}\left(\frac{348}{4}\right)\right)$ $x = \left(K - \frac{a_1}{3a_2}\right)$

quando è possibile semplificare dividendo

l'equazione per a_3 (nel nostro caso, per 4).

$$x^3 - 7x^2 + 41x - 87 = 0$$

$$x = \left(K + \frac{7}{3}\right) = \left(K + \frac{7}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} x^3 &= K^3 + \cancel{7K^2} + \frac{49K}{3} + \frac{343}{27} \\ -7x^2 &= \quad \quad \quad \cancel{-7K^2} - \frac{98K}{3} - \frac{343}{9} \\ +41x &= \quad \quad \quad +41K + \frac{287}{3} \\ -87 &= \quad \quad \quad -87 \end{aligned}$$

$$= K^3 + \frac{74}{3}K - \frac{452}{27} = 0$$

equazione ridotta

Sappiamo che: $K^3 + aK + b = 0$

$$\frac{u}{v} = \sqrt[3]{\frac{-b}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

quindi ora è possibile rilevare che:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$$

condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia una sola radice reale.

La condizione che: $a > 0$ è sufficiente, ma non necessaria infatti se $a < 0$ dovrà anche essere

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left|\left(\frac{a}{3}\right)^3\right|$$

cioè: $|a| < 3\left(\frac{b}{2}\right)^{2/3}$

Tornando al nostro caso avremo:

$$\frac{u}{v} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{452}{27}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{226}{27}\right)^2 + \left(\frac{74}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{226}{27} \pm \frac{1}{27}\sqrt{(226)^2 + (74)^3}}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{226 \pm \sqrt{456300}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{226 \pm 390\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1 \pm 5\sqrt{3})^3}$$

$$u = \frac{1}{3}(1 + 5\sqrt{3}) \quad ; \quad v = \frac{1}{3}(1 - 5\sqrt{3})$$

$$K_1 = (u + v) = \frac{2}{3} \quad ; \quad K_2 = \frac{-(u+v)}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)\sqrt{-3} = -\frac{1}{3} + \frac{5\sqrt{3}\sqrt{-3}}{3} = K_2 = \left(-\frac{1}{3} + i5\right)$$

$$K_3 = \left(-\frac{1}{3} - i5\right)$$

e sostituendo: $x_i = \left(\kappa_i - \frac{a_2}{3a_3} \right) = \kappa_i - \left(-\frac{1}{3} \right) = \left(\kappa_i + \frac{1}{3} \right)$

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}; \quad \boxed{x_1 = 3}$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{3} + i5 \right) = \left(\frac{2}{3} + i5 \right); \quad \boxed{x_2 = 2 + i5}$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{3} - i5 \right) = \left(\frac{2}{3} - i5 \right); \quad \boxed{x_3 = 2 - i5}$$

Tornano logicamente le radici prefissate

Anche per fare un esempio numerico del secondo caso, prefissiamo le radici per es.

$$(x_1 = 5); \quad (x_2 = x_3 = 3) \quad \text{cioè: } (x-5)(x-3)^2 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9)(x-5) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5x^2 + 30x - 45 = 0$$

$$\boxed{x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = 0}$$

$$\text{posto: } \left[\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3} \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^2 \right] = a = 39 - \frac{1}{3} \left(\frac{121}{1} \right) = \boxed{a = -\frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{27} \left[2 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^3 - 9 \left(\frac{a_1 a_2}{a_3} \right) + 27 \left(\frac{a_2}{a_3} \right) \right] = b = \frac{1}{27} \left[(-2662) + (3861) - 1215 \right] = \boxed{b = \frac{-16}{27}}$$

$$\boxed{\kappa^3 - \frac{4}{3}\kappa - \frac{16}{27} = 0} \quad \text{eq. ridotta}$$

$$u = \sqrt[3]{+\frac{8}{27} + \sqrt{\frac{64}{27^2} - \frac{4}{27} \frac{16}{27}}} = u = v = \sqrt[3]{\frac{8}{27} \pm 0} = \frac{2}{3}$$

$$(u+v) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3} = \kappa_1}; \quad \kappa_2 = \kappa_3 = -\frac{(u+v)}{2} \pm \frac{(u-v)\sqrt{3}}{2} = -\frac{(u+v)}{2}$$

$$\boxed{\kappa_2 = \kappa_3 = -\frac{2}{3}}$$

$$x_i = \left(\kappa_i - \frac{a_2}{3a_3} \right) = \left(\kappa_i + \frac{1}{3} \right)$$

$$x_1 = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \right); \quad \boxed{x_1 = 5} \quad x_2 = x_3 = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{3} \right); \quad \boxed{x_2 = x_3 = 3}$$

che ovviamente tornano quelle prefissate.

Per il 3° Caso (detto anche irriducibile)

prefissiamo tre diverse radici reali per es.: 3; 4; 5.

$$(x-3)(x-4)(x-5) = 0 \quad \text{da cui:}$$

l'equazione da risolvere:

$$\boxed{x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0}$$

poniamo al solito: $x = \left(K - \frac{a_2}{3a_3}\right)$; $x = \left(K + \frac{12}{3}\right)$; $\boxed{x = K + 4}$

$$x^3 = K^3 + 12K^2 + 48K + 64$$

$$-12x^2 = \cancel{12K^2} - 96K - 192$$

$$+47x = + 47K + 188$$

$$-60 = - 60$$

$$\hline K^3 - K + 0 = 0: \text{ l'equazione}$$

ridotta sarà: $\boxed{K^3 - K = 0}$ da cui $\boxed{K_1 = 0}$; $\boxed{K_2 = -1}$; $\boxed{K_3 = +1}$

Come si vede, una equazione di 3° che abbia per radici la terna Pitagorica 3; 4; 5 non necessita di trasformazione trigonometrica. Ciò si verifica quando $-\frac{a_2/a_3}{3}$ è una radice; cioè quando: una radice è la media aritmetica della somma

delle radici. (Si ha che un valore di $K = 0$)

Consideriamo un'altra terna pitagorica:

5, 12, 13. $(x-5)(x-12)(x-13) = 0$ e l'equazione da

risolvere:

$$\boxed{x^3 - 30x^2 + 281x - 780 = 0}$$

sostituiamo: $x = \left(K - \frac{a_2}{3a_3}\right) = \boxed{x = (K + 10)}$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = K^3 + 30K^2 + 300K + 1000 \\
 (30)x^2 & = -30K^2 - 600K - 3000 \\
 +(281)x & = +281K + 2810 \\
 -780 & = -780
 \end{array}$$

$$\boxed{K^3 - 19K + 30 = 0} \quad \text{equazione ridotta}$$

La radice: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^3}{27}} = \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{-19^3}{27}\right)} = \sqrt{225 - \frac{6859}{27}} =$

$$= \sqrt{\frac{-784}{27}} = \boxed{\frac{28}{9}\sqrt{-3}} \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{u \text{ e } v = \sqrt[3]{-15 \pm \frac{28}{9}\sqrt{-3}}}$$

La radice immaginaria $-\sqrt{3}$ indica che per risolvere l'equazione occorre

avvalersi della trasformazione trigonometrica.

(Non tutte le terne pitagoriche semplificano il procedimento).

Utilizzando le formule già trovate abbiamo:

$$m = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}; \quad \boxed{m = 2\sqrt{\frac{19}{3}}}; \quad \boxed{\cos(3\theta) = \frac{3b}{a \cdot m}}$$

$$\cos(3\theta) = \frac{3(+30)}{(-19) \cdot 2\sqrt{\frac{19}{3}}} = \frac{-45\sqrt{3}}{19\sqrt{19}} = -\sqrt{\frac{6075}{6859}} = -0,941115096$$

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos(-0,941115096) = \underline{0,932233663 \text{ rad}}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2}{3}\pi = \underline{3,026631733 \text{ rad}}; \quad \theta_3 = \theta_1 + \frac{4}{3}\pi = \underline{5,121026838 \text{ rad}}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 K_1 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cos \theta_1 = 3,000000000 \\
 K_2 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cos \theta_2 = -5,000000000 \\
 K_3 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cos \theta_3 = 2,000000000
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 x = \left(K - \frac{a_2/a_3}{3}\right) = \left(K - \frac{-30/1}{3}\right) \\
 \boxed{x = K + 10}
 \end{array}$$

$$\underline{x_1} = (10 + 3) = \underline{13}; \quad \underline{x_2} = (10 - 5) = \underline{5}; \quad \underline{x_3} = (10 + 2) = \underline{12}$$

È evidente che passando attraverso valori di funzioni trigonometriche, il grado di approssimazione dipende dal grado di approssimazione delle tavole trigonometriche usate.

Ci domandiamo:

"È possibile avere la risoluzione esatta?"

Facciamo qualche osservazione:

È facile, a posteriori, noti i "K" trovare il valore del radicale:

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \sqrt[3]{-15 \pm \frac{28}{9}\sqrt{-3}} = \frac{1}{3} \sqrt{-405 \pm 84\sqrt{-3}} =$$

essendo:

$$K_1 = (u+v) ; K_2 = \left(-\frac{(u+v)}{2} - \frac{(u-v)\sqrt{-3}}{2} \right); K_3 = \left(-\frac{(u+v)}{2} + \frac{(u-v)\sqrt{-3}}{2} \right)$$

si nota: $(K_1 + K_2) = -K_3$; $(K_1 + K_3) = -K_2$; $(K_2 + K_3) = -K_1$;

"Ogni K vale la somma delle altre due K prese di segno opposto."

Scegliamo un qualsiasi $K = (u+v)$ per es: $K_2 = -5 = (u+v)$

essendo: $uv = -\frac{a}{3} = \frac{19}{3}$. varia l'equazione: $z^2 - Sz + P = 0$

cioè: $z^2 - (u+v)z + uv = 0$; $z^2 + 5z + \frac{19}{3} = 0$; $\rightarrow \left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{19}{3}}$

$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(-5 \pm \sqrt{\frac{75-76}{3}} \right)$; $\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(-15 \pm \sqrt{-3} \right)$ Infatti:

$$\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{8} (-15 \pm \sqrt{-3})^3} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3375 + 675\sqrt{-3} \\ +135 - 3\sqrt{-3} \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{8} (-3240 + 672\sqrt{-3})} = \boxed{\frac{1}{3} \sqrt[3]{-(405 \pm 84\sqrt{-3})}}$$

che è il radicale che ci ha costretti ad eseguire la trasformazione trigonometrica.

Se avessimo saputo che:

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{-405 \pm 84\sqrt{-3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{-15 \pm \sqrt{-3}}{2} \right)$$

avremmo risolto direttamente, senza trasformazioni trigonometriche:

$$u = \frac{1}{3} \left(\frac{-15 + \sqrt{-3}}{2} \right); \quad v = \frac{1}{3} \left(\frac{-15 - \sqrt{-3}}{2} \right); \quad (u+v) = \boxed{K_1 = -5}$$

$$\left. \begin{matrix} K_2 \\ K_3 \end{matrix} \right\} = \left(\frac{-K_1}{2} \pm \left(\frac{u-v}{2} \right) \sqrt{-3} \right); \quad = \pm \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{-3} \sqrt{-3}}{3 \cdot 2} = K_2 = \pm \frac{5+1}{2} = +3 \quad \boxed{K_2 = 3}$$

$$K_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}; \quad \boxed{K_3 = 2} \quad \text{da cui i valori in } x. \quad (\text{vedi pag. precedente})$$

Ma il nostro: $\frac{1}{3} \left(\frac{-15 \pm \sqrt{-3}}{2} \right)$ è stato ricavato da $K_1 = -5$,

se avessimo scelto: $K_1 = (u+v) = 2$; $(uv) = \frac{19}{3}$;

$$z^2 - 2z + \frac{19}{3} = 0 \quad \left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{19}{3}} = 1 \pm \sqrt{\frac{3-19}{3}} =$$

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \left(1 \pm \sqrt{\frac{-16}{3}} \right) = 1 \mp \frac{4}{3} \sqrt{-3} = \boxed{\frac{1}{3} (3 \mp 4\sqrt{-3})}$$

eleviamo al cubo $(3 + 4\sqrt{-3}) = 3^3 + 3^2 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{-3} + 3 \cdot 3 \cdot 16(-3) + 64(-3)\sqrt{-3}$

$$(3 \pm 4\sqrt{-3}) = 27 + 108\sqrt{-3} - 432 - 192\sqrt{-3} = (-405 \mp 84\sqrt{-3})$$

$$\text{cioè: } \left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{-405 \pm 84\sqrt{-3}} = \frac{1}{3} (3 \mp 4\sqrt{-3})$$

$$\text{cioè: } u = \frac{1}{3} (3 - 4\sqrt{-3}); \quad v = \frac{1}{3} (3 + 4\sqrt{-3}); \quad (u+v) = 2 = \boxed{K_1 = 2}$$

$$\left(\frac{u-v}{2} \right) = \frac{-4}{3} \sqrt{-3}; \quad \frac{u-v}{2} (\sqrt{-3}) = 4; \quad \left(\frac{-K_1}{2} - 4 \right) = K_2 = -1 - 4 = \boxed{-5 = K_2}$$

$$K_3 = -1 + 4 = 3; \quad \boxed{K_3 = 3}$$

Se scegliamo per il nostro $K_1 = 3$ avremo:

$$z^2 - 3z + \frac{19}{3} = 0 \quad \left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{19}{3}}}{2} = \frac{1}{2} \left(3 \pm \sqrt{\frac{27 - 76}{3}} \right) =$$

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(3 \pm \sqrt{\frac{-49}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(3 \pm 7 \frac{\sqrt{-3}}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{9 \pm 7\sqrt{-3}}{2} \right)$$

elevarlo al cubo: $\left(\frac{9 \pm 7\sqrt{-3}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (729 + 81 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{-3} - 3 \cdot 9 \cdot 49(-3) -$

$$-1029\sqrt{-3}) ; = \frac{1}{8} (729 - 3969 + 1701\sqrt{-3} - 1029\sqrt{-3}) =$$

$$= \frac{1}{8} (-3240 + 672\sqrt{-3}) = (-405 + 84\sqrt{-3})$$

cioè:

$$\boxed{\frac{1}{3} \sqrt[3]{-405 \pm 84\sqrt{-3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{9 \pm 7\sqrt{-3}}{2} \right)}$$

Cioè abbiamo le tre radici (complesse) ottenute dall'estrazione della radice cubica di un numero complesso. Ciò è stato possibile perché con la trasformazione trigonometrica conosciamo: $K = (u+v)$. Per estrarre le radici cubiche di un numero complesso occorre utilizzare le funzioni angolari.

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{y = x^3 - Sx^2 + Qx - P}$$

$$\boxed{y' = 3x^2 - 2Sx + Q}$$

$$; \quad \boxed{y'' = 6x - 2S}$$

$y'' = 0$ per $\boxed{x = \frac{S}{3}}$ Il flesso si ha nella curva quando l'ascissa è il valore medio delle radici.

$y' = 0$ per $\boxed{x = \frac{S}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \left(\frac{Q}{3}\right)}}$ Per avere max o min occorre: $\underline{\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3} > 0}$

per $\left(\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3}\right) = 0$ si ha un flesso orizzontale

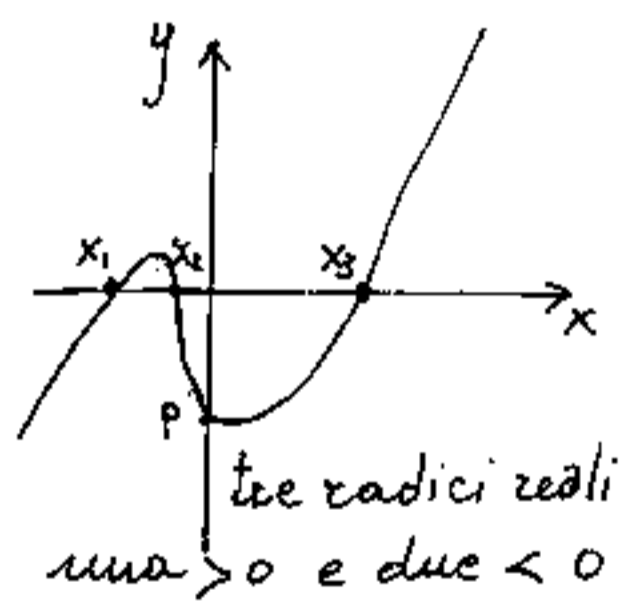
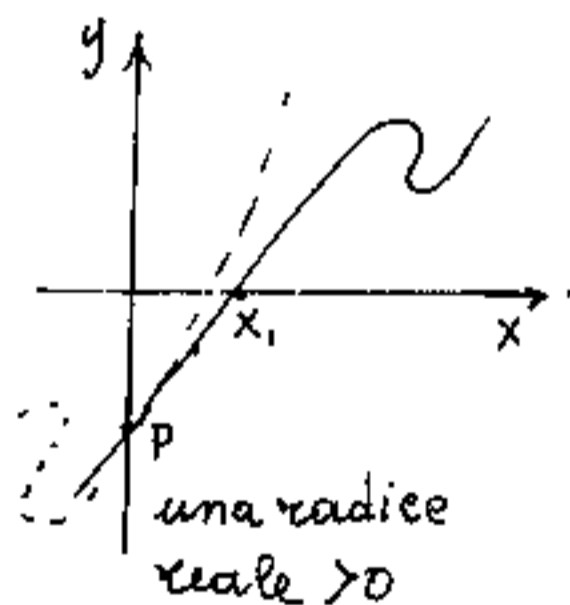
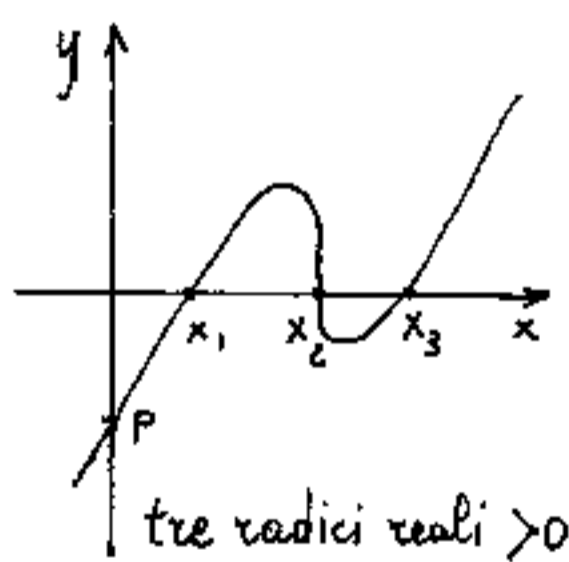
per $\left(\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3}\right) < 0$ si ha una sola radice reale e due immaginarie coniugate.

per $\left(\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3}\right) > 0$ si hanno un max. ed un min. equidistanti dal flesso, ma per avere tre radici reali occorre che il max ed il min. siano di segno opposto.

Lo studio del grafico della funzione: $y = x^3 - Sx^2 + Qx - P$ permette di affermare che:

1) Se $P < 0$ si ha almeno una radice reale > 0 .

2) Se $P > 0$ si ha almeno una radice reale < 0
(per esempio con $P < 0$)



Poiché una equazione di 3° grado ammette sempre una radice reale, sapendo il campo ove certamente esiste, permette, con Ruffini di scindere l'equazione di terzo grado nel prodotto:

$$(x - \alpha)(x^2 - (S + \alpha)x + (Q - S\alpha + \alpha^2)) = 0$$

Il calcolo, anche approssimato dell'equazione cubica è stato svolto nel tempo con metodi anche molto diversi. Per esempio riportiamo il metodo per calcolare le equazioni risolte col regolo calcolatore. Sia l'equazione nella forma risolta (per es)

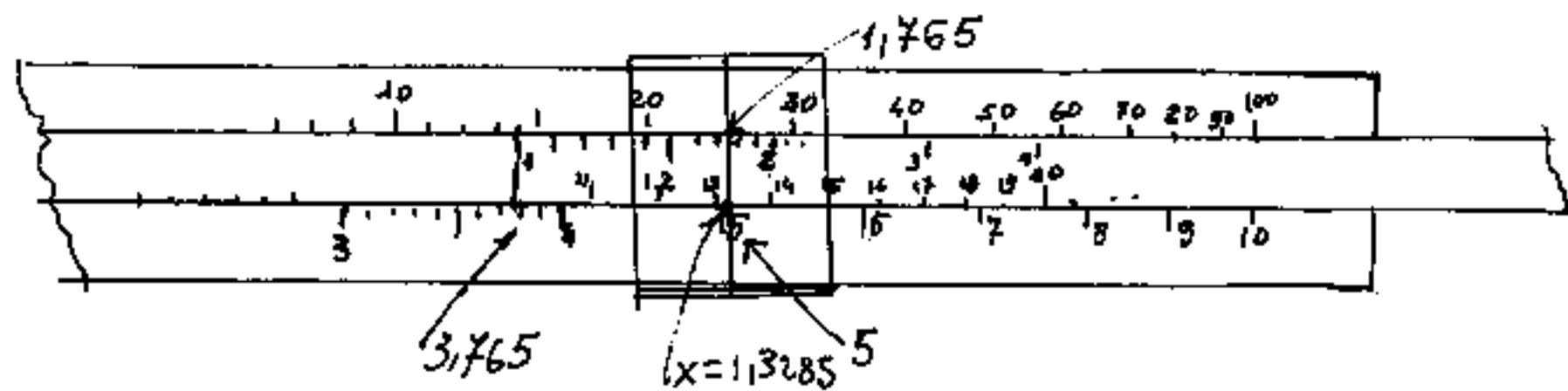
$$x^3 + 2x + 5 = 0$$

che scriviamo nella forma:

$$x^2 + 2 = \frac{-5}{x} \quad (\text{la } x < 0)$$

fissato col vetrino nella scala inferiore fissa del regolo il N° 5 si scorre con lo scorrevole per dividere 5 quando il quoziente risulta uguale al quadrato di x (che si legge nella scala superiore dello scorrevole) maggiorato di 2 quella è la x .

nel nostro caso $x^2 \approx 1,765$; $x = 1,3285$; $(x^2 + 2) = 3,765$



con un po' di pratica si arriva ad ottenere una x con 3 o 4 cifre significative.

Utilizzo delle funzioni iperboliche

Qualora ci proponessimo di utilizzare la trasformazione trigonometrica per equazioni di terzo grado riducibili, (cioè del caso I) avremmo argomenti (archi) impossibili.

Per es. data l'equazione: (già ridotta)

$$\boxed{x^3 - x + 2 = 0}$$

abbiamo: $a = -1$; $b = 2$ per cui: $m = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$

$$m = 2\sqrt{\frac{1}{3}}; \quad \cos(3\theta) = \frac{3b}{am} = \frac{6}{(-1)2\sqrt{\frac{1}{3}}} = -3\sqrt{3} = \underline{-5,1961524..}$$

$\cos(3\theta) = -5,196..$ è impossibile un angolo che abbia il coseno in valore assoluto > 1 .

il coseno è negativo nel II e IV quadrante, perciò

$$\cos(3\theta) = -\cos(3\theta - \pi)$$

Dalle relazioni fra le funzioni iperboliche e le funzioni circolari si ha:

$$-\cos(3\theta - \pi) = -\cosh[i(3\theta - \pi)] = -5,1961524$$

Dalle tavole delle funzioni iperboliche si ha:

$$\operatorname{argcosh}(5,1961524..) = 2,331675041 = [i(3\theta - \pi)]$$

$$(3\theta - \pi) = \frac{1}{i}(2,331675041) = -(2,331675041)i$$

$$\theta = \frac{1}{3}(\pi - i(2,331675041))$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} - i(0,777225013)$$

$$\cos \theta_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - i(0,777225013)\right) =$$

$$\cos(\theta_1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cosh(i(0,777225013)) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}(i(0,777225013))$$

ma dalle relazioni fra le funzioni iperboliche e le circolari si ha: $\cosh(iu) = \cos(u)$; $\sinh(iu) = i \sin(u)$
 $\sin(iu) = i \sinh(u)$; $\cos(iu) = \cosh(u)$; quindi

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cosh(0,777225013) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sinh(0,777225013) \\ &= (0,5 \times 1,317553475) + i(0,866025403 \times 0,857873626) \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\theta_1) = 0,658776737 + i(0,742940353)}$$

Ricordiamo che le tre radici sono:

$$\boxed{x_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos(\theta_1)} \quad ; \quad \boxed{x_2 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right)} \quad ; \quad \boxed{x_3 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\left(\theta_1 + \frac{4}{3}\pi\right)}$$

perciò:

$$\cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{3} - i(0,777225013)\right) + \frac{2}{3}\pi\right] =$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) &= \cos\left(\pi - i(0,777225013)\right) = \\ &= \cos(\pi) \cosh(0,777225013) + i \sin(\pi) \sinh(0,777225013) \end{aligned}$$

$$\text{ma: } (\sin(\pi) = 0) \quad ; \quad (\cos(\pi) = -1)$$

$$\boxed{\cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) = -1,317553475}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\theta_1 + \frac{4}{3}\pi\right) &= \cos\left(\frac{5}{3}\pi - i(0,777225013)\right) = \\ &= \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) \cosh(0,777225013) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) \sinh(0,777225013) \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\theta_1 + \frac{4}{3}\pi\right) = 0,658776737 - i(0,742940353)}$$

$$2\sqrt{\frac{-a}{3}} = 1,154700538$$

$$\boxed{x_1 = 0,760689852 + i(0,857873625)}$$

$$\boxed{x_2 = -1,521379704 \quad (\text{reale})}$$

$$\boxed{x_3 = 0,760689852 - i(0,857873625)}$$

radici che potevano essere ricavate con le formule del caso I.

Discussione sui polinomi di 3° grado.

$$(y = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \quad (\text{per: } y=0 \rightarrow x = \alpha)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 > 0 \rightarrow \alpha < 0 \\ a_0 < 0 \rightarrow \alpha > 0 \end{array} \right\} \text{Il segno di } a_0 \text{ dice il segno di } \alpha$$

a_1 = pendenza della curva per $x=0$.

$(a_2 \geq 0)$ curvatura per $x=0$

$$\boxed{x = -\frac{a_2}{3}}$$
 ascissa del flesso (vi è un solo flesso)

$$\boxed{y'_f = -\frac{a_2^2}{3} + a_1}$$
 pendenza del flesso che passa da curvatura negativa a positiva, mai viceversa.

$$\boxed{y_f = \frac{2}{27} a_2^3 + \frac{a_2 a_1}{3} + a_0}$$
 ordinata del flesso

$(y'_f \geq 0)$ non si hanno max. o min. relativi (una sola α reale)

$$\boxed{-a_0/a_1}$$
 punto comune in ascisse alla tangente per $x=0$

$(a_0 < 0) \rightarrow$ (radice reale positiva)				$(a_0 > 0)$ (radice reale negativa)			
$a_1 < 0$		$a_1 > 0$		$a_1 < 0$		$a_1 > 0$	
$a_2 < 0$	$a_2 > 0$	$a_2 < 0$	$a_2 > 0$	$a_2 < 0$	$a_2 > 0$	$a_2 < 0$	$a_2 > 0$

Si noti come il valore dell'ascissa $x = (-a_0/a_1)$ sia utile per avere il campo delle radici reali nei vari casi.

Equazioni di 4° grado

Abbiamo già trattato le equazioni di 4° grado biquadratiche e le equazioni di 4° grado simmetriche, qui diamo le formule risolutive dell'equazione generale di 4° grado.

Non diamo la dimostrazione, ma semplicemente le modalità di applicazione.

Consideriamo l'equazione generale già ridotta ad avere unitario il primo coefficiente, cioè: $a_4 = 1$:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

e consideriamo l'equazione ausiliaria di 3° grado:

$$(in y) \quad y^3 - a_2y^2 + (a_3a_1 - 4a_0)y + (-a_3^2 + 4a_2)a_0 - a_1^2 = 0$$

e sia y una radice di quest'ultima equazione,

definiamo:
$$R = \sqrt{\frac{a_3^2}{4} - a_2 + y}$$

Se: $R \neq 0$ allora: $H = \left(\frac{a_3^2}{2} - a_2 - y\right)$; $K = \frac{1}{R}(a_3a_1 - 2a_1 - \frac{a_3^3}{4})$

Se: $R = 0$ allora: $H = \left(\frac{3a_3^2}{4} - 2a_2\right)$; $K = 2\sqrt{y^2 - 4a_0}$

$$D = \sqrt{H + K}$$

$$E = \sqrt{H - K}$$

Le radici dell'equazione data saranno:

$$\begin{array}{l} x_1 \setminus = -\frac{a_3}{4} + \frac{R}{2} \pm \frac{D}{2} \\ x_2 / = \\ x_3 \setminus = -\frac{a_3}{4} - \frac{R}{2} \pm \frac{E}{2} \\ x_4 / = \end{array}$$

Si noti che per risolvere l'equazione di 4° grado è necessario risolvere prima l'equazione ausiliaria di 3° grado.

Le radici di una equazione di 4° grado possono essere: quattro reali; due reali e due complesse coniugate; quattro immaginarie costituite da due coppie complesse coniugate.

Facciamo un esempio:

data l'equazione: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

l'equazione ausiliaria di 3° grado sarà:

$$y^3 - 35y^2 + 404y - 1540 = 0$$

le cui radici sono:

$$y_1 = 14 ; y_2 = 10 ; y_3 = 11$$

Avendo tre radici reali, possiamo scegliere; poiché: $R = \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_2 + y}$, essendo: $(\frac{a_2^2}{4} - a_2) = (\frac{100}{4} - 35) = (-10)$ con $y = 10$ si ha $R = 0$ cioè semplifica i calcoli. (dobbiamo scegliere y in modo che $R \geq 0$)

$$\text{Per } R = 0 ; H = (\frac{3a_2^2}{4} - 2a_2) = \frac{3 \cdot 100}{4} - 2 \cdot 35 = (75 - 70) = 5 = H$$

$$K = 2\sqrt{y^2 - 4a_0} = 2\sqrt{100 - 4(24)} = 2\sqrt{4} = 4 = K$$

$$D = \sqrt{H + K} = \sqrt{5 + 4} = 3 = D$$

$$E = \sqrt{H - K} = \sqrt{5 - 4} = 1 = E$$

$$x_1 \setminus = \frac{-a_3}{4} + \frac{R}{2} + \frac{D}{2} = \frac{+10}{4} + \frac{0}{2} + \frac{3}{2} \setminus$$

$$x_2 / = \frac{-a_3}{4} + \frac{R}{2} - \frac{D}{2} = \frac{+10}{4} + \frac{0}{2} - \frac{3}{2} \setminus$$

$$x_3 \setminus = \frac{-a_3}{4} - \frac{R}{2} + \frac{E}{2} = \frac{+10}{4} - \frac{0}{2} + \frac{1}{2} \setminus$$

$$x_4 / = \frac{-a_3}{4} - \frac{R}{2} - \frac{E}{2} = \frac{+10}{4} - \frac{0}{2} - \frac{1}{2} \setminus$$

$$x_1 = 2,5 + 1,5 = 4$$

$$x_2 = 2,5 - 1,5 = 1$$

$$x_3 = 2,5 + 0,5 = 3$$

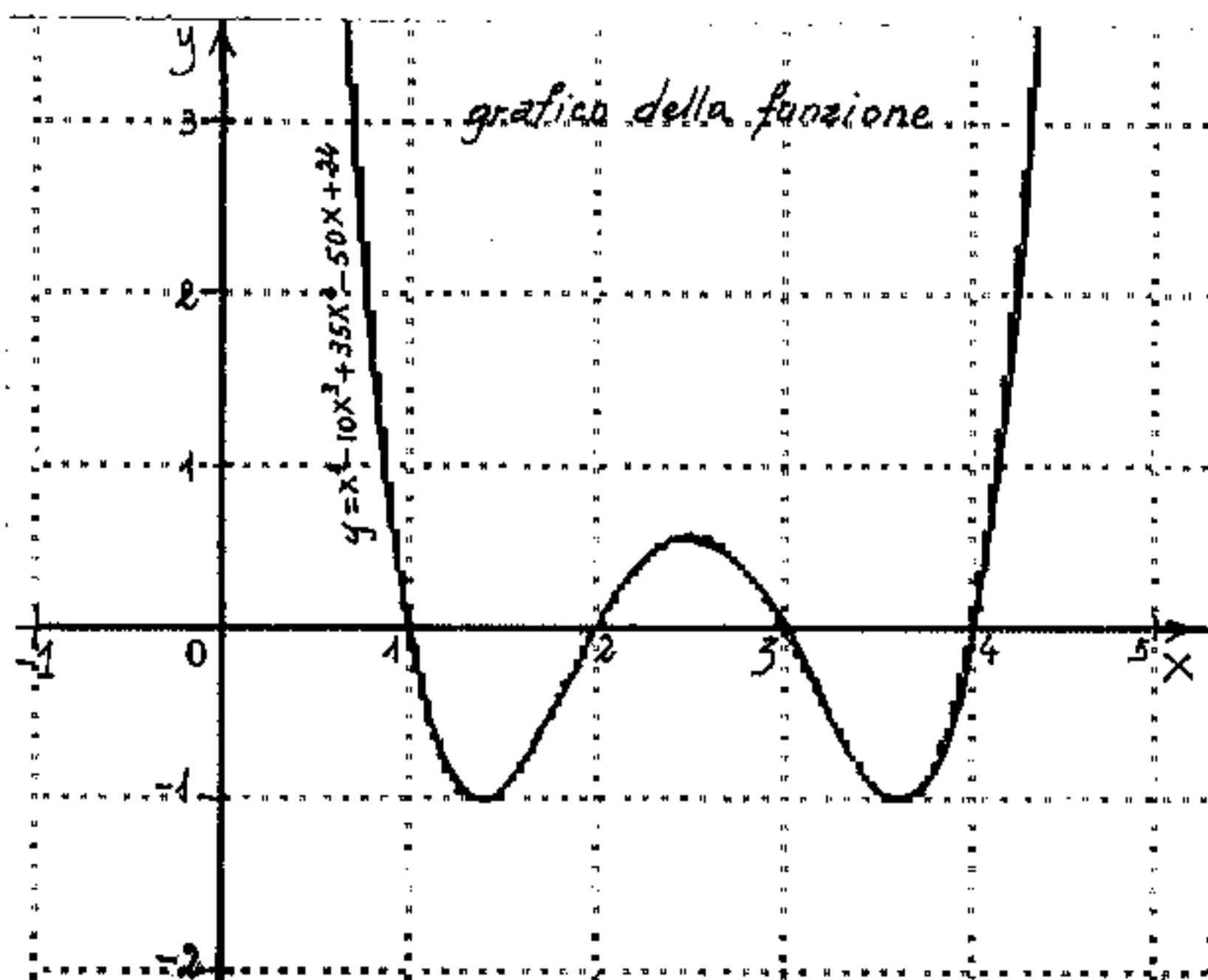
$$x_4 = 2,5 - 0,5 = 2$$

Se come radice dell'equazione di 3° grado avessimo scelto: $y=14$ avremmo ottenuto: $R=2$; $H=1$; $K=0$; $D=1$; $E=1$; da cui: le radici:

$x_1=4$
 $x_2=3$
 $x_3=2$
 $x_4=1$

} ove si nota che sono le stesse calcolate con $y=10$ però salvo x_1 sono diversamente indicizzate: $x_2 \rightarrow x_4$; $x_3 \rightarrow x_2$; $x_4 \rightarrow x_3$.
 cioè si ottengono le stesse radici con oroline diverse.

Si riporta il grafico della $f(x)$



Dal grafico si nota come per traslazione di assi possono mutare le radici della equazione.

Equazioni di grado superiore al 4°

Per le equazioni di grado superiore al 4° vale il celebre teorema di Ruffini e Abel:

"L'equazione generale di grado superiore al quarto, non è risolvibile per radicali"

N. H. Abel osservò che una equazione irriducibile per la quale una radice sia esprimibile per radicali è totalmente risolvibile per radicali.

Il Ruffini pubblicò a Bologna nel 1799, "La Teoria generale delle equazioni", ove si dimostra il teorema di cui sopra esposto.

Negli anni 1970' pare sia stata trovata una risoluzione delle equazioni di 5° grado con l'aggiunta di un complesso. (Non si hanno elementi in merito).

Osservando i coefficienti di un polinomio di grado n , che indiciziamo con gli esponenti della x ponendo però il coefficiente di x^n , $a_n = 1$ possiamo (senza fare calcoli) avere utili informazioni sia per il grafico, sia per le radici.

Il valore della derivata i -ma: $(f^{(i)} = i! a_i)$ quando $x = 0$.

Si hanno due classi di polinomi, e cioè "n" può essere pari o dispari.

In generale il polinomio sia:

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

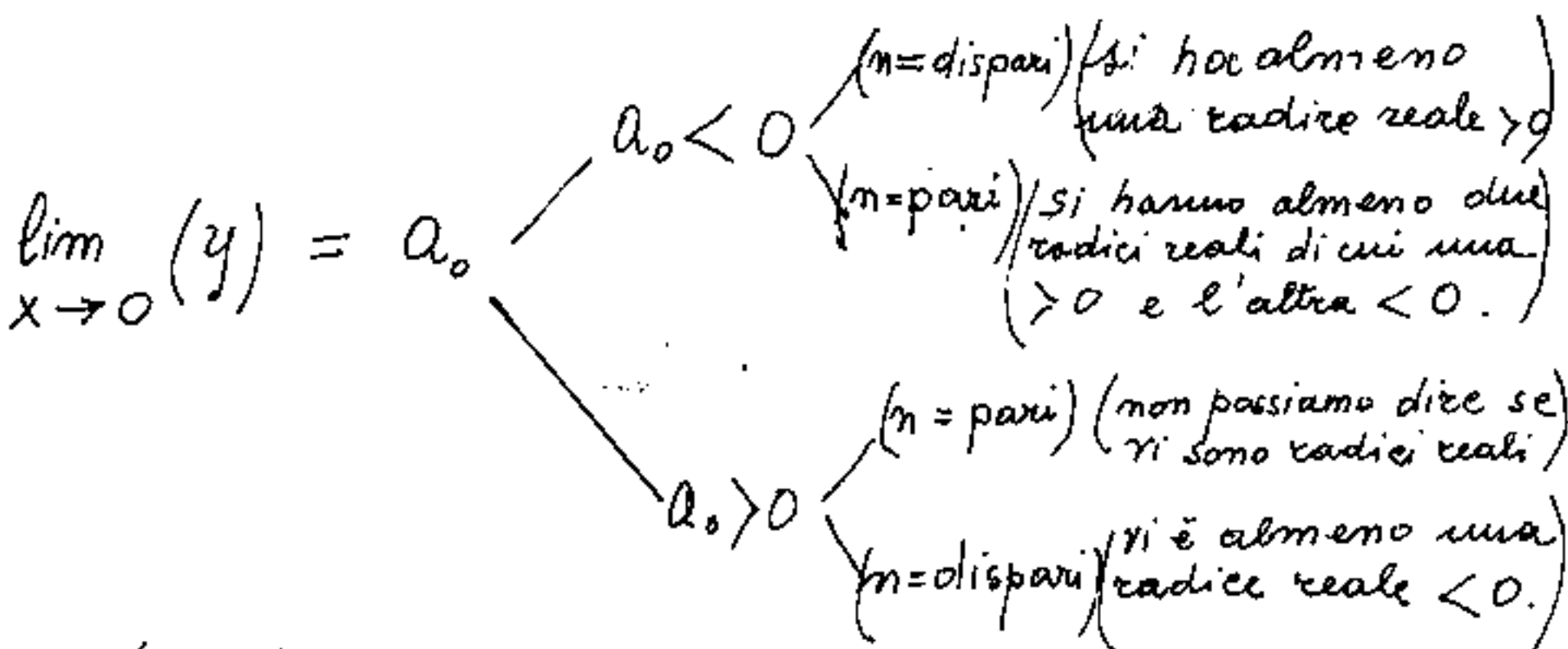
per $y=0$ si ha l'equazione di grado "n" che ammette n radici reali o complesse: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tali che il polinomio può essere scomposto nel prodotto di n binomi:

$$y = (x - \alpha_n)(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_{n-2}) \dots (x - \alpha_2)(x - \alpha_1) = 0$$

ciò giustifica perché abbiamo posto: $(a_n = 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y) \begin{cases} \text{(per } n = \text{pari)} & y = +\infty \\ \text{(per } n = \text{dispari)} & y = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y) = \begin{cases} \text{(Per } n = \text{pari)} \\ \text{(per } n = \text{dispari)} \end{cases} y = +\infty$$



per $(x=0) \rightarrow a_1$ rappresenta la pendenza della tangente alla curva.

$\rightarrow a_2 \gtrless 0$ dice se la curvatura è verso l'alto o verso il basso.

Per esempio data l'equazione:

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$$

$n = 5 = \text{dispari}$; $a_0 = -12 < 0$; perciò si ha almeno una radice reale positiva.

$a_1 = +16 > 0$ la pendenza della tangente per $x=0$.
tale tangente incontra l'asse x per $x = \frac{+12}{16}$; ($x = \frac{-a_0}{a_1}$)
cioè: $x = +0,75$ e poiché $a_2 < 0$ (curvatura verso il basso) avremo un flesso per $x > 0,75$, quindi la nostra radice sarà ancora maggiore.

si nota che per $x=1$ si annulla l'equazione

con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} 1 & 1 & -5 & +7 & -7 & +16 & -12 \\ 1 & & 1 & -4 & 3 & -4 & +12 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & -4 & +12 & 0 \end{array}$$

ed abbiamo:

$$(x-1)(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 12) = 0$$

$a_0 = +12$ con $n = \text{pari}$ non dà certezze, ma $a_1 < 0 \Rightarrow 4$

ci dice che la tangente alla curva per $x=0$ incontra le ascisse nel punto $x = \frac{-12}{-4} = +3$; $a_2 = +3 > 0$ curvatura verso il basso cioè se vi fosse un'altra radice positiva sarebbe minore di 3 proviamo $x=2$ con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 & -4 & +12 \\ 2 & & 2 & -4 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

abbiamo quindi almeno un'altra radice positiva

nell'equazione di 3° grado: $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$

Ma $a_1 = -1 < 0$ ci dice che la curva di 3° va verso un minimo $\curvearrowright -6$ per risalite. e la curvatura è ancora verso il basso ($a_2 = -2 < 0$)

per $x=3$

1	- 2	- 1	- 6
3	+ 3	+ 3	+ 6
1	+ 1	+ 2	0

ed abbiamo: $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x^2 + x + 2) = 0$

l'equazione di 2° grado ha due radici immaginarie.

La derivata prima del polinomio di 5° è

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 14x + 16$$

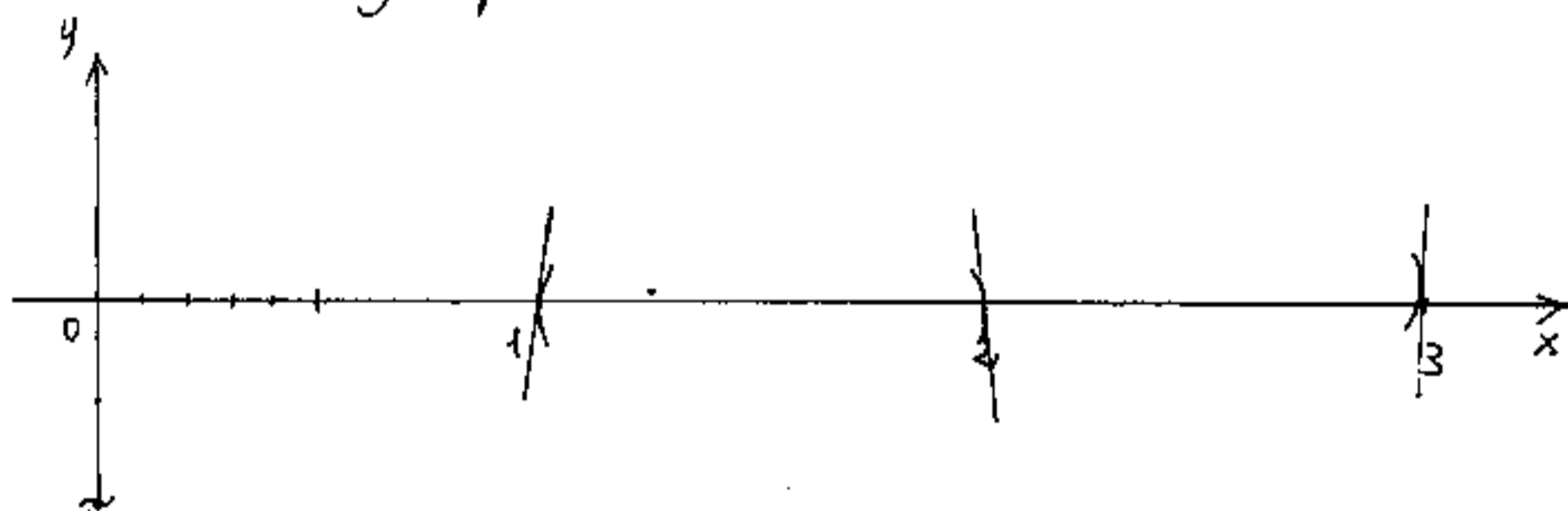
la derivata seconda:

$$y'' = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 14$$

sostituendovi le radici abbiamo:

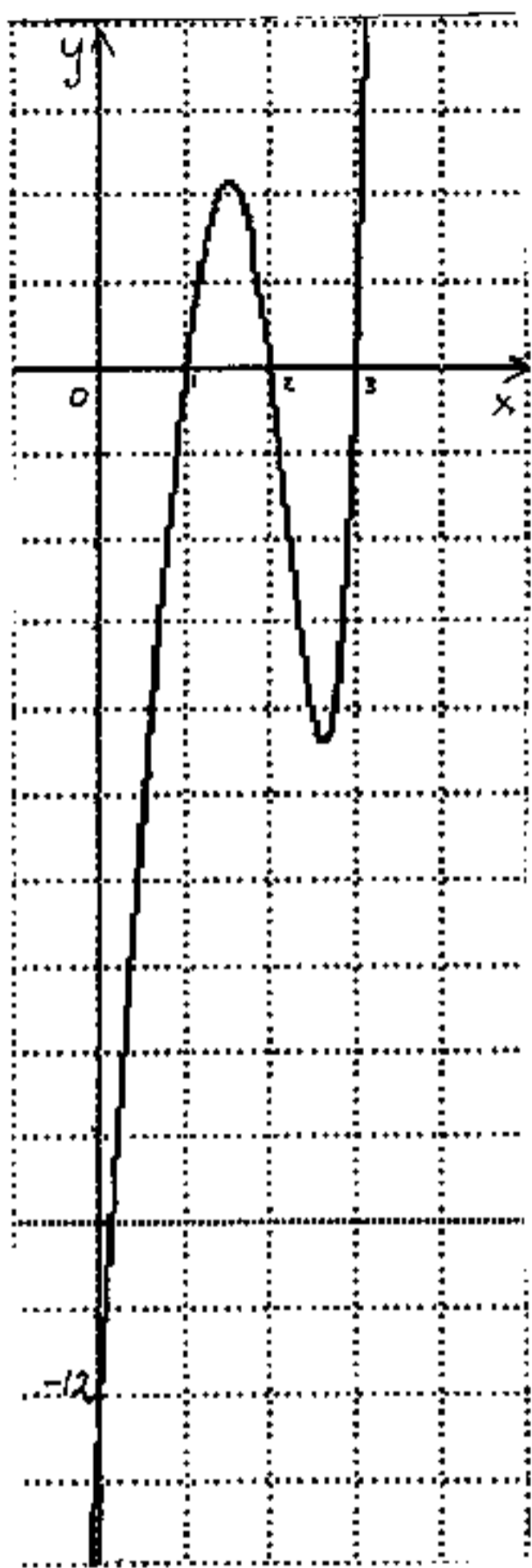
$$x=1 \rightarrow y' = +8 ; y'' = -12 ; x=2 \rightarrow y' = -8 ; y'' = -10 ; x=3 \rightarrow y' = 28 ; y'' = +12$$

da cui il grafico?



Dal quale è possibile dedurre che abbiamo un max fra 1 e 2 ; ($x=1,503377$)
 un min fra 2 e 3 ($x=2,633875$); un
 flesso fra 2 e 3 ($x=2,185752$).

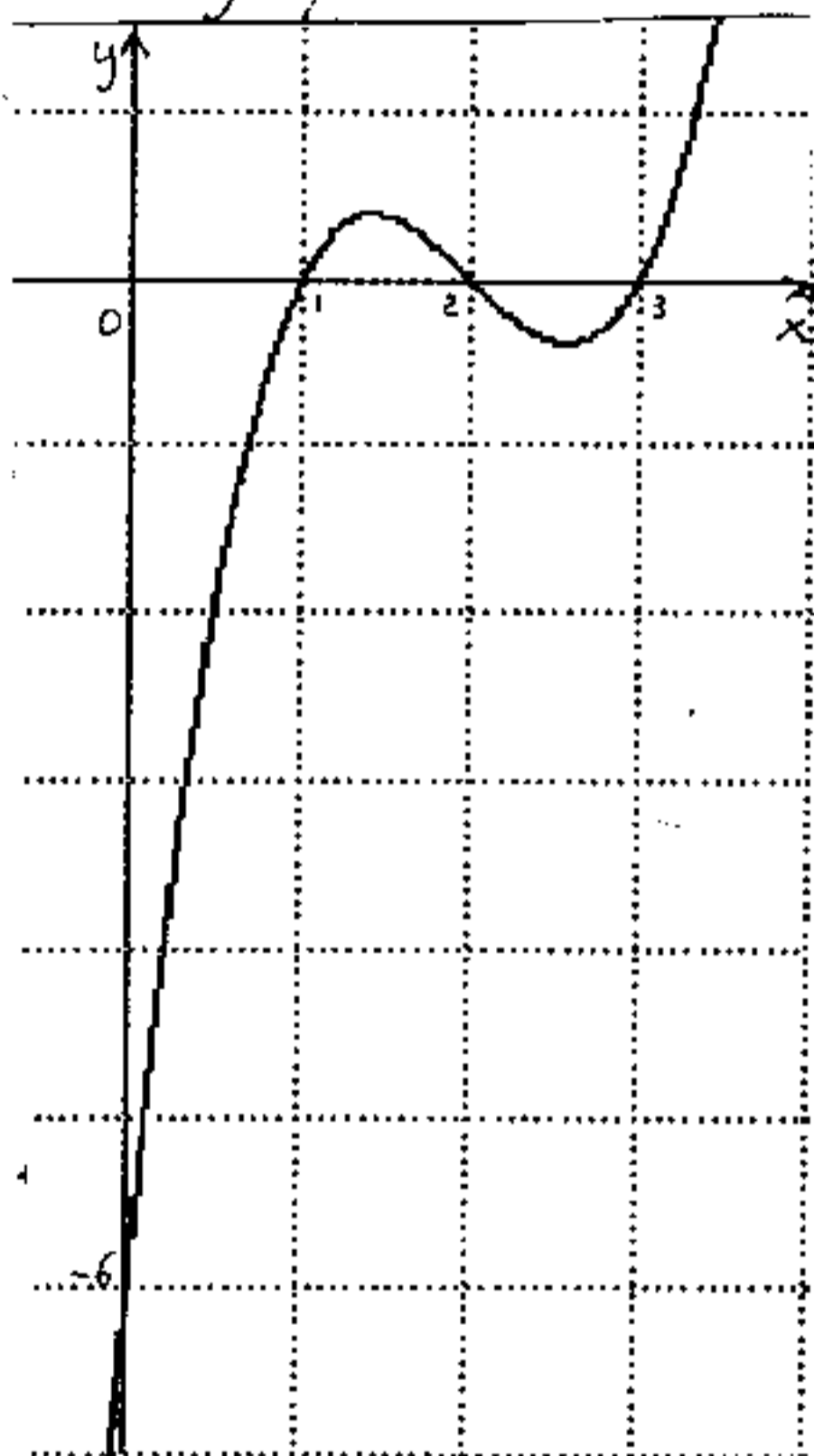
Per completezza riportiamo il grafico del polinomio di 5° grado il quale assomiglia molto ad un polinomio di 3° grado.



$$y = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$y = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

il cui grafico è:



Potevamo eseguire

la divisione: $(x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 16x - 12) \div (x^2 + x + 2)$

se avessimo conosciuto: $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 16x - 12 \\
 \underline{- (x^5 - x^4 - 2x^3)} \\
 -6x^4 + 5x^3 - 7x^2 \\
 \underline{+ (6x^4 + 6x^3 + 12x^2)} \\
 11x^3 + 5x^2 + 16x \\
 \underline{- (11x^3 - 11x^2 - 22x)} \\
 -6x^2 - 6x - 12 \\
 \underline{+ (6x^2 + 6x + 12)} \\
 \hline

 \end{array}$$

Il metodo di Graffe

(Per il calcolo delle equazioni, polinomi di grado n , per radici reali o complesse.)

Data l'equazione:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_i x^{n-i} + \dots + a_m = 0$$

Consideriamo l'equazione: $f(-x) = 0$, si hanno due casi: $n = \text{pari}$; $n = \text{dispari}$

per $n = \text{pari}$ $(-x)^n > 0$

" $n = \text{dispari}$ $(-x)^n < 0$

Ciò non ha rilevanza poiché: $f(-x) = 0$ si può sempre dividere o moltiplicare per (-1) , in due membri, senza variare $f(-x) = 0$, perché sia $(+1)$ il primo coefficiente.

Moltiplichiamo ora: $(f(x))(f(-x)) = 0 = {}^1f(x)$, otterremo così una nuova equazione ${}^1f(x) = 0$ le cui radici saranno: α_i^2 ($i = 1, 2, \dots, m$).

Consideriamo la nuova equazione ${}^1f(x) = 0$ e ripetiamo il prodotto: $({}^1f(x))({}^1f(-x)) = 0 = {}^2f(x) = 0$ le cui radici saranno α_i^4 ($i = 1, 2, \dots, m$)

Se il procedimento viene ripetuto p volte avremo una funzione: ${}^p f(x) = 0$ le cui radici

saranno: $\alpha_i^{(2^p)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Cioè le radici α dell'equazione data sono elevate ad un esponente che è una potenza di 2 cioè: 2^p . (Con $p = 1, 2, \dots$ a piacere)

Dimostreremo che il metodo è iterativo e che le radici si approssimano al vero quanto più grande è p . Anzi è possibile, dall'esame dei coefficienti, estendere il procedimento fino a che non otteniamo l'approssimazione desiderata.

Infatti supponiamo di aver calcolato i coefficienti dell'equazione per la funzione: $f^{(p)}(x) = 0$ di grado n ; avremo:

$$f^{(p)}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_i x^{n-i} + \dots + a_m = 0$$

le cui radici saranno:

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{\frac{-a_1}{1}}; \quad \alpha_2 = \sqrt[n]{\frac{-a_2}{a_1}}; \quad \dots \quad \alpha_i = \sqrt[n]{\frac{-a_i}{a_{i-1}}};$$

$$\alpha_m = \sqrt[n]{\frac{-a_m}{a_{m-1}}}$$

È opportuno notare che l'errore che si commette è circa dello stesso ordine per le varie radici, quindi basterà calcolare una sola radice (per es. α_1 , che è il valore maggiore fra le α_i ($i = 1, 2, \dots, m$)).

Se confrontiamo: $f^{(p)} \alpha_1$ e $f \alpha_1$, noteremo

che le due radici hanno il gruppo iniziale di cifre identico; se tali cifre soddisfano l'approssimazione che ci siamo proposti, fermiamo il procedimento, altrimenti calcoliamo:

$${}^{p+1}f(x) = 0$$

ed avremo ${}^{p+1}\alpha$, come radice, che, confrontata con la precedente ${}^p\alpha$, noteremo che sarà più esteso il gruppo iniziale di cifre uguali.

Quando P comincia ad essere piuttosto grande, noteremo, nel calcolo dei coefficienti $({}^P a_i)$, che i doppi prodotti che figurano nelle formule, non incidono più sulle cifre significative dell'approssimazione richiesta. Quindi da un certo P in poi possiamo trascurarli nel calcolo dei ${}^P a_i$, rendendo più snello il procedimento.

Vediamo ora come si calcolano i coefficienti della: ${}^{p+1}f(x) = ({}^P f(x))({}^P f(-x))$.

I due polinomi sono a segni alternativamente uguali ed opposti, per cui si elidono quei doppi prodotti che avranno segno opposto (come avviene $(a-b)(a+b)$).

Qualunque sia P avremo:

P	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x	1
0	1	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
1	1	$(-a_1^2 + 2a_2)$	$(a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4)$...	$(-1)^{n-1} a_{n-1}^2 + (-1)^{n-2} 2a_{n-2}a_n$	$(-1)^n a_n^2$
\vdots	\vdots					
2	1
P	1

Il risultato della riga precedente serve per calcolare la riga successiva.

Per comprendere meglio il procedimento, eseguiamo il prodotto: $(f(x))(f(-x)) = 0$ per equazioni di 5° grado.

avremo:

$$f(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

$$f(-x) = -x^5 + a_1x^4 - a_2x^3 + a_3x^2 - a_4x + a_5 = 0$$

al fine di ottenere che sia $+1$ il coefficiente del primo termine (x^5), moltiplichiamo per (-1) l'equazione $f(-x) = 0$ ed avremo:

$$f(-x) = x^5 - a_1x^4 + a_2x^3 - a_3x^2 + a_4x - a_5 = 0$$

ora eseguiamo dettagliatamente il prodotto: $(f(x))(f(-x)) = 0$:

$$\begin{aligned}
& x^5 + \cancel{a_1 x^4} + a_2 x^4 + \cancel{a_3 x^3} + a_4 x^3 + \cancel{a_5 x^2} \\
& - \cancel{a_1 x^4} - a_1^2 x^4 - \cancel{a_1 a_2 x^3} - a_1 a_3 x^3 - \cancel{a_1 a_4 x^2} - a_1 a_5 x^2 \\
& + a_2^2 x^4 + \cancel{a_1 a_2 x^3} + a_2^2 x^3 + \cancel{a_2 a_3 x^2} + a_2 a_4 x^2 + \cancel{a_2 a_5 x} \\
& - \cancel{a_3 x^3} - a_1 a_3 x^3 - \cancel{a_2 a_3 x^2} - a_3^2 x^2 - \cancel{a_3 a_4 x} - a_3 a_5 x^2 \\
& + a_4 x^3 + \cancel{a_1 a_4 x^2} + a_2 a_4 x^2 + \cancel{a_3 a_4 x} + a_4^2 x^2 + \cancel{a_4 a_5 x} \\
& - \cancel{a_5 x^2} - a_1 a_5 x^2 - \cancel{a_2 a_5 x} - a_3 a_5 x^2 - \cancel{a_4 a_5 x} - a_5^2
\end{aligned}$$

p	x^5	x^4	x^3	x^2	x	
0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1	$-a_1^2 + 2a_2$	$+a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4$	$-a_3^2 + 2a_2 a_4 - 2a_1 a_5$	$+a_4^2 - 2a_3 a_5$	$-a_5^2$

Si noti come il coefficiente della riga soprastante figura come primo termine al quadrato, e come queste due righe portino la regola per calcolare la successiva. (per esempio:)

$${}^2 a_1 = -(-a_1^2 + 2a_2)^2 + 2[a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4]$$

Facciamo degli esempi pratici, abbinando, al calcolo algebrico, il calcolo numerico di casi concreti, al fine di poter apprezzare l'approssimazione del procedimento ai vari livelli di p.

Noteremo anche come siano preferibili i metodi ordinari con n piccolo, e come sia laborioso il calcolo dei coefficienti con n grande.

Equazioni di primo grado

$f(x) = x + a_m = 0$; $f(-x) = ((-x) + a_m) = 0$ moltiplicando per (-1) si ha $f(-x) = (x - a_m) = 0$. L'equazione numerica sia:

$$f(x) = (x - 3) = 0$$

P	x		radici
0	1	a_m (3)	-
1	1	$-a_m^2$ (9)	$d = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3$
2	1	$+a_m^4$ (81)	$d = \sqrt[4]{\frac{81}{1}} = 3$

Se fosse stato $f(x) = (x + 3) = 0$; $f(-x) = (-x + 3) = 0$; $f(-x) = (x - 3) = 0$ avremmo avuto la stessa tabella, per cui per i segni delle radici è opportuno tenere presente la regola dei segni di Cartesio.

Equazioni di 2° grado

$$f(x) = x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = +4 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

P	x^2	X	$a_2 = a_m$	radici
0	1	a_1 (-2)	a_m (-8)	$\alpha_1 = \sqrt{a_1^2 - 2a_2}$; $-\alpha_2 = \sqrt{\frac{a_2^2}{-a_1 + 2a_2}}$
1	1	$(-a_1^2 + 2a_2)$ $-4 + (-16) = -20$	a_2^2 (64)	$\alpha_1 = \sqrt{\frac{20}{1}} = \underline{4,47}$; $-\alpha_2 = \sqrt{\frac{64}{20}} = \underline{1,79}$
2	1	$(-20^2 + 2(64))$ $-400 + 128 = -272$	64^2 4096	$\alpha_1 = \sqrt[4]{\frac{272}{1}} = \underline{4,06}$; $-\alpha_2 = \sqrt[4]{\frac{1064}{272}} = \underline{1,97}$
3	1	$(-272^2 + 2(4096))$ -65792	4096^2 16777216	$\alpha_1 = \sqrt[8]{\frac{65792}{1}} = \underline{4,00195}$; $\alpha_2 = \sqrt[8]{\frac{6777216}{65792}} =$ $-\alpha_2 = \underline{1,9992255}$

Equazioni di 3° grado

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 19x + 20 = 0$$

$\left. \begin{matrix} (5) \\ (-4) \\ 1 \end{matrix} \right\}$ radici
 esatte.

P	x^3	x^2	x	a_n	radici
0	1	$a_1 = (-3)$	$a_2 = (-19)$	$a_3 = (20)$	$\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_1}}; \alpha_2 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_1}}; \alpha_3 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_1}}$
1	1	$(-a_1^2 + 2a_2)$ (-42)	$+a_2^2 - 2a_1 a_3$ (+441)	$-a_3^2$ (-400)	$\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{42}{1}} = 6,48$ $\alpha_2 = \sqrt[3]{\frac{441}{42}} = 5,24$ $\alpha_3 = \sqrt[3]{\frac{400}{441}} = 0,95$
2	1	-882	+160881	-160000	$\alpha_1 = 5,449632$ $\alpha_2 = 3,675014$ $\alpha_3 = 0,99828155$
3	1	-456162	$+2,5600456116 \cdot 10^{10}$	$-2,56 \cdot 10^{10}$	$\alpha_1 = 5,097883$ $\alpha_2 = 3,923207$ $\alpha_3 = 0,999997773$
4	1	$-1,568828579 \cdot 10^{11}$	$+6,553600001 \cdot 10^{20}$	$-6,5536 \cdot 10^{20}$	$\alpha_1 = 5,008682$ $\alpha_2 = 3,99066357$ $\alpha_3 = 1$
5	1	$-2,330015110 \cdot 10^{22}$	$+4,294967295 \cdot 10^{41}$	$-4,294967296 \cdot 10^{41}$	$\alpha_1 = 5,000123749$ $\alpha_2 = 3,99990101$ $\alpha_3 = 1$

Si noti come aumentando il grado delle equazioni, occorre aumentare P, e ciò porta a coefficienti numerici molto alti potenze del 10^n con $a_n = 20$ e $p = 5$; per $p = 6$ si avrebbe 10^{83} , e non si potrebbe programmare in calcolatori il livello $p = 7$ perché $> 10^{99}$, salvo speciali accorgimenti.

TABELLA per il calcolo dei coefficienti (metodo di Gräffe)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$-a_1^2$	(equazioni di primo grado)						
$(-a_1^2 + 2a_2)$	$+a_2^2$	(equazioni di secondo grado)					
"	$(+a_2^2 - 2a_1a_3)$	$(-a_3^2)$	(equazioni di terzo grado)				
"	$(+a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4)$	$(-a_3^2 + 2a_2a_4)$	$(+a_4^2)$	(equazioni di quarto grado)			
"	"	$(-a_3^2 + 2a_2a_4 - 2a_1a_5)$	$(+a_4^2 - 2a_3a_5)$	$(-a_5^2)$	(equazioni di 5° grado)		
"	"	$(-a_3^2 + 2a_2a_4 - 2a_1a_5 + 2a_6)$	$(+a_4^2 - 2a_3a_5 + 2a_2a_6)$	$(-a_5^2 + 2a_4a_6)$	$(+a_6^2)$	(equaz. 6° grado)	
"	"	"	$(+a_4^2 - 2a_3a_5 + 2a_2a_6 - 2a_1a_7)$	$(-a_5^2 + 2a_4a_6 - 2a_3a_7)$	$(+a_6^2 - 2a_5a_7)$	$(-a_7^2)$	(eq 7°)
"	"	"	$(+a_4^2 - 2a_3a_5 + 2a_2a_6 - 2a_1a_7 + 2a_8)$	$(-a_5^2 + 2a_4a_6 - 2a_3a_7 + 2a_2a_8)$	$(+a_6^2 - 2a_5a_7 + 2a_4a_8)$	$(-a_7^2 + 2a_6a_8)$	$(+a_8^2)$

Notare che la somma degli indici dei singoli prodotti è il doppio dell'indice del coefficiente. Notare che per uno stesso coefficiente, la formula della riga successiva è aumentata o diminuita del doppio prodotto dei coefficienti aventi indice precedente e susseguente quelli dell'ultimo prodotto a segni alterni. (Il coeff. con indice zero vale 1).

Risoluzione grafica di equazioni algebriche

Notiamo che una equazione avente il primo coefficiente unitario, non solo ammette tante radici (reali o immaginarie) quant'è il suo grado, ma dispone di tanti coefficienti (oltre il primo unitario) quant'è "n". Quindi, ad esempio una equazione di 2° grado è definita se si conoscono S e P . Ma la coppia $S; P$ determina un punto nel piano, cioè ad ogni punto del piano, non solo corrisponde una coppia: $S; P$, ma corrisponde a quel punto anche la coppia di radici di quella equazione.

Nella tavola che segue abbiamo posto in ascisse ed in ordinate le radici: x_1 ed x_2 di una generica equazione; ed abbiamo disegnato al loro variare le linee (rette) ad $S = \text{costante}$, e le linee (iperboli equilateri) a $P = \text{costante}$.

Noti: S e P dalla tavola si hanno immediatamente le radici: x_1 ed x_2 .

Nel caso di radici immaginarie la retta S non incontra l'iperbole P .

Provate a dire, a caso, un valore S ed un valore P , il punto d'incontro avrà per coordinate le radici x_1 ed x_2 . (Con l'approssimazione grafica).

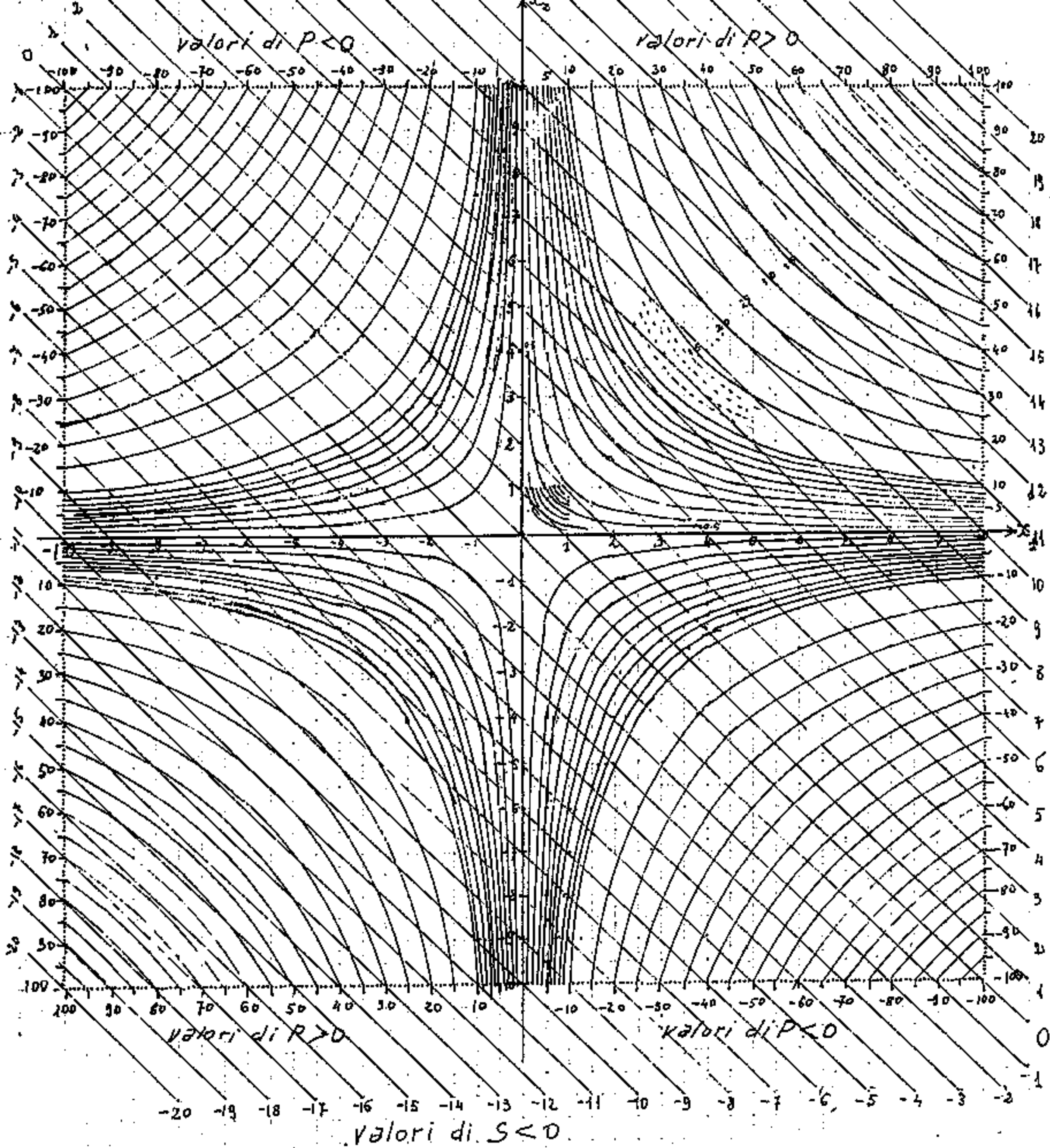


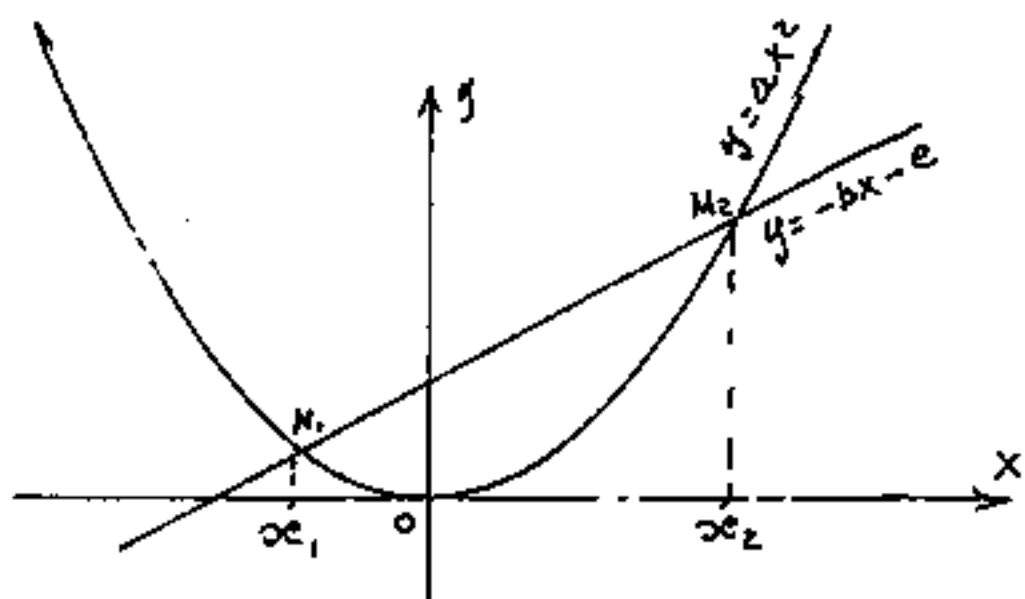
Tavola delle equazioni di 2° grado: $x^2 - Sx + P = 0$

$S =$ somma radici ; $P =$ prodotto radici . (in ascisse e ordinate le radici)

(Se cambiamo scala moltiplicando S per 10, P deve essere moltiplicata per 100)

(Il punto comune alle rette S ed alle iperboli P ha per coordinate le radici)

Le costruzioni grafiche per risolvere un'equazione di 2° grado, sono molteplici, in genere utilizziamo l'intersezione di una parabola con una retta. (come in figura)



Ore costruita una volta per tutte la parabola $y = x^2$ (con $a=1$) la retta $y = -\frac{1}{2}x - \frac{e}{2}$, sarà tracciata di volta in

volta per determinare M_1, M_2 e quindi x_1, x_2 .

Il discorso che abbiamo fatto per le equazioni di 2° grado, potrebbe essere esteso alle equazioni di 3° grado in campo tridimensionale, ma il modellino spaziale non è pratico. Anche scindere l'equazione di 3° grado nella linea, $y = x^3$, (parabola eubica); e nella linea $-Sx^2 + Qx - P = y$ (parabola ad asse verticale) comporta che le ascisse dei punti comuni alle due linee sono le radici dell'equazione di 3° grado.

Non insistiamo ulteriormente su queste costruzioni grafiche, che ciascuno può inventarsi, vogliamo invece trattare delle equazioni risolte per tentativi.

Una espressione del tipo: $f(x) = 0$, può sempre riguardarsi come una equazione in x qualunque sia la funzione.

Risoluzione per tentativi (delle equazioni)

Consideriamo una funzione per la quale sia difficile determinare il campo, o i campi, nei quali $f(x) \geq 0$.

In questi casi si attribuiscono ad x valori arbitrari, per i quali sia facile il calcolo della $f(x)$. Abbiamo già visto, per le equazioni algebriche, come il valore $x=0$, porti facilmente a determinare anche le derivate in $x=0$. Altri valori di x che possono facilitare i calcoli sono $x = \pm 1$ ed, in equazioni algebriche, porre $x = -a^{m-1}$, eliminando così due termini ad esponente più alto.

Quando due diverse x portano ad $f(x)$ di segno opposto vuol dire che intermedia alle due x arbitrarie abbiamo una radice. È opportuno considerare il segno dei coefficienti delle potenze della x , infatti le potenze dispari assumono il segno della x che per il segno del coefficiente, darà il contributo positivo o negativo all'arricchimento della $f(x)$.

In particolare, se, i segni dei coefficienti delle potenze pari, sono tutti negativi, e se

gli altri coefficienti sono tutti positivi, ma $f(x)$ con "n" dispari, avrà almeno una radice per valori di x piccoli in valore assoluto.

Facciamo un esempio:

$$\underline{f(x) = x^7 - 3x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1}$$

Per quanto già detto notiamo:

- 1) $n=7$ dispari; $a_0 = -1$; esiste almeno una radice reale > 0 .
- 2) per $x=0$: $f(x) = -1$; $f'(x) = +1$; $f''(x) = -2$;

cioè sull'asse delle y la linea $f(x)$ in $y=1$ ha una tangente a 45° crescente, ($f'(x)=+1$), ed una curvatura verso il basso. ($f''(x) = -2 < 0$). Ciò implica che per $x > 0$ vi sarà almeno un max ed un min. perché la $f(x)$ e le sue derivate al crescere di x finiscono per diventare: > 0 . ($f''(x) > 0$).

Scriviamo la $f(x)$ nella forma:

$$f(x) = x^6(x-3) + x^4(4x-8) + x^2(3x-1) + (x-1)$$

- 1) Poiché per $x < 0$ tutti gli addendi sono < 0 , per qualunque valore di $x < 0$ non vi sono quindi radici (ovè $f(x) = 0$) ($f(x < 0) < 0$)
- 2) Poiché per $x > 3$ tutti gli addendi sono > 0 , per qualunque valore di $x > 3$ non vi sono quindi radici (ovè $f(x) = 0$) essendo ($f(x > 3) > 0$).
- 3) per $x = 3 \rightarrow f(x) = 3^4(4) + 3^2(8) + 2 = 398 > 0$

$$\text{per } x=2 \rightarrow f(x) = +2^6(-1) + 0 + 2^3(5) + 1 = \underline{-43 < 0}$$

quindi intermedia fra 2 e 3 vi è almeno una radice reale.

$$\text{per } x=1 \rightarrow f(x) = 1^6(-2) + 1^4(-4) + 1^2(2) + 0 = \underline{-4 < 0}$$

Per sapere se fra 0 ed 1 e fra 1 e 2 vi sono coppie di radici reali facciamo le derivate della $f(x)$

$$f'(x) = 7x^6 - 18x^5 + 30x^4 - 32x^3 + 9x^2 - 2x + 1$$

che scriviamo nella forma:

$$f'(x) = x^5(7x-18) + 4x^3(5x-8) + x(9x-2) + 1$$

per $x < 0$; la $f'(x) > 0$ (sempre), cioè non vi sono max o min.

$$\text{per } x=1 \rightarrow f'(x) = (7-18) + 4(5-8) + (9-2) + 1 = \underline{-15 < 0}$$

poiché per $x=0 \rightarrow f'(x) = +1 > 0$ ed $f''(0) < 0$ vi è almeno un max fra $x=0$ ed $x=1$.

$$\text{per } x=2 \rightarrow f'(x) \rightarrow 32(-4) + 32(+2) + 2(16) + 1 = \underline{-33 < 0}$$

fra $x=2$ ed $x=3$ vi è almeno un min.

facciamo ora $f''(x)$.

$$f''(x) = 42x^5 - 90x^4 + 80x^3 - 96x^2 + 18x - 2$$

che scriviamo:

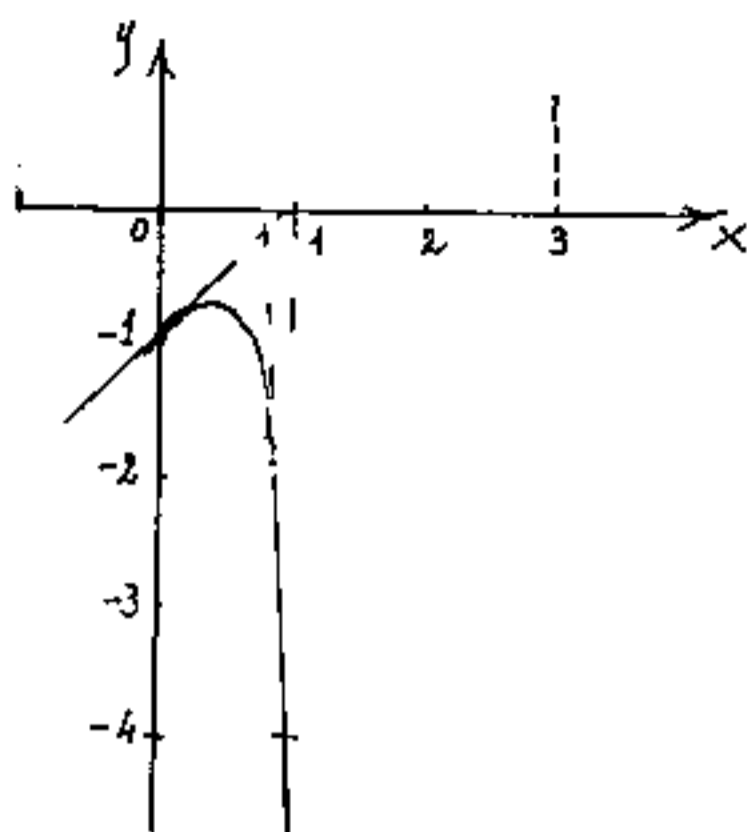
$$6x^4(7x-15) + 16x^2(5x-6) + (18x-2) = f''(x)$$

per $x \leq 0$ $f''(x) < 0$ (sempre) non ammette flessi.

per $x \leq 1$ $f''(x) < 0$ non ammette flessi cioè fra

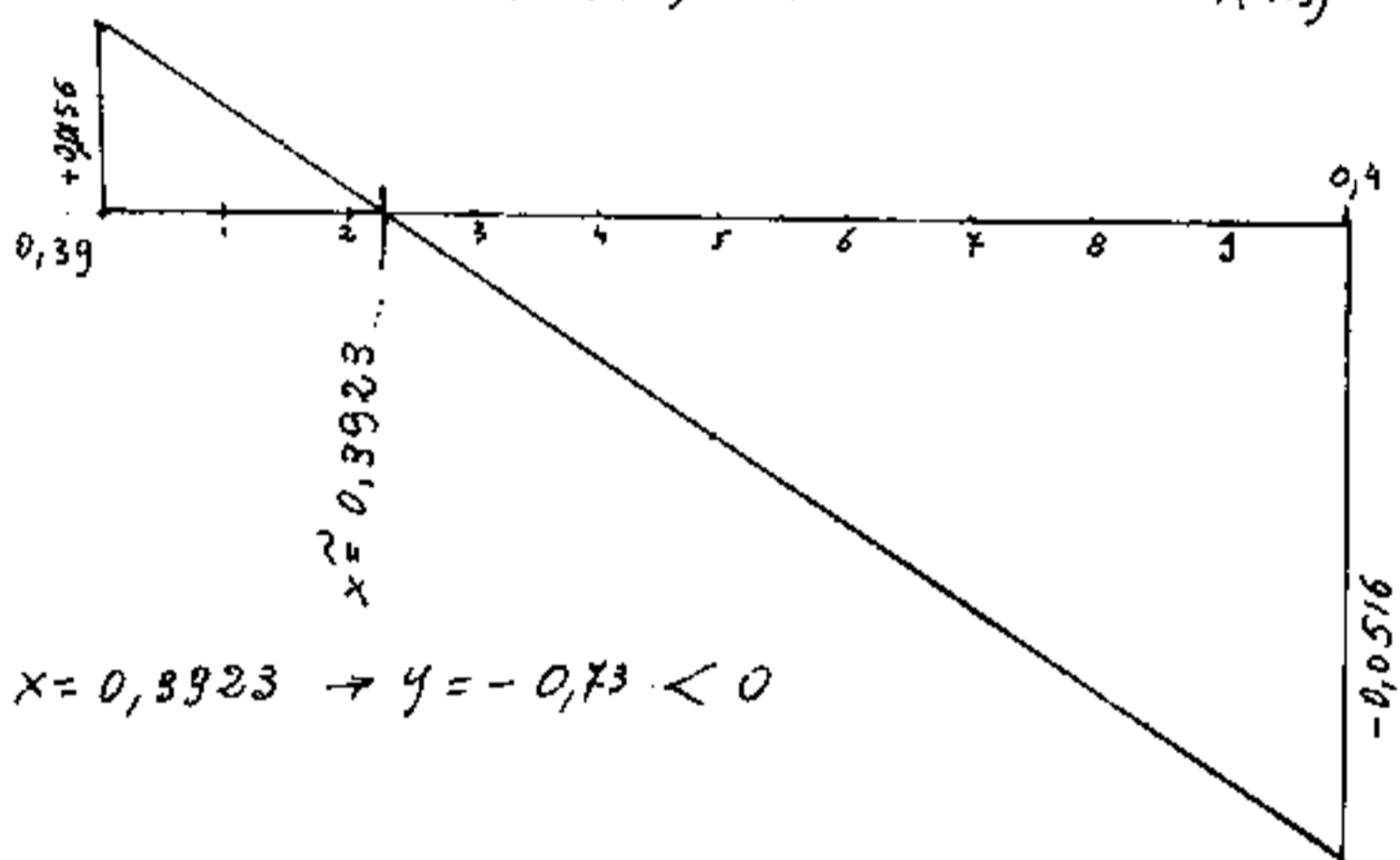
$x=0$ ed $x=1$ vi è un solo max, per de-

cidere che fra 0 ed 1 vi sono due radici reali occorre $f(\text{max}) > 0$



Disegniamo quanto sappiamo per i punti $x=0$ ed $x=1$, notiamo che le tangenti si incontrano in $y < 0$, e se cerchiamo di raccordare le tangenti (adocchio), si trova che il massimo dovrebbe essere

intorno ad $x=0,4$; $f'_{(0,4)} = -0,051648 < 0$ $f'_{(0,39)} = +0,015607848$

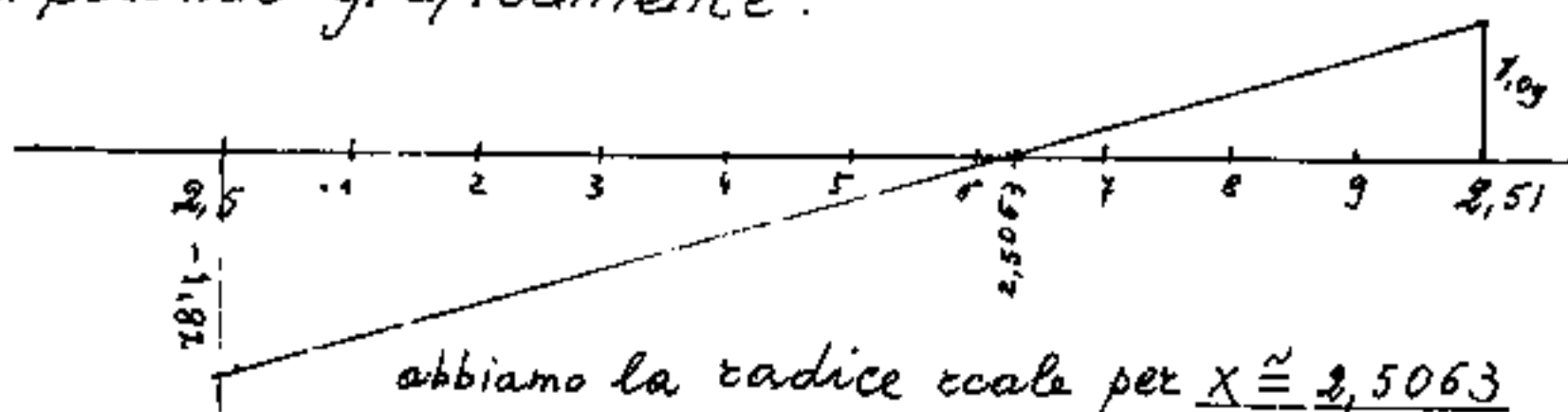


per $x=0,3923 \rightarrow y = -0,73 < 0$

cioè non vi sono radici reali: $0 \leq x \leq 1$

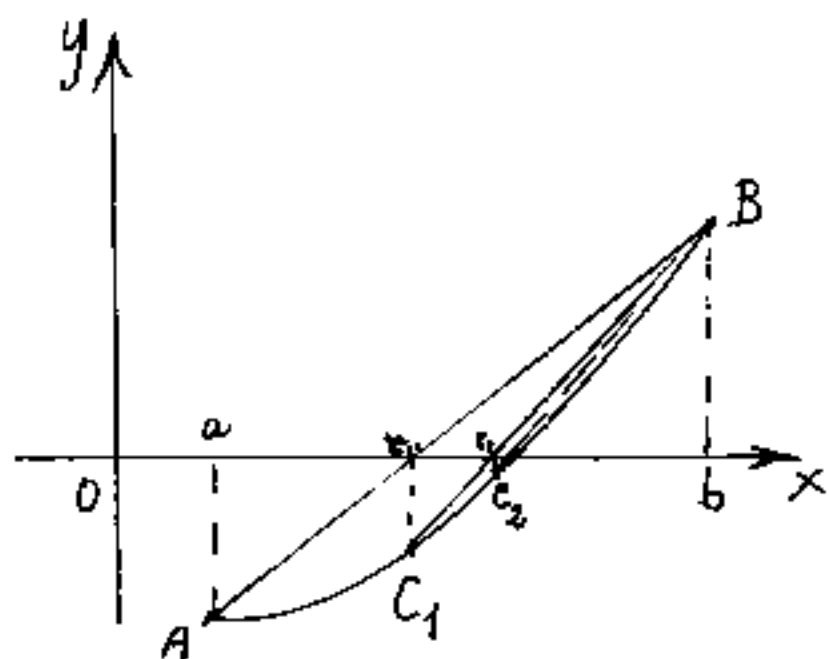
$y'' \approx 0$ per $x \approx 2,12$; ed $y' \approx 0$ cioè min per $x \approx 2,12$; ciò implica che vi è una sola radice reale. Proviamo per $x=2,5$ avremo:

$y = -1,82031$; per $x=2,51 \rightarrow y = +1,090716$
interpolando graficamente:



abbiamo la radice reale per $x \approx 2,5063$

Metodo delle parti proporzionali o metodo delle corde o regola falsi



Trovati, al solito, due punti A e B tali che $f(x_A)$ ed $f(x_B)$ siano di segno opposto e sia: $x_A = a$, $x_B = b$; è facile trovare

la corda \overline{AB} che taglierà in x_{C_1} le ascisse. Calcoliamo $f(x_{C_1})$ e tracciamo la nuova corda $\overline{BC_1}$, che a sua volta taglierà le ascisse in x_{C_2} , -calcoleremo $f(x_{C_2})$ e tracciamo la nuova corda. Continuando il procedimento noteremo che $f(x_{C_i})$ si avvicina sempre più a zero, e fermeremo il procedimento quando l'approssimazione ha raggiunto quella che volevamo.

$$(x_C - x_A) : -f(x_A) = (x_B - x_C) : f(x_B)$$

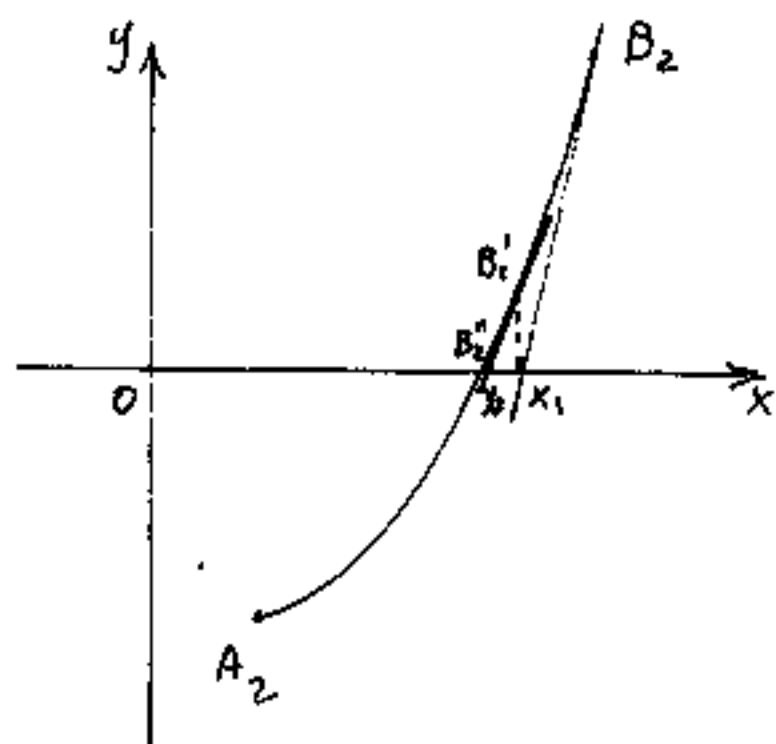
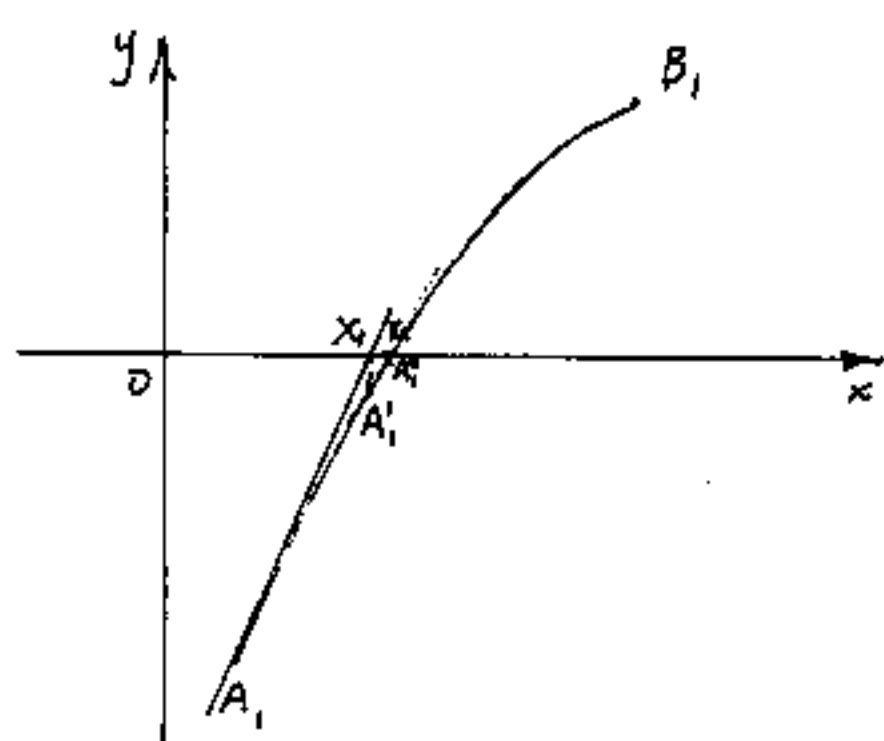
$$x_C f(x_A) - x_B f(x_A) = x_C f(x_B) - x_A f(x_B)$$

$$x_C = \frac{x_A f(x_B) - x_B f(x_A)}{f(x_B) - f(x_A)}$$

Notiamo che se la curvatura della $f(x)$ fosse verso il basso $f(x_B)$ ed $f(x_C)$ avrebbero lo stesso segno per cui la corda sarebbe \overline{CA} da tracciare.

Metodo delle tangenti o di Newton-Fourier

Consideriamo, al solito, $f(x_A)$ ed $f(x_B)$ di segno opposto, (sappiamo che una funzione continua cambia segno passando per zero o per ∞). Supponiamo che in \overline{AB} vi sia una $f(x)=0$ e che nel tratto \overline{AB} siano monotone le derivate prime e seconde, cioè abbiano lo stesso segno e non passino per zero, quindi non vi siano max o min, né flessi.



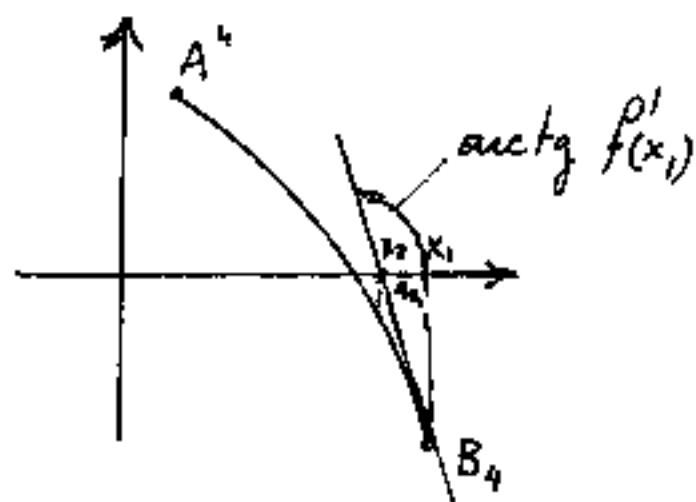
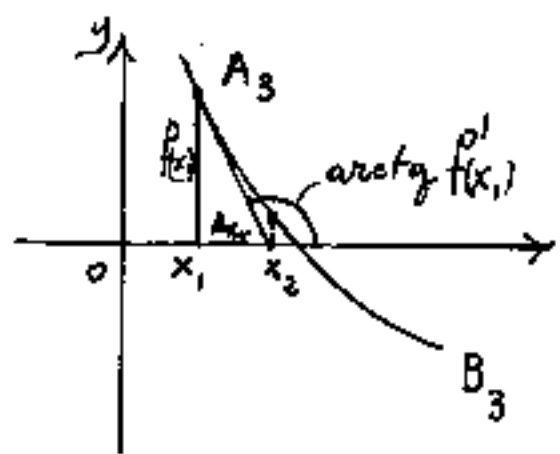
Chiameremo estremo di Fourier l'estremo del tratto AB ove la curva volge la convessità verso le ascisse (nella figura a sinistra è A_1 , nella figura a destra è B_2)

Per A_1 tracciamo la tangente troviamo x_1 e quindi $f(x_1) = \overline{x_1 A_1}$. Per A_1 tracciamo la nuova tangente troviamo x_2 , quindi $f(x_2) = \overline{x_2 A_1}$, ripetendo il procedimento notiamo che oltre un certo x_i le prime cifre rimangono invariate e quindi si può calcolare

$f(x) = 0$ con l'approssimazione desiderata.
 Lo stesso discorso vale per B_2 da cui si traccia la tangente per trovare x_1 e quindi $f(x_1) = \bar{x}_1 B_1'$ e per B_2' la nuova tangente ...

È chiaro che prima di partire dobbiamo sapere qual'è l'estremo di Fourier, partendo dall'altro estremo il procedimento è divergente.

Notiamo che la variazione di ascissa è $\Delta x_1 = f(x_1) / f'(x_1)$, ed è tanto maggiore quanto più piccolo è $f'(x_1)$. ($x_2 = x_1 \pm \Delta x_1$) a seconda che l'estremo di Fourier sia a sinistra o a destra della curva.



Si sono ridisegnate altre due possibilità nella scelta dell'estremo di Fourier per mettere in evidenza il segno di Δx .

Per la programmazione dei computer occorre anche aver presenti questi elementi.

Le curve piane

La rappresentazione delle curve piane richiede una più precisa definizione dei sistemi di riferimento, e della grafica rappresentativa.

Nel II volume abbiamo già accennato ai diagrammi, agli istogrammi, ai diagrammi a torta, ecc.; cioè ai metodi grafici per rendere, in sintesi, l'essenza e l'entità di un fenomeno.

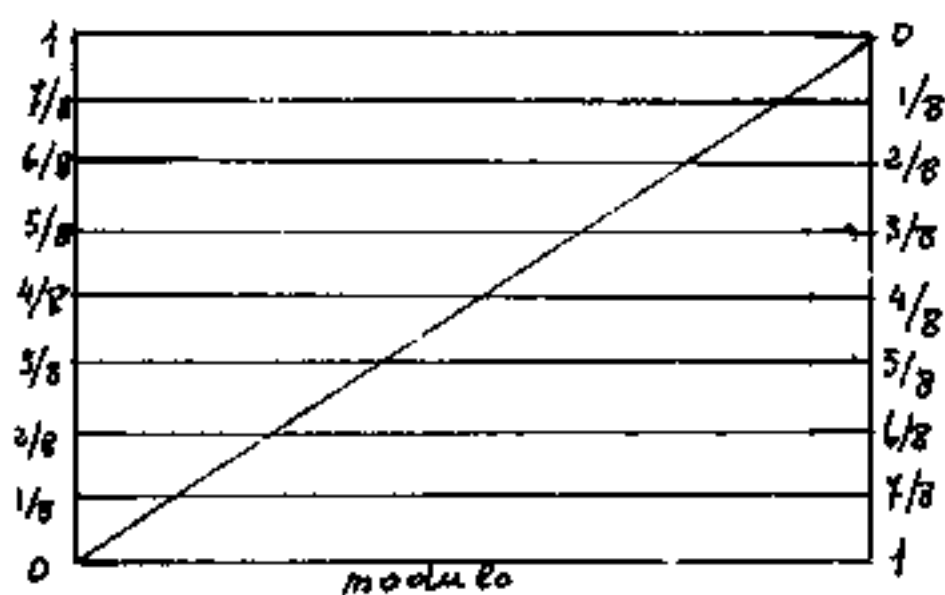
Nel IV volume si sono dati alcuni elementi di geometria descrittiva, si è accennato alle varie proiezioni, cartografiche e cristallografiche.

Abbiamo visto come una $y=f(x)$ è riferita ad un modulo grafico, definito dimensionalmente, abbiamo visto come le parabole (vol II) con opportuna scelta del modulo possono identificarsi.

Stabilito un modulo grafico unitario il cui sfrazionamento non sia riportato in scala, per la grafica sono di grande ausilio le scale ticoniche che permettono qualsiasi sfrazionamento, con grande precisione, e sono valide non solo per lo sfrazionamento decimale, ma per qualsiasi grandezza rappre-

sentata da numeri complessi reali.

Per esempio, se un modulo deve essere diviso in ottavi, si disegna un rettangolo che ha per base il modulo e per altezza otto



segmenti uguali, da ciascuno dei quali si traccia la parallela alla base, e quindi una diagonale frazionerà in

ottavi le parallele.

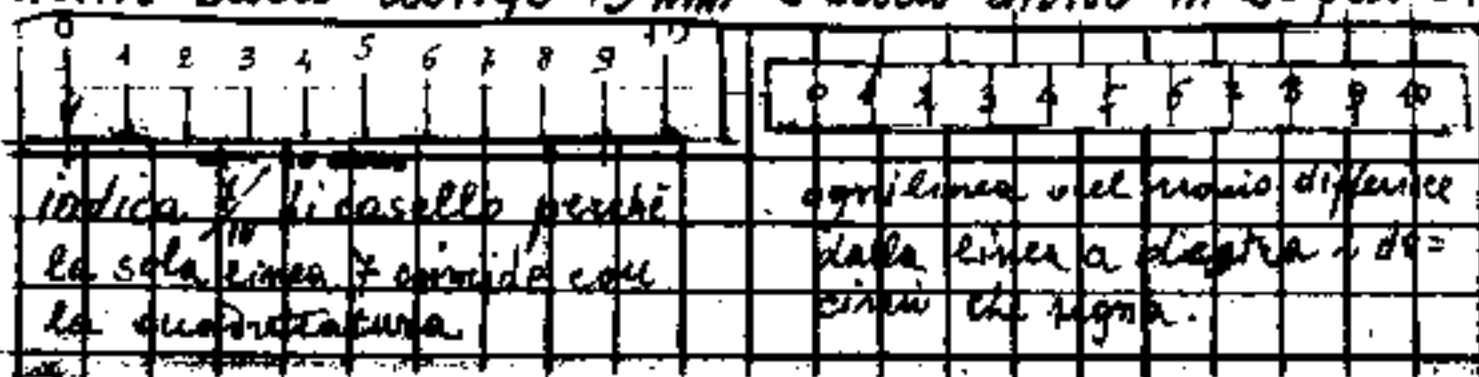
Può anche essere utile aver presenti le operazioni di calcolo grafico esposte nel I Vol.

Infine nelle scale grafiche devono essere evidenziate le dimensioni fisiche cui si riferiscono.

Il nonio (o verniero) è un segmento lungo $(n-1)$ parti diviso in n parti misura $\frac{1}{n}$ di parte.

Per avere $\frac{1}{30}$ di millimetro (per graduazioni in millimetri) il

nonio sarà lungo 19 mm e sarà diviso in 20 parti.

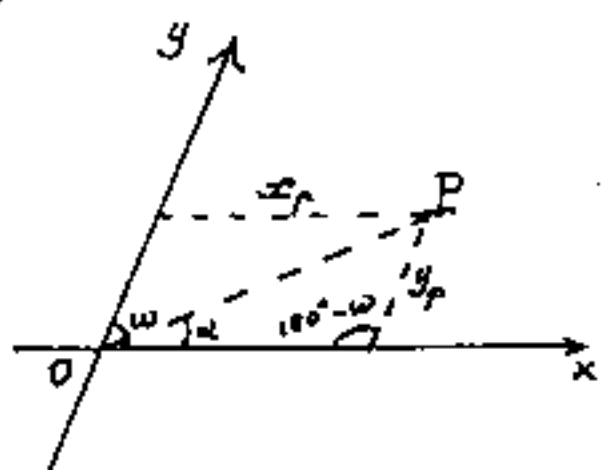


A fianco un nonio per la carta quadrata ($\frac{1}{10}$ di mm)

Sistemi di riferimento ad assi obliqui

Per trattare con maggiore generalità le curve piane, introduciamo alcuni elementi di geometria analitica ad assi non ortogonali; consideriamo cioè gli assi ortogonali, un caso particolare di assi obliqui. Sia " w " l'angolo compreso fra i semiassi positivi della " x " e della " y ". (Per $w = \pi/2$ si ha il sistema ortogonale).

Resta la regola di misurare le coordinate parallelamente agli assi.



Se $x; y$ sono le coordinate di un generico punto P , la sua distanza dall'origine degli assi, per il teorema di Carnot, sarà:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos(180-w)}$$

e cioè: $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos(w)}$

da cui l'equazione di un cerchio al centro, di raggio R sarà: $x^2 + y^2 + 2xy \cos w = R^2$

(questa espressione in coordinate ortogonali risulta un'ellisse solo ruotata (v. vol II) di 135° o 45° per $w < \pi/2$ e con assi variabili con w)

Detto α l'angolo che la direzione \overrightarrow{OP} forma con l'asse delle x (verso positivo), avremo:

$$\text{sen } \alpha: \text{sen}(180-w) = y : \overline{OP}$$

cioè:

$$\sin \alpha = \frac{y \sin w}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos w}}$$

ed anche:

$$\sin \alpha = \frac{\sin w}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 \cos w \left(\frac{x}{y}\right) + 1}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 \cos w \left(\frac{x}{y}\right) + \left(1 - \frac{\sin^2 w}{\sin^2 \alpha}\right) = 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right) = -\cos w \pm \sqrt{\cos^2 w - 1 + \frac{\sin^2 w}{\sin^2 \alpha}}$$

$$\frac{x}{y} = -\cos w \pm \frac{\sin w}{\sin \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

prendiamo il segno (+) della radice:

$$\frac{x}{y} = -\cos w + \sin w / \tan \alpha$$

$$\frac{y}{x} = m = \frac{\tan \alpha}{\sin(w) - \cos w \tan \alpha}$$

(Si noti che, per $w = 90^\circ = \pi/2$ rad, ritornano i valori ad assi ortogonali.)

Quindi l'equazione di una retta in forma esplicita può scriversi: $y = mx + q$ ove il coefficiente angolare $m = \frac{\tan \alpha}{\sin(w) - \cos w \tan \alpha}$; ed il coefficiente di traslazione lineare q è misurato parallelamente alla direzione dell'asse y .

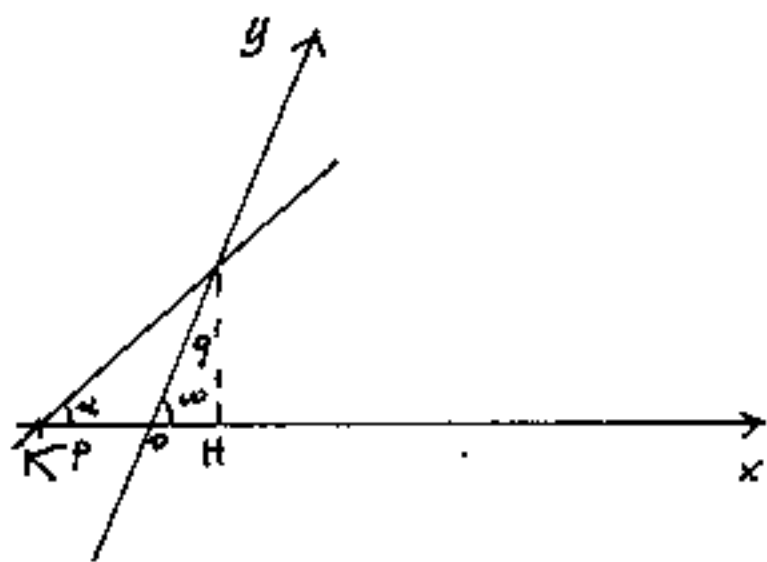
Se dividiamo per q l'espressione esplicita della retta e portiamo nel primo membro mx , si ha:

$$-\frac{m}{q}x + \frac{y}{q} = 1$$

cioè ponendo $-\frac{q}{m} = p$ abbiamo:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

che è l'equazione segmentaria della retta ove q e p sono i segmenti staccati sugli assi dalla retta stessa. (Cioè l'identico significato che in assi ortogonali).
(per dimostrarlo basta pensare $x=0$ oppure $y=0$)

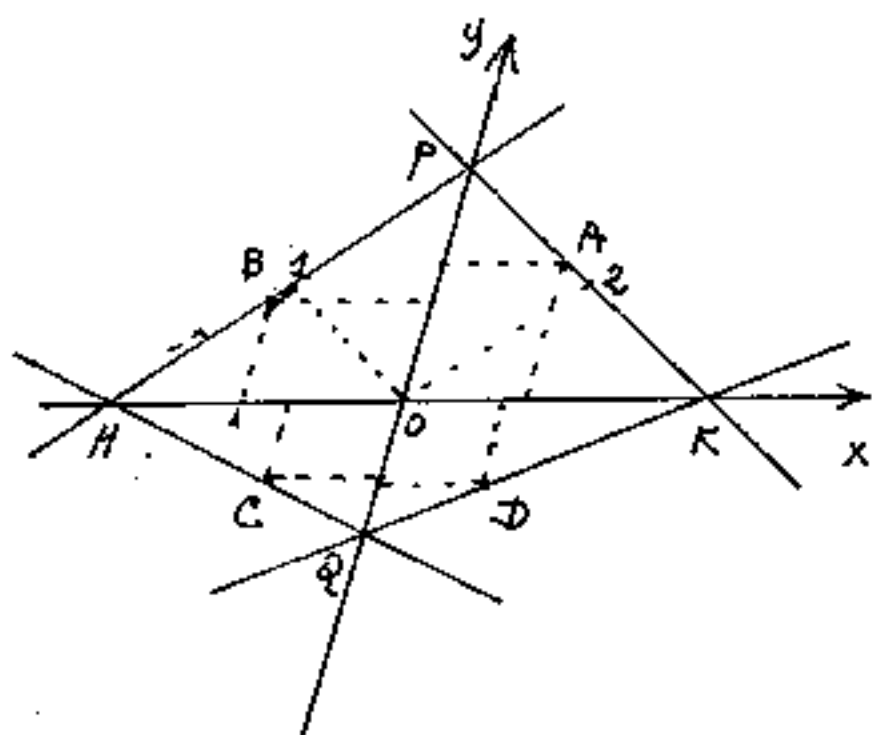


Per vedere che: $p = -q/m$

cioè:
$$p = q \frac{\cos \omega \tan \alpha - \sin \omega}{\tan \alpha}$$

$$p = q \cos \omega - \frac{q \sin \omega}{\tan \alpha}$$

$$p = \overline{OH} - \overline{KH}$$



Utilizziamo la formula per un problema che ci servirà in statica.

Date le coordinate di quattro punti A, B, C, D esistenti uno per quadrante trovare i punti P, Q, H, K

che siano sugli assi e siano vertici di un quadrilatero i cui lati passano per A, B, C, D.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_A}{OK} + \frac{y_A}{OP} &= 1 \\ \frac{x_B}{OH} + \frac{y_B}{OP} &= 1 \\ \frac{x_C}{OH} + \frac{y_C}{OQ} &= 1 \\ \frac{x_D}{OK} + \frac{y_D}{OQ} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{abbiamo un sistema di quattro} \\ &\text{equazioni nelle quattro incogni-} \\ &\text{te: } \overline{OK}; \overline{OP}; \overline{OH}; \overline{OQ} \\ &\text{considerando } z_1; z_2; z_3; z_4 \\ &\text{gli inversi delle incognite, con} \\ &\text{Cramer, avremo:} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 0 & 0 \\ 0 & y_B & x_B & 0 \\ 0 & 0 & x_C & y_C \\ x_D & 0 & 0 & y_D \end{vmatrix} = x_A \begin{vmatrix} y_B & x_B & 0 \\ 0 & x_C & y_C \\ 0 & 0 & y_D \end{vmatrix} - y_A \begin{vmatrix} 0 & x_B & 0 \\ 0 & x_C & y_C \\ x_D & 0 & y_D \end{vmatrix} = (x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_A & 0 & 0 \\ 1 & y_B & x_B & 0 \\ 1 & 0 & x_C & y_C \\ 1 & 0 & 0 & y_D \end{vmatrix} = (y_B x_C y_D - y_A \begin{vmatrix} 1 & x_B & 0 \\ 1 & x_C & y_C \\ 1 & 0 & y_D \end{vmatrix}) = (y_B x_C y_D - y_A x_C y_D + y_A x_B (y_D - y_C)) = y_A x_B (y_D - y_C) + x_C y_D (y_B - y_A)$$

$$\begin{vmatrix} x_A & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B & 0 \\ 0 & 1 & x_C & y_C \\ x_D & 1 & 0 & y_D \end{vmatrix} = x_A \begin{vmatrix} 1 & x_B & 0 \\ 1 & x_C & y_C \\ 1 & 0 & y_D \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & x_B & 0 \\ 0 & x_C & y_C \\ x_D & 0 & y_D \end{vmatrix} = (x_A x_C y_D - x_A x_B (y_D - y_C) - x_B y_C x_D) = x_A y_D (x_C - x_B) + x_B y_C (x_A - x_D)$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 & 0 \\ 0 & y_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_C \\ x_D & 0 & 1 & y_D \end{vmatrix} = x_A y_B (y_D - y_C) - x_D \begin{vmatrix} y_A & 1 & 0 \\ y_B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y_C \end{vmatrix} = (x_A y_B (y_D - y_C) + y_C x_D (y_B - y_A))$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 0 & 1 \\ 0 & y_B & x_B & 1 \\ 0 & 0 & x_C & 1 \\ x_D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B x_C - y_A \begin{vmatrix} 0 & x_B & 1 \\ 0 & x_C & 1 \\ x_D & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & y_B & x_B \\ 0 & 0 & x_C \\ x_D & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x_A y_B x_C - y_A x_D (x_B - x_C) - x_D y_B x_C) = y_A x_D (x_C - x_B) + y_B x_C (x_A - x_D)$$

Quindi le nostre incognite: sono indipendenti da w ,

$$\overline{OK} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{y_A x_B (y_D - y_C) + x_C y_D (y_B - y_A)}$$

$$\overline{OP} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{x_A y_D (x_C - x_B) + x_B y_C (x_A - x_D)}$$

$$\overline{OH} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{x_A y_B (y_D - y_C) + y_C x_D (y_B - y_A)}$$

$$\overline{OQ} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{y_A x_D (x_C - x_B) + y_B x_C (x_A - x_D)}$$

hanno tutte lo stesso numeratore, differenza di coordinate alterne, consentono di scrivere le equazioni delle rette per A, B, C, D,

in forma esplicita:

$$A) \quad y = -\frac{\overline{OP}}{\overline{OK}} x + \overline{OP}$$

$$B) \quad y = -\frac{\overline{OP}}{\overline{OH}} x + \overline{OP}$$

$$C) \quad y = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OH}} x + \overline{OQ}$$

$$D) \quad y = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OK}} x + \overline{OQ}$$

Se tracciamo la parallela passante per l'origine alla retta passante per A e cerchiamo il punto 1 d'incontro con la retta passante per B, abbiamo:

$$-\frac{\overline{OP}}{\overline{OK}} x = -\frac{\overline{OP}}{\overline{OH}} x + \overline{OP}$$

da cui: $x_1 = \frac{\overline{OH} \cdot \overline{OK}}{\overline{OK} - \overline{OH}}$; $y_1 = \frac{-\overline{OP} \overline{OH}}{\overline{OK} - \overline{OH}}$

analogamente il punto 2 comune alla retta per A ed alla parallela per l'origine della retta per B.

$$x_2 = -\frac{\overline{OH} \cdot \overline{OK}}{\overline{OK} - \overline{OH}} ; y_2 = \frac{\overline{OP} \overline{OK}}{\overline{OK} - \overline{OH}}$$

abbiamo così le coordinate del parallelogramma:

(O1P2) di cui \overline{OP} è diagonale. ed $(x_1 = x_2$ componenti secondo x dei lati ove $y_1 + y_2 = \overline{OP}$.

Condizione di Parallelismo

Vale anche ad assi inclinati la condizione che: "due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare

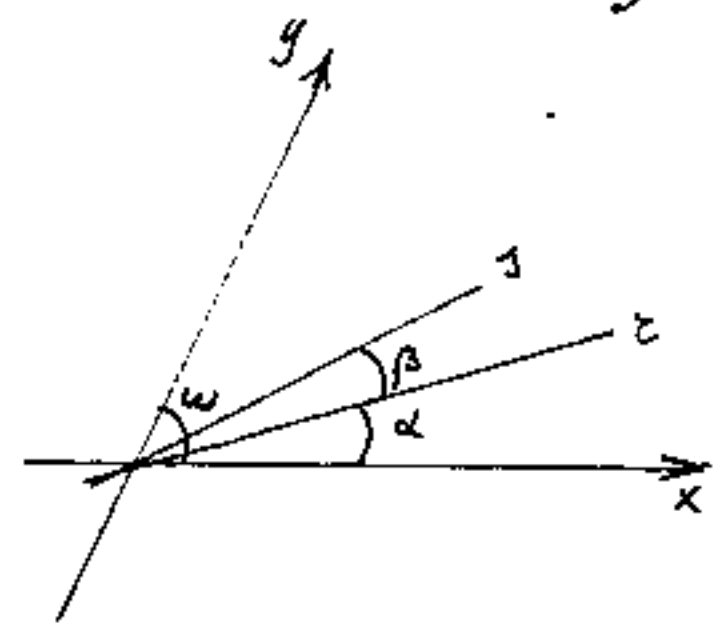
$$m = \frac{\tan(\alpha)}{\sin(\omega) - \cos(\omega)\tan(\alpha)}$$

ove: $\omega =$ angolo

fra i semiassi positivi, $\alpha =$ angolo fra la retta ed il semiasse positivo della x .

Il coefficiente angolare dipende dall'angolo ω degli assi.

Angolo fra due rette



Consideriamo due rette per l'origine degli assi e sia β l'angolo da esse formato, se la retta r forma l'angolo α con l'asse x , la retta s , forma

l'angolo $(\alpha + \beta)$ con lo stesso asse x .

Dai rispettivi coefficienti angolari abbiamo:

$$\tan(\alpha) = \frac{m_r \sin \omega}{1 + m_r \cos \omega}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{m_s \sin \omega}{1 + m_s \cos \omega}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha = \tan \beta [1 + \tan \alpha \tan(\alpha + \beta)]$$

$$\tan \beta = \frac{\frac{m_s \tan \omega}{1 + m_s \cos \omega} - \frac{m_c \tan \omega}{1 + m_c \cos \omega}}{1 + \frac{m_s \tan \omega}{1 + m_s \cos \omega} \cdot \frac{m_c \tan \omega}{1 + m_c \cos \omega}}$$

$$\tan \beta = \frac{(m_s - m_c) \tan \omega}{1 + (m_s + m_c) \cos \omega + m_s m_c}$$

ove per $\omega = \pi/2$ $m_s = \tan(\alpha + \beta)$; $m_c = \tan \alpha$, torna: $\tan \beta = \tan[(\alpha + \beta) - \alpha]$.

Ad assi obliqui, oltre alla condizione di perpendicolarità c'è la condizione che le rette formino lo stesso angolo degli assi

cioè: $\beta = \omega$: avremo: sostituendo $\tan \beta = \frac{\tan \omega}{\cos \omega}$

$$\frac{1}{\cos \omega} = \frac{m_s - m_c}{1 + (m_s + m_c) \cos \omega + m_s m_c}$$

$$1 + m_s \cos \omega + m_c \cos \omega + m_s = m_s \cos \omega - m_c \cos \omega$$

(condizione di angolo $\beta = \omega$):

$$m_s = \frac{-1 - 2m_c \cos \omega}{m_c} = m_s = \frac{-1}{m_c} - 2 \cos \omega$$

ove per $\omega = \pi/2$ torna la condizione di perpendicolarità ad assi ortogonali: $m_s = \frac{1}{m_c}$

Condizione di perpendicolarità

Si ha quando $\beta = \frac{\pi}{2}$ cioè $\tan \beta = \infty$

cioè:

$$1 + (m_1 + m_2) \cos \omega + m_1 m_2 = 0$$

$$m_1 (\cos \omega + m_2) = -1 - m_2 \cos \omega$$

$$m_1 = \frac{(-1 - m_2 \cos \omega)}{(m_2 + \cos \omega)} \quad (\text{condizione di perpendicolarità})$$

anche qui per $\omega = \frac{\pi}{2}$ torna: $m_1 = \frac{1}{m_2}$.

L'equazione della stella di rette passanti per un punto sarà:

$$\frac{y - y_p}{x - x_p} = \frac{\tan(\varphi)}{\sin(\omega) - \cos(\omega) \tan(\varphi)}$$

ovvero ad ogni angolo φ corrisponde una retta.

L'equazione della retta passante per due punti è identica a quella ad essi ortogonali:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ed è indipendente da ω

Equazione della retta passante per P
e perpendicolare alla r.

$$\frac{y - y_p}{x - x_p} = \frac{-(1 + m_r \cos \omega)}{(m_r + \cos \omega)}$$

Distanza di due punti (con Carnot)

$$\overline{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + 2 \cos(\omega)(y_B - y_A)(x_B - x_A)}$$

Coordinate del punto comune alla retta r ed
alla sua perpendicolare passante per P

$$\begin{cases} y = m_r x + q \\ y = \frac{-(1 + m_r \cos \omega)}{(m_r + \cos \omega)} x + y_p + x_p \frac{(1 + m_r \cos \omega)}{(m_r + \cos \omega)} \end{cases}$$

$$\frac{(m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1)x}{(m_r + \cos \omega)} = \frac{(m_r + \cos \omega)(y_p - q) + (1 + m_r \cos \omega)x_p}{(m_r + \cos \omega)}$$

$$x_c = \frac{[(m_r + \cos \omega)(y_p - q) + (1 + m_r \cos \omega)x_p]}{(m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1)}$$

$$\frac{(m_r^2 + m_r \cos \omega)(y_p - q) + (m_r + m_r^2 \cos \omega)x_p + (m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1)q}{m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1}$$

$$y_c = \frac{(m_r^2 + m_r \cos \omega)y_p + (m_r + m_r^2 \cos \omega)x_p + (m_r \cos \omega + 1)q}{(m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1)}$$

Distanza di un punto P da una retta r

Se C è il punto comune alla retta r ed alla sua normale per P, $\overline{PC} = d$ è la distanza cercata.

$$\overline{PC} = \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + 2(x_c - x_p)(y_c - y_p) \cos \omega}$$

$$(x_c - x_p) = \frac{(m_r + \cos \omega)(y_p - m_r x_p - q)}{(m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1)}$$

$$(y_c - y_p) = (x_c - x_p) \left(\frac{-1 - m_r \cos \omega}{m_r + \cos \omega} \right)$$

$$\overline{PC} = (x_c - x_p) \sqrt{1 + \left(\frac{-1 - m_r \cos \omega}{m_r + \cos \omega} \right)^2 + 2 \cos \omega \left(\frac{-1 - m_r \cos \omega}{m_r + \cos \omega} \right)}$$

$$\overline{PC} = \frac{(x_c - x_p)}{(m_r + \cos \omega)} \sqrt{m_r^2 + 2m_r \cos \omega + \cos^2 \omega + 1 - m_r^2 \cos^2 \omega - 2m_r \cos^3 \omega - m_r \cos \omega - 2 \cos^2 \omega + m_r \cos \omega}$$

$$\overline{PC} = \frac{x_c - x_p}{(m_r + \cos \omega)} \sqrt{(m_r^2 + 1) \sin^2 \omega + 2m_r (\cos \omega - \cos^3 \omega)}$$

$$\overline{PC} = \frac{x_c - x_p}{(m_r + \cos \omega)} \sin \omega \sqrt{m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1}$$

$$\overline{PC} = \frac{[y_p - m_r x_p - q] \cdot \sin \omega}{\sqrt{m_r^2 + 2m_r \cos \omega + 1}}$$

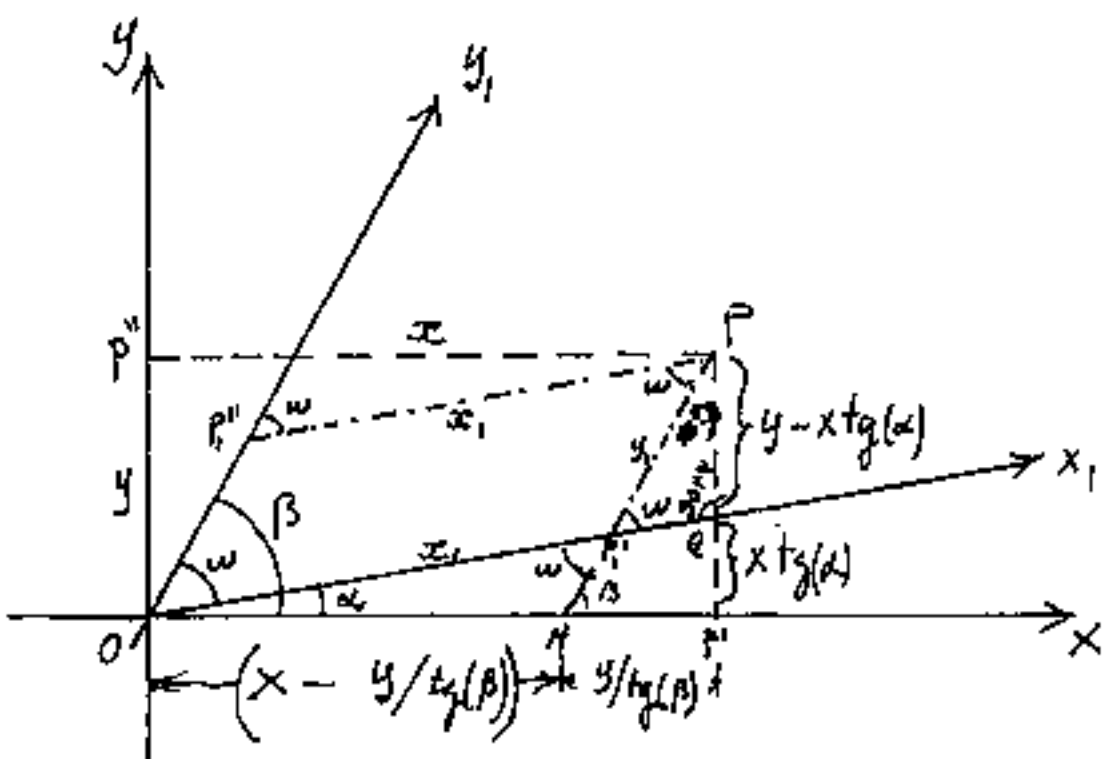
Per $\omega = \pi/2$ torna la distanza in coordinate

ortogonali ($m = \tan \alpha$); $\sqrt{m_r^2 + 1} = \frac{1}{\cos \alpha}$; $\overline{CP} = |(y_p - q) \cos \alpha - x_p \sin \alpha|$

$$\overline{CP} = |(y_p - q) \cos \alpha - x_p \sin \alpha|$$

Cambiamento di assi da ortogonali ad obliqui (e viceversa)

Siano x ed y gli assi ortogonali, e siano x_1, y_1 gli assi obliqui formanti rispettivamente gli angoli α e β con l'asse x , cosicchè, l'angolo compreso fra x_1 ed y_1 sarà: $\omega = \alpha - \beta$.



Indichiamo con P' e P'' le proiezioni di P sugli assi x ed y e con P_1, P_2 le proiezioni parallele agli assi obliqui su x_1 ed y_1 . Cioè: $\overline{PP'} = y$
 $\overline{PP''} = x$; $\overline{PP_1} = y_1$; $\overline{PP_2} = x_1$.

Dal triangolo PP_1Q abbiamo: (per il teorema dei seni)

$$\frac{y_1}{\text{sen}(90^\circ + \alpha)} = \frac{y - x \tan \alpha}{\text{sen}(\omega)} \quad (\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha)$$

$$\boxed{y_1 = \frac{y \cos \alpha - x \text{sen} \alpha}{\text{sen}(\beta - \alpha)}}$$

Dal triangolo OP_1H abbiamo

$$\frac{x_1}{\text{sen}(180^\circ - \beta)} = \frac{x - y / \tan(\beta)}{\text{sen}(\omega)} \quad \text{sen}(180^\circ - \beta) = \text{sen} \beta$$

$$\boxed{x_1 = \frac{x \text{sen} \beta - y \cos \beta}{\text{sen}(\beta - \alpha)}}$$

Formule che consentono note le coordinate x ed y di trovare le coordinate x_1 ed y_1 rispetto ad assi obliqui di posizione nota.

Le derivate ad assi obliqui

Qualora si abbia una: $f(x, y) = 0$ e si sia trasformata, riferendo la stessa funzione ad assi obliqui, cioè si abbia una: $f_1(x_1, y_1)$; e volessimo il differenziale della funzione; nel caso di assi ortogonali abbiamo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

col noto significato delle derivate parziali.

Se consideriamo che la funzione in x, y diventa una funzione ad assi obliqui ove:

$$x = (x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta)$$

$$y = (x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \beta)$$

facendo la derivata parziale rispetto ad x_1 , abbiamo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_1' \cos \alpha + x_1' \sin \alpha$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = y_1' \cos \beta + y_1' \sin \beta$$

che possiamo anche scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \beta \end{cases}$$

analogamente le derivate seconde:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \beta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \beta \cos \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \beta \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \alpha \cos \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

Inversamente se abbiamo un sistema di assi obliqui: x_1, y_1 ; di angolo w e vogliamo trasformare le coordinate oblique x, y , in cartesiane ortogonali equogire, sapendo che l'assi x_1 risulta ruotato di α rispetto ad x ; e che y_1 risulta ruotato di $(\alpha + w) = \beta$ rispetto allo stesso asse x . (da assumersi come asse polare se volessimo le coordinate polari)

Dalle equazioni scritte abbiamo:

$$\begin{array}{rcl} x & y & \text{sen } w \\ \text{sen } \beta & -\text{cos } \beta & = x_1 \\ -\text{sen } \alpha & +\text{cos } \alpha & = y_1 \end{array} \quad (\text{sen } \beta \text{cos } \alpha - \text{cos } \beta \text{sen } \alpha) = \text{sen}(\beta - \alpha) = \underline{\text{sen}(w)}$$

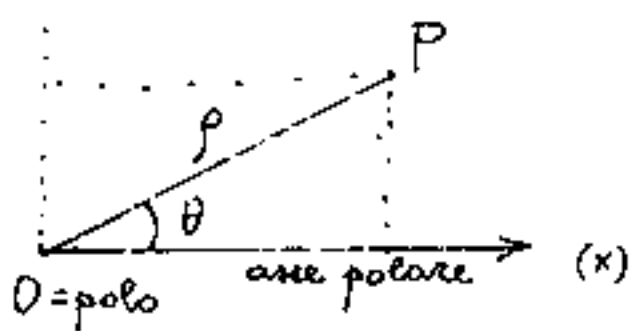
$$\text{sen } w \begin{vmatrix} x_1 & -\text{cos } \beta \\ y_1 & +\text{cos } \alpha \end{vmatrix} = \text{sen}(w) [x_1 \text{cos } \alpha + y_1 \text{cos } \beta] \quad \boxed{X = (x_1 \text{cos } \alpha + y_1 \text{cos } \beta)}$$

$$\text{sen } w \begin{vmatrix} \text{sen } \beta & x_1 \\ -\text{sen } \alpha & y_1 \end{vmatrix} = \text{sen } w [x_1 \text{sen } \alpha + y_1 \text{sen } \beta] \quad \boxed{Y = (x_1 \text{sen } \alpha + y_1 \text{sen } \beta)}$$

L'equazione di una retta in cartesiane ortogonali: $y = mx + q$ ad assi obliqui diventa: $(x_1 \text{sen } \alpha + y_1 \text{sen } \beta) = m(x_1 \text{cos } \alpha + y_1 \text{cos } \beta) + q$
da cui: $\boxed{x_1 (\text{sen } \alpha - m \text{cos } \alpha) + y_1 (\text{sen } \beta - m \text{cos } \beta) = q}$ ecc.

Coordinate polari piane

Ricordiamo che, fissato un punto "0" detto polo ed una direzione orientata uscente da "0", è possibile definire la posizione di ciascun punto del piano indicando la sua distanza da "0"; $\overline{OP} = \rho =$ raggio-vettore (modulo), e l'angolo θ , che il raggio: $\overline{OP} = \rho$ forma con la direzione orientata. $\theta =$ anomalia o argomento.



ρ e θ sono le coordinate polari del punto

La direzione orientata detta: asse polare, usualmente si fa coincidere con l'asse x delle coordinate cartesiane, da cui le famose formule di trasformazione:

$$\boxed{x = \rho \cos \theta} \quad ; \quad \boxed{y = \rho \sin \theta}$$

Ve' una notevole caratteristica delle coordinate polari piane in confronto alle coordinate cartesiane, infatti mentre in cartesiano il piano x,y è unico, in coordinate polari possiamo pensare infiniti piani xy sovrapposti perfettamente distinguibili per l'aumento di $(2\pi)n$ dell'anomalia θ ; ad ogni giro è come fosse un nuovo piano.

ciò implica che le correlazioni fra ρ e θ non sono strettamente biunivoche infatti mentre per ogni valore di θ si ha uno ed un solo ρ , per ogni valore di ρ si hanno infiniti θ espressi dalla formula: $(\theta + k(2\pi))$ già nota in trigonometria.

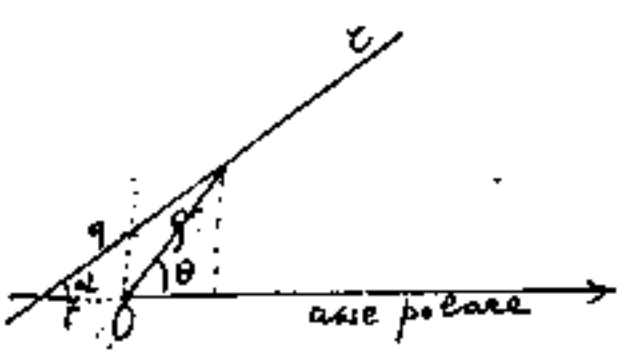
Per ciò si usa scrivere: $\rho = f(\theta)$

e non inversamente.

Avremo quindi che: $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho''$$

ecc.



l'equazione di una retta che formi l'angolo α con l'asse polare può esprimersi:

(se passa per l'origine) $\tan \alpha = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta$

se è spostata (di q in y ; di p in x) $\frac{\rho \cos \theta}{p} + \frac{\rho \sin \theta}{q} = 1$

equazione segmentaria in polari della retta:

ovv: $(1 - \frac{\rho \sin \theta}{q}) = \frac{\rho \cos \theta}{p}$ $\frac{1}{p} = \frac{1 - \frac{\rho \sin \theta}{q}}{\rho \cos \theta}$

$$\frac{1}{p} = \frac{q - \rho \sin \theta}{\rho q \cos \theta} \quad \rho = \frac{\rho q \cos \theta}{q - \rho \sin \theta}; \quad \tan \alpha = -\frac{q}{p} = \frac{\tan \theta = \frac{-q + \rho \sin \theta}{\rho \cos \theta}}$$

ciò consente di trasformare le equazioni delle rette da cartesiane a polari e viceversa.

Tangente, normale, sottotangente, sottonormale polari.

TANGENTE e NORMALE

Ricordiamo che: se la curva è espressa in equazioni parametriche : $x = x(t)$; $y = y(t)$

l'equazione della retta tangente nel punto T è:

$$\boxed{\frac{x - x_T}{x'_T} = \frac{y - y_T}{y'_T}}$$

l'equazione della normale da T è:

$$\boxed{(x - x_T)x'_T + (y - y_T)y'_T = 0}$$

Se la curva è espressa in forma esplicita:

$$\underline{y = f(x)}$$

l'equazione della retta tangente nel punto T è:

$$\boxed{y = y'_T(x) + (y_T - y'_T x_T)}$$

l'equazione della retta normale da T è:

$$\boxed{(x - x_T) + y'_T(y - y_T) = 0}$$

che può scriversi:

$$\boxed{y = \left(-\frac{1}{y'_T}\right)(x) + \left(y_T + \frac{1}{y'_T}x_T\right)}$$

Se la curva è espressa in forma implicita

$$\underline{f(x, y) = 0}$$

ed il punto T non è un punto singolare

(ricordando che: dicesi punto singolare di una curva

quei punti ove si verifica che: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si=

multaneamente).

L'equazione della retta tangente nel punto T (T non è un punto singolare) \bar{e} :

$$\frac{\partial F}{\partial x_T} (x - x_T) + \frac{\partial F}{\partial y_T} (y - y_T) = 0$$

L'equazione della retta normale da T (T non è un punto singolare) \bar{e} :

$$\left(\frac{x - x_T}{y - y_T} \right) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_T}}{\frac{\partial F}{\partial y_T}}$$

Se consideriamo crescente l'arco s della curva al crescere del parametro, possiamo orientare la retta τ tangente alla curva i cui coseni direzionali saranno:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{x}\tau) &= \frac{dx}{ds} \\ \cos(\hat{y}\tau) &= \frac{dy}{ds} \end{aligned}$$

Analogamente per la retta n normale alla curva, dovendo come verso la n essere congruente con la τ , cioè come: $\vec{y} = \vec{x} + \frac{\pi}{2}$ almeno che $\hat{x}n = \hat{x}\tau + \hat{\tau}n$

ma: $\hat{\tau}n = \frac{\pi}{2}$, per cui $\hat{x}n = \hat{x}\tau + \frac{\pi}{2}$; ($\hat{y}n = \hat{x}\tau$).

perciò:

$$\begin{aligned} \cos \hat{x}n &= -\frac{dy}{ds} \\ \cos \hat{y}n &= \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

ove: $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ cioè: $s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Se la curva è espressa in coordinate polari

$\rho = \rho(\theta)$, ricordiamo

che:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

differenziando:

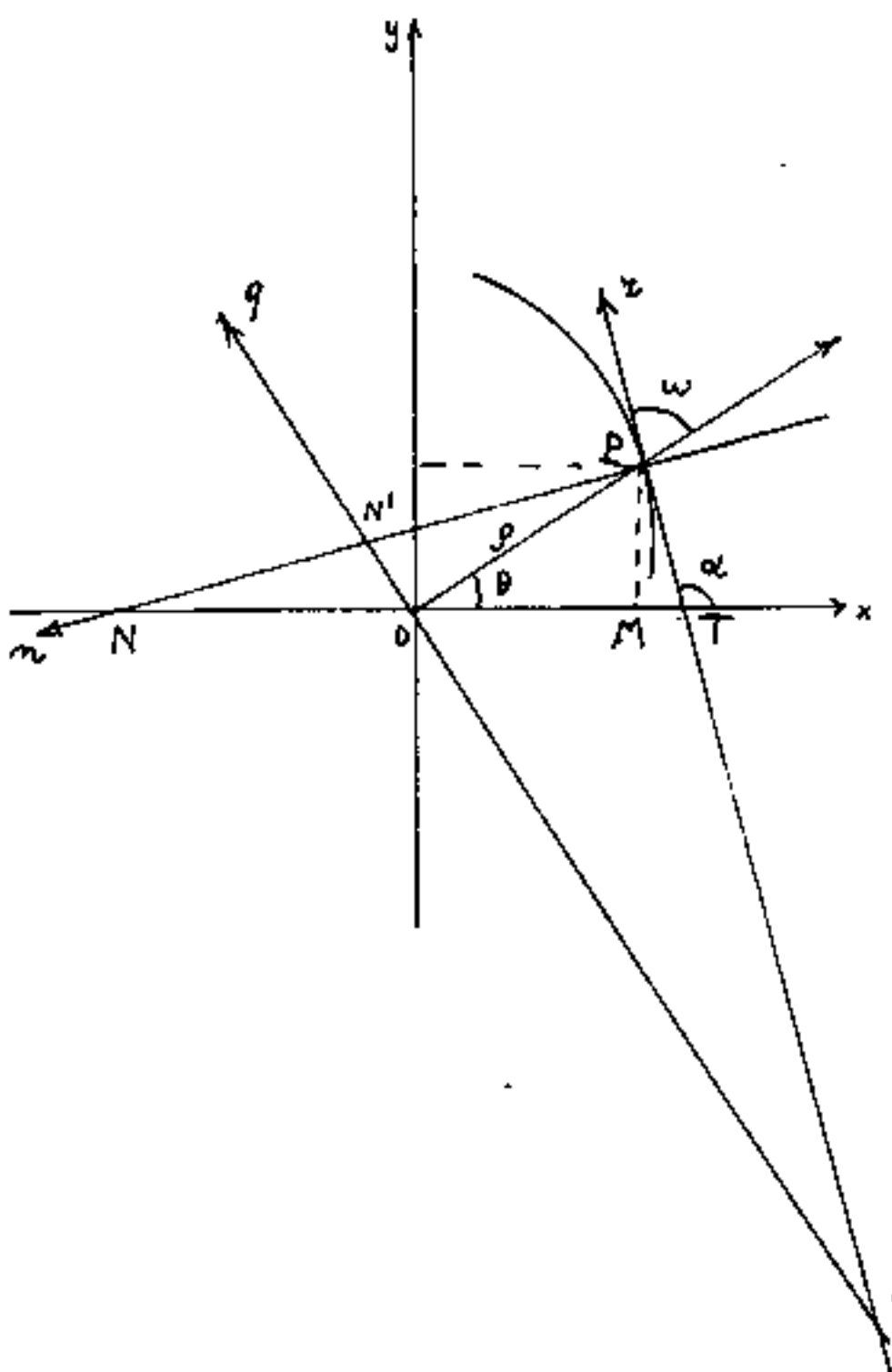
$$dx = -\rho \sin \theta d\theta + \rho' \cos \theta d\theta$$

$$dy = \rho \cos \theta d\theta + \rho' \sin \theta d\theta$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \sin \theta \cos \theta + 2\rho\rho' \cos \theta \sin \theta)$$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$



ricordiamo anche che una retta: $y = mx + q$

in coordinate polari diventa: $\rho = \frac{q}{\sin \theta - m \cos \theta}$

una retta passante per un punto P che in cartesiane si esprime: $\frac{y - y_p}{x - x_p} = m$, in coordinate

polari diventa: $\frac{\rho \sin \theta - \rho_p \sin \theta_p}{\rho \cos \theta - \rho_p \cos \theta_p} = \tan \theta_p = \frac{\sin \theta_p}{\cos \theta_p}$

Teoremi direttori della tangente: $\frac{dx}{ds} = \frac{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$$

e per la normale: $\cos(\hat{x} \hat{n}) = -\frac{dy}{ds}$, $\cos(\hat{y} \hat{n}) = \frac{dx}{ds}$

I coseni direttori del raggio vettore \overline{OP} sono:

$$\begin{cases} \cos(\hat{x}\hat{p}) = \cos(\theta) \\ \cos(\hat{y}\hat{p}) = \sin(\theta) \end{cases}$$

quindi l'angolo fra la zetta tangente ed il raggio vettore, cioè: $\hat{p}\hat{t} = \omega = (\hat{x}\hat{t} - \hat{x}\hat{p})$, avrà:

$$\cos(\omega) = \frac{(p' \cos \theta - p \sin \theta)(\cos \theta) + (p' \sin \theta + p \cos \theta)(\sin \theta)}{\sqrt{p'^2 + p^2}}$$

$$\sin(\omega) = \frac{(p' \sin \theta + p \cos \theta)(\cos \theta) - (p' \cos \theta - p \sin \theta)(\sin \theta)}{\sqrt{p'^2 + p^2}}$$

$$\cos(\omega) = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + p^2}}$$

$$\sin(\omega) = \frac{p}{\sqrt{p'^2 + p^2}}$$

Sottotangente e Sottonormale

Abbiamo già visto, in coordinate cartesiane che:

dicesi SOTTOTANGENTE: il segmento \overline{TM} proiezione sull'asse delle ascisse del segmento di tangente \overline{TP} compreso fra il punto di tangenza e le ascisse.

dicesi SOTTONORMALE: il segmento \overline{MN} proiezione sull'asse delle ascisse del segmento di normale \overline{NP} compreso fra il punto di tangenza, da cui si traccia la normale, e le ascisse.

Posto: $\overline{MT} = S_t$; $\overline{MN} = S_n$; avremo: $S_t = \frac{y x'}{y'}$; $S_n = \frac{y y'}{x'}$

$$\overline{PT} = -\frac{y}{y'} \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\overline{PN} = -\frac{y}{x'} \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

In coordinate polari: tracciamo una perpendicolare da O al raggio vettore ρ che chiameremo " q " (vedi figura) Chiameremo: T' il punto comune alle rette q e $t = \text{tangente}$; ed N' il punto comune alle rette q e $\delta_n = \text{normale}$.

Chiameremo: SOTTOTANGENTE il segmento $\overline{T'O} = S_{tp}$ proiezione sulla retta q del segmento $\overline{T'P}$ di tangente compreso fra il punto P di tangenza e la retta q .

Chiameremo: SOTTONORMALE il segmento $\overline{N'O} = S_{mp}$ proiezione sulla retta q del segmento $\overline{N'P}$ di normale compreso fra la curva e la retta q .

Per quanto sopra già ricavato abbiamo:

$$\overline{PT'} = -\rho / \cos \omega = \boxed{\overline{PT'} = -\frac{\rho \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}{\rho_1}}$$

$$\overline{PN'} = \rho / \sin \omega = \boxed{\overline{PN'} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}$$

$$S_{tp} = \overline{PT'} \cos(\hat{qt}) = \overline{PT'} \sin \omega \quad S_{tp} = -\left(\frac{\rho \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}{\rho_1}\right) \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}\right)$$

$$\boxed{S_{tp} = -\frac{\rho^2}{\rho_1}}$$

$$S_{mp} = \overline{PN'} \cos(\hat{qn}) = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \cos \omega \quad \boxed{S_{mp} = \rho_1}$$

ASINTOTI delle curve piane

Primo di tutto cerchiamo di precisare un concetto sulla parola: "infinito". (Meglio chiamarlo indefinito)

Nel nostro campo, detto impropriamente "finito"; qualunque grandezza, o numero di unità convenzionali, o semplicemente numero, per quanto grande possa pensarsi, si può sempre raddoppiare, triplicare, o, come dicono, si può aggiungere uno (+1) e non si finisce mai.

Eppure matematicamente si può pensare ad un limite. Per chiarire le idee ci viene incontro la parola direzione alla quale aggiungiamo la parola direzionalità e chiameremo direzionalità la "direzione" di tutte le rette parallele, le quali indefinitamente mantengono la loro distanza. (un punto all'infinito non ha senso). Mentre lasciamo la parola direzione alla direzione di una sola retta che contenga il punto indefinitamente lontano che definisce la sua "direzione".

Ciascuno di noi può puntare l'indice in una direzione che passerà per un punto indefinitamente lontano, e nessun'altra retta di quella direzionalità potrà passare per quel punto.

Rispetto alla direzionalità, perde significato la distanza in campo finito, (non ha importanza che le rette parallele siano fra loro più o meno distanti) è come il flusso di un vettore. Il vettore ha una direzionalità; la cosiddetta forza (che non è un vettore) ha una retta di azione e quindi una direzione.

Consideriamo una curva esprimibile parametricamente con:

$$x = x(t); \quad y = y(t)$$

può avvenire che si verifichi almeno uno dei limiti:

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} (x(t)) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} (x(t)) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} (y(t)) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} (y(t)) = \infty$$

In questo caso diremo che la curva ammette un asintoto se esiste una retta r che per $t \rightarrow t_0 \pm 0$ si avvicina indefinitamente al punto $P(t_0)$ della curva.

Si noti che noi avevamo già definito l'asintoto come la retta tangente all'os. la curva. E si noti che una retta ruotante intorno ad un suo punto, l'ultimo prima di diventare parallela ad un'altra retta, la interseca in un punto indefinitamente lontano.

Asintoti paralleli agli assi

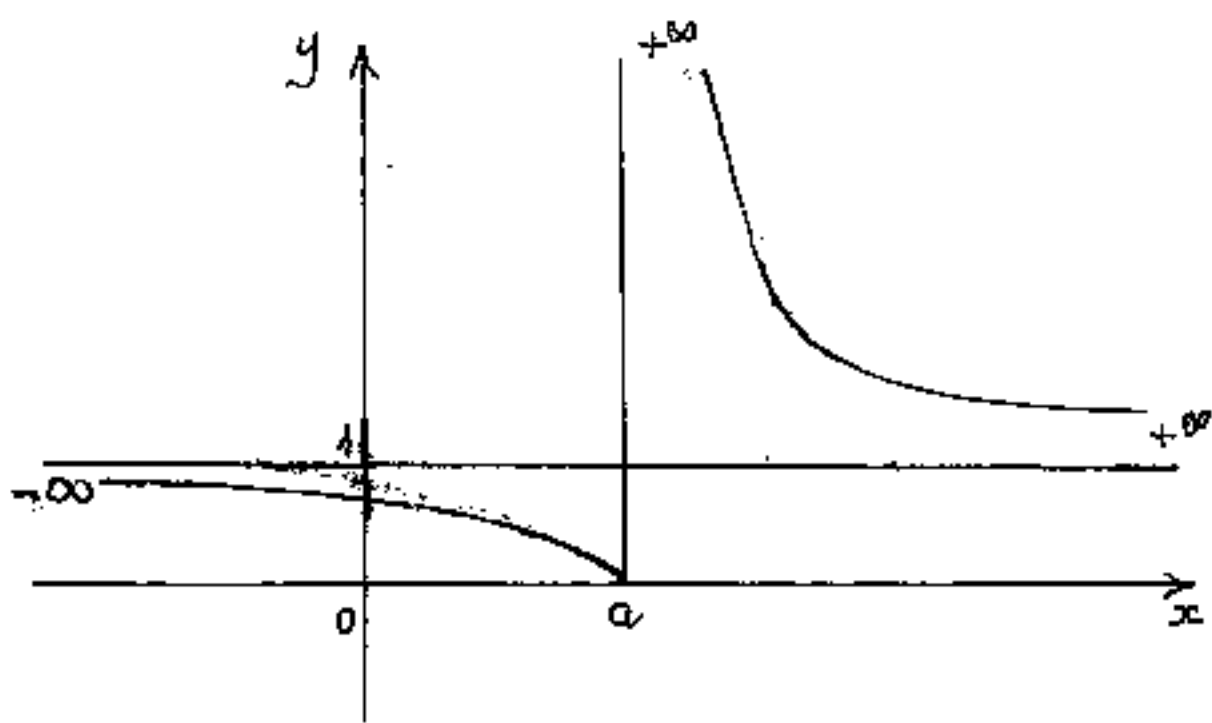
Una curva Γ sia espressa in forma esplicita $y = f(x)$, e sia: $\lim_{x \rightarrow a+0} (f(x)) = \pm \infty$; (oppure: $\lim_{x \rightarrow a-0} (f(x)) = \pm \infty$) allora vuol dire che la retta $x = a$ parallela all'asse y è un asintoto della curva.

(Infatti la distanza di un punto di ascissa x della curva dalla retta: $(x = a)$, misurata parallelamente ad x è: $(x - a) = \delta$ che tende a zero per x tendente ad a)

Consideriamo la curva:

$$y = e^{\frac{1}{x-a}}$$

Si noti che se x tende ad "a" con valori: $x > a$, l'esponente di "e" è > 0 , per cui: $e^{+\infty} = e^{+\infty} = \infty$.
Invece se x si avvicina ad "a" con valori: $x < a$, l'esponente di "e" è < 0 , per cui: $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$.



Se invece ricaviamo:

$$x = \frac{1}{\ln|y|} + a$$

poiché non esistono log.

di numeri $< 0 \rightarrow y \geq 0$

per $y \rightarrow 0$ $\ln|y| = -\infty$

$$x = 0 + a = a.$$

per: $y \rightarrow 1$ si ha: $\lim_{y \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{\ln y}\right) = \frac{+1}{0} = +\infty$; ed anche

per $y \rightarrow 1$ $\lim_{y \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{\ln y}\right) = \frac{1}{-0} = -\infty$.

Per l'iperbole equilatera: $x \cdot y = K$; $y = \frac{K}{x}$; $x = \frac{K}{y}$
 avremo che le rette $x=0$ (o $ax=y$) ed $y=0$ (o $ay=x$) sono asintoti della curva. Per $y = \tan q(x)$, le rette: $x = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ (con K intero) sono asintoti.

Asintoti non paralleli all'asse y

Siano $x = x(t)$ ed $y = y(t)$ le equazioni parametriche di una curva Γ e la retta: $y = mx + q$ sia un asintoto di Γ . (La retta $y = mx + q$, non è parallela all'asse y per $m \neq \infty$; per $m = 0$ è parallela ad x).

Dovrà essere: $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$, ove t_0 è quel punto indefinitamente lontano ove la curva e la retta si avvicinano con distanza tendente a zero, ed $X(t) = X$.

Consideriamo, per la generalità, un sistema di assi $x; y$ non ortogonali, ma $\hat{xOy} = \omega$ qualsiasi, abbiamo visto che la distanza di un punto da una retta è

dato da:
$$\delta = \frac{(y - mx - q) \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{m^2 + 2m \cos \omega + 1}}$$

ed essendo:
$$\frac{\operatorname{sen} \omega}{\sqrt{m^2 + 2m \cos \omega + 1}} \neq 0$$

affinché δ tenda a zero deve essere:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (y - mx - q) = 0$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} (y - mx) = q}$$

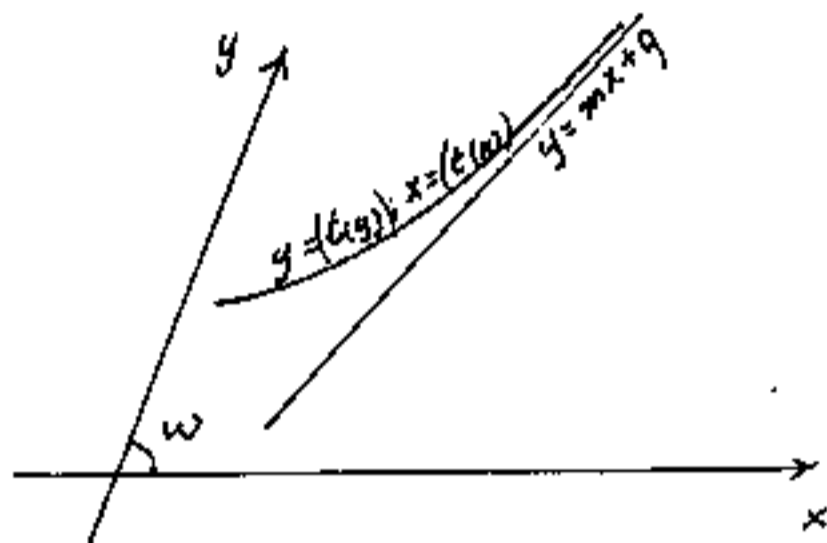
Possiamo porre: $(y - mx) = (q + \varepsilon)$

il limite precedente diventa: $\lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} (\varepsilon) = 0$

dividendo per x l'espressione precedente:

$$\frac{y}{x} - m = \frac{q}{x} + \frac{\varepsilon}{x}$$

poiché: $\lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} (x) = \infty$; avremo: $\lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} \left(\frac{y}{x}\right) = m$



Se un valore di t tende a t_0 ove $x(t)$ tende ad ∞ ed esistono i limiti:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} (y - mx) = q & \text{ed} \\ \lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} \left(\frac{y}{x}\right) = m \end{cases}$$

allora la retta: $y = mx + q$ è un asintoto della curva non parallelo ad y con assi comunque obliqui.

Consideriamo la curva: $y = \left(\frac{x}{1 + e^{1/x}}\right)$

per $x = \text{finito}$ anche $y = \text{finito}$.

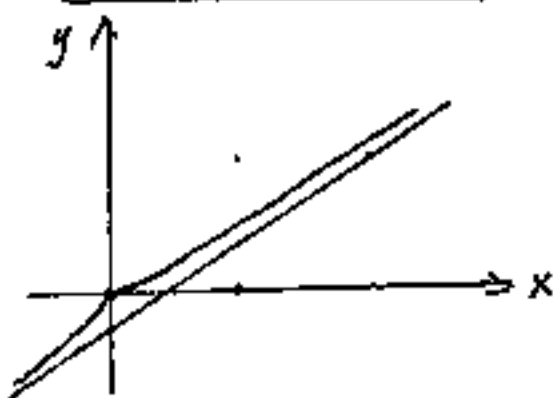
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{1/x}}\right) = \frac{\infty}{1 + e^{1/\infty}} = \frac{\infty}{1 + e^0} = \frac{\infty}{1 + 1} = \frac{\infty}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{1/x}}\right) = \frac{-\infty}{1 + e^{-1/\infty}} = \frac{-\infty}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + e^{1/x}}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{per cui } m = +\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\frac{1}{1 + e^{1/x}} - \frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(2 - 1 - e^{1/x})}{2(1 + e^{1/x})}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(1 - e^{1/x})}{2(1 + e^{1/x})}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + e^{1/x}}\right) \left(\frac{1 - e^{1/x}}{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^t}{t}\right) = -\frac{1}{4}$$



per cui $q = -\frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ è un asintoto.

Asintoti delle curve algebriche

L'equazione: $f(x, y) = 0$ di una curva algebrica può essere scritta nella forma:

$$\boxed{\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \dots + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0}$$

ove $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_2, \varphi_1, \varphi_0$ sono polinomi omogenei in (x, y) rispettivamente dei gradi: $n, (n-1), \dots, 2, 1, 0$.

Dividendo per x^n e ponendo $y = tx$ cioè: $t = y/x$

si ha: $\varphi_n(1, t) + \frac{1}{x} \varphi_{n-1}(1, t) + \dots + \frac{1}{x^{n-2}} \varphi_2(1, t) + \frac{1}{x^{n-1}} \varphi_1(1, t) + \frac{1}{x^n} \varphi_0(1, t)$.

Poiché: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ avremo che il polinomio di funzioni:

ni φ si riduce $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi}{x^n}(1, t)\right) = 0}$

Abbiamo visto che se: $y = mx + q$ è un asintoto, non parallelo ad y , della curva, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{x}\right) = \lim(t) = m$ cioè il coefficiente angolare m degli asintoti è radice reale dell'equazione algebrica di grado n :

$$\boxed{\varphi_n(1, t) = 0}$$

Questa equazione è anche detta Equazione delle direzioni asintotiche.

Per l'esistenza dell'asintoto supponiamo che questa equazione fornisca almeno una radice reale m , resta da calcolare q .

Se, anziché dividere la somma dei polinomi per x^n la dividiamo per x^{n-1} , (sempre ponendo $y = tx$) abbiamo:

$$x \cdot \varphi_m(1, t) + \varphi_{n-1}(1, t) + \dots + \frac{\varphi_0}{x^{n-1}} = 0$$

ma se m è una radice reale di $\varphi_m(1, t) = 0$ possiamo

scrivere: $\boxed{x \varphi_m(1, t) = x(t-m) \frac{\varphi_m(1, t)}{(t-m)} = (y - mx) \frac{\varphi_m(1, t)}{(t-m)}$

risultato che possiamo pensare sostituito nella precedente espressione.

Ricordiamo che: $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - mx) = q$

ma: $\varphi_m(1, m) = 0$

$\lim_{t \rightarrow m} \left(\frac{\varphi_m(1, t)}{t-m} \right)$ sarebbe una forma indeterminata, perciò

con l'Hospital si ha: $\lim_{t \rightarrow m} \left(\frac{\varphi_m(1, t)}{t-m} \right) = \varphi'_m(1, m) = \left(\frac{d(\varphi_m(1, t))}{dt} \right)_{t=m}$

Consideriamo $x \rightarrow \infty$ e sostituiamo si ha:

$q \cdot \varphi'_m(1, m) + \varphi_{n-1}(1, m) = 0$ cioè:

$$\boxed{q = \frac{-\varphi_{n-1}(1, m)}{\varphi'_m(1, m)}}$$

L'equazione dell'asintoto non parallelo ad y

per una curva algebrica è:

$$\boxed{y = mx - \frac{\varphi_{n-1}(1, m)}{\varphi'_m(1, m)}}$$

utilizzando il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee (cfr. Vol III) si può trasformare l'equazione dell'asintoto:

$$y = mx - \frac{\varphi_{m-1}(1, m)}{\varphi'_m(1, m)}$$

$$\varphi'_m(1, m) = \left(\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} \right)_{(1, m)} \quad \text{ove: } x=1 \text{ ed } y=m \text{ (radice)}$$

per Eulero:

$$\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} y = m \varphi_m(x, y)$$

si ha:

$$\left(\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial x} \right)_{(1, m)} = -m \left(\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} \right)_{(1, m)} = -m \varphi'_m(1, m)$$

Se moltiplichiamo per $\varphi'_m(1, m)$ l'equazione dell'asintoto diventa:

$$y \cdot \varphi'_m(1, m) = m \varphi'_m(1, m) \cdot x - \varphi_{m-1}(1, m)$$

sostituendo ed uguagliando a zero:

$$\left(\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial x} \right)_{(1, m)} x + \left(\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} \right)_{(1, m)} y + \varphi_{m-1}(1, m) = 0$$

che è l'equazione dell'asintoto in forma implicita, ove i coefficienti della x e della y sono le derivate parziali in $(1, m)$ ed il termine noto è $\varphi_{m-1}(1, m)$.

Come esempio consideriamo l'equazione:

$$\boxed{x^3 + y^3 - 3axy = 0} \quad (\text{folium di Cartesio})$$

e ripetiamo passo, passo quanto esposto:

$$\varphi_3 = (x^3 + y^3) ; \varphi_2 = (-3axy) ; \varphi_1 = 0 ; \varphi_0 = 0$$

passo ($y = xt$): $x^3 + x^3 t^3 - 3ax^2 t = 0$

dividendo per x^3 : $1 + t^3 - \frac{3at}{x} = 0$;

il $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3at}{x} \right) = 0$ per cui l'equazione delle di-

rezioni asintotiche è: $\boxed{(1 + t^3) = 0}$ che ammette

una sola radice reale: $\underline{(t = -1)}$ = (m) = (coeff. angolare)

l'espressione: $\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right)_{(1,m)} x + \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right)_{(1,m)} y + \varphi_{m-1}(1,m) = 0$

diventa: $\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right)_{(1,m)} x + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right)_{(1,m)} y + \varphi_2(1,m) = 0$

eioè: $(3x^2)x + (3y^2)y + (-3axy) = 0$

(dividendo per x^2) $3x + (3t^2)y + (3at) = 0$

e per ($t = -1$)

$$\boxed{x + y + a = 0}$$

equazione implicita dell'asintoto.

$$\boxed{y = -x - a}$$

equazione esplicita dell'asintoto del folium di Cartesio

Asintoti in coordinate polari

Ricordiamo che l'equazione di una retta in coordinate polari può scriversi: $\rho = \frac{q}{\sin\theta - m \cos\theta}$

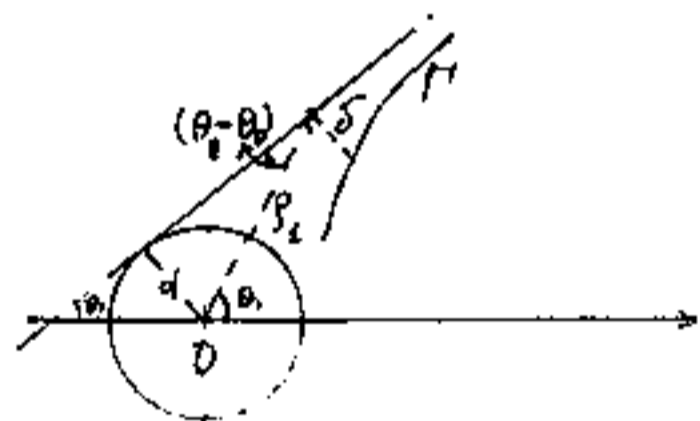
ove $q = \text{coeff. di traslazione lineare cioè (ordinata per } x=0)$
ed $m = \text{coeff. angolare nell'equazione esplicita } y = mx + q$.

può convenire di scrivere l'equazione nella

forma: $\boxed{\sin\theta - m \cos\theta = \frac{q}{\rho}}$ in questa forma, se

supponiamo che esista un angolo θ_0 tale che quando la retta e la curva Γ di equazione: $\frac{1}{\rho} = \varphi(\theta)$ si avvicinano indefinitamente per $\theta \rightarrow \theta_0 \pm 0$ anche $\rho \rightarrow \infty$,

per cui: $\sin\theta_0 - m \cos\theta_0 = \frac{q}{\infty} = 0$ $\boxed{\tan(\theta_0) = m}$ $\boxed{\varphi_{\theta_0} = 0}$



consideriamo un punto dell'asintoto definito da $(\rho_1; \theta_1)$, allora l'asintoto disterà dal polo O la

distanza: $\boxed{d = \rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_0)}$

La distanza δ dell'asintoto dalla curva Γ sarà:

$$\boxed{\delta = d - \rho \sin(\theta_0 - \theta)}$$

e poiché $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0 \pm 0} (\delta) = 0$

$$\boxed{\lim_{\theta \rightarrow \theta_0 \pm 0} (\rho \sin(\theta_0 - \theta)) = d}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0 \pm 0} \left(\frac{-\sin(\theta_0 - \theta)}{\theta_0 - \theta} \right) = -1 \quad ; \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_0 \pm 0} \left(\frac{\varphi_{\theta_0} - \varphi_{\theta}}{\theta_0 - \theta} \right) = \varphi'_{\theta_0} \quad ; \quad \left(\rho = \frac{1}{\varphi_{\theta}} \right)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0 \pm 0} \left[\frac{-\sin(\theta_0 - \theta) / (\theta_0 - \theta)}{(\varphi_{\theta_0} - \varphi_{\theta}) / (\theta_0 - \theta)} \right] = \frac{-1}{\varphi'_{\theta_0}} \quad ; \quad \boxed{d = \frac{-1}{\varphi'_{\theta_0}}}$$

La conoscenza di "d" e θ_0 , definisce l'asintoto.

$$d = \frac{-1}{\varphi'_{\theta_0}} ; \text{ od anche } d = \frac{1}{\varphi'_{\theta_0}}$$

Cerchio asintotico - Punto asintotico

Può avvenire per certe curve Γ' (per es. spirali) che: $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\rho) = a$ cioè vuol dire che al crescere del numero di giri il raggio ρ finisce per stabilirsi al valore "a". Dizemo il cerchio di raggio "a" con centro nel polo, CERCHIO ASINTOTICO della curva Γ' .

Quotora $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\rho) = 0$ (zero), il cerchio asintotico avrebbe raggio nullo ed il polo sarebbe un punto asintotico

Esempi

La spirale iperbolica $\rho = \frac{k}{\theta}$; $\frac{1}{\rho} = \varphi(\theta) = \frac{\theta}{k}$; $\varphi'(\theta) = \frac{1}{k}$;
la retta: $\rho \text{ sen } \theta = k$ è parallela all'asse polare e ne dista k ed è un asintoto. $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{\theta}\right) = 0$ cioè: $\rho = 0$ perciò il polo è un punto asintotico.

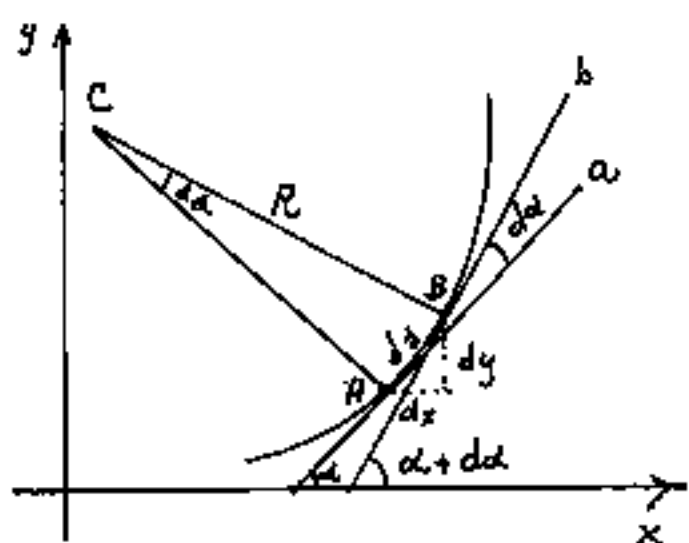
La spirale logaritmica: $\rho = e^{k\theta}$; $\frac{1}{\rho} = \varphi(\theta) = e^{-k\theta}$; $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (e^{-k\theta}) = 0$
cioè il polo è un punto asintotico.

La curva: $\rho = \frac{\theta^2 + a}{R\theta^2 + b}$; $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\rho) = R$; perciò R è il raggio del cerchio asintotico.

La curvatura ed il raggio di curvatura

delle curve piane

Occorre abbinare il concetto di curvatura, al concetto di cambio di direzione.



Consideriamo due punti: A e B di una linea, e siano \underline{a} , e \underline{b} le rispettive tangenti, il cambio di direzione della retta \underline{a} per assumere la direzione della

retta \underline{b} sia $d\alpha$, mentre per passare da A a B la linea compie l'arco $\widehat{AB} = ds$. Cioè la curvatura sarà tanto maggiore, quanto maggiore è il rapporto: $\frac{d\alpha}{ds} = \underline{\text{curvatura}}$

Vi sarà un arco di cerchio che raccorda i punti A e B ovi: $R d\alpha = \widehat{AB} = ds$ cioè: $\frac{ds}{d\alpha} = R = \underline{\text{raggio di curvatura}} = \underline{\text{inverso della curvatura}}$. Il cerchio che combacia in \widehat{AB}

con la curva si dice: cerchio osculatore (dal latino osculor, *atus sum, osci = baciare*) (Il cerchio tangente tocca la linea in un solo punto, il cerchio osculatore copre il tratto $\widehat{AB} = ds$).

Si ha: $f'(x_A) = \text{tg}(\alpha)$; $f'(x_B) = \text{tg}(\alpha + d\alpha)$; differenziando ! α :

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang}(\alpha) \text{ si ha: } \frac{d^2y \cdot dx - dy \cdot dx^2}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \text{ ma: } \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{ds}{dx}$$

$$\text{per cui: } \frac{d^2y \cdot dx - dy \cdot dx^2}{dx^2} = \frac{ds^2 d\alpha}{dx^2}; \text{ dividendo per } ds^3$$

$$\boxed{\frac{d^2y \cdot dx - dy \cdot dx^2}{ds^3} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}}$$

$d^2y = y'' dx^2$; essendo $dx = \text{costante}$: $d(dx) = 0$;

$$ds = (\sqrt{y'^2 + 1}) dx$$

$$\frac{1}{R} = \frac{y'' dx^2 \cdot dx}{ds^3} = \frac{y''}{(ds/dx)^3} = \boxed{\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}}$$

$$\boxed{R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}}$$

Il raggio di curvatura in coordinate polari

La lunghezza di un arco in coordinate polari: $ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta$

La direzione $(\alpha) = (\theta + \omega)$ ove: $d\alpha = d\theta + d\omega$; $\tan(\omega) = \frac{\rho'}{\rho}$

$$d(\tan \omega) = d \frac{\rho'}{\rho} \quad \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = \frac{\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^2} d\theta = d\omega \frac{\rho^2 + \rho^2}{\rho \omega}$$

cioè $\boxed{d\omega = \frac{\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^2 + \rho^2} d\theta}$ ed anche

$$d\alpha = d\theta + \frac{\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^2 + \rho^2} d\theta = \boxed{d\alpha = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^2 + \rho^2} d\theta}$$

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^2 + \rho^2}}$$

$$\boxed{R = \frac{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''}}$$

Formula che dà il raggio di curvatura in coordinate polari. per cui la curvatura:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}}$$

Il raggio di curvatura in coordinate parametriche

Sia Γ una curva di coordinate parametriche

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad \text{ove } \frac{d(x(t))}{dt} = x'; \quad \frac{d(y(t))}{dt} = y'$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt; \quad \text{tang } \alpha = \frac{dy(t)}{dx(t)}; \quad \text{differenziando}$$

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = d\left(\frac{y'(t) dt}{x'(t) dt}\right) = d\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{(y''(t) dt) x'(t) - y'(t) (x''(t) dt)}{x'(t)^2}$$

$$d\alpha = \frac{y''(t) x'(t) - y'(t) x''(t)}{x'(t)^2} dt \cdot \cos^2 \alpha \quad \text{ma: } \cos^2 \alpha = \frac{(x'(t) dt)^2}{[\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt]^2}$$

$$d\alpha = \frac{y''(t) x'(t) - y'(t) x''(t)}{x'(t)^2} dt \frac{x'(t)^2}{(x'^2 + y'^2)} = \frac{y''(t) x'(t) - y'(t) x''(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

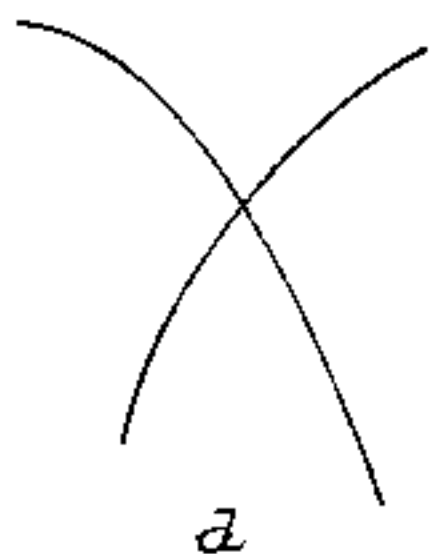
$$\frac{ds}{d\alpha} = R = \frac{(x'^2 + y'^2) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{(y''(t) x'(t) - y'(t) x''(t)) dt}$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(y''(t) x'(t) - y'(t) x''(t))}$$

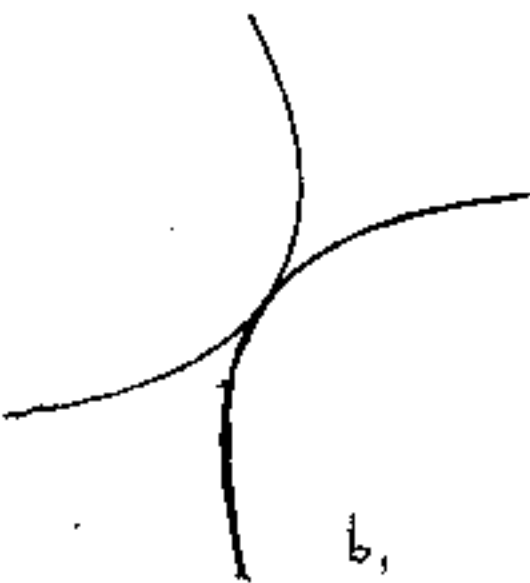
Raggio in coordinate parametriche.

Curve osculatrici

Per definire più propriamente cosa intendiamo per curve osculatrici, consideriamo due linee complanari aventi almeno un punto in comune. Si verificano i seguenti casi:



a) Le due linee si intersecano in modo tale che l'una rispetto all'altra passa dalla zona di concavità alla zona di convessità. Il punto comune si dice: punto di attraversamento o intersezione, ed anche che le due curve hanno un contatto di ordine pari.

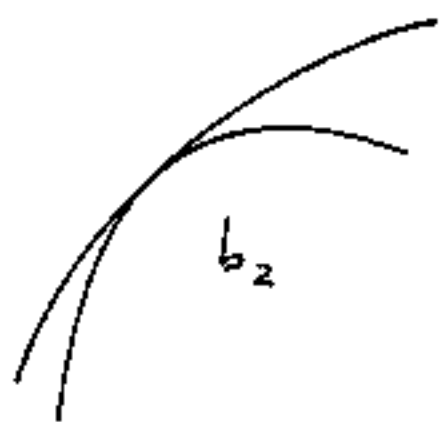


b) Le due linee non si intersecano, il punto comune si dice: punto di contatto o che le due linee hanno un contatto d'ordine dispari.

Si hanno due modalità di contatto d'ordine dispari:

b₁) Le due linee volgono la concavità da bande opposte. (Contatto esterno)

b₂) Le due linee volgono la concavità dalla stessa parte. (contatto interno) (sarebbe meglio dire (esterno-interno)).



In quest'ultimo caso, cioè che le due curve volgono la concavità dalla stessa parte, se nel punto comune le due curve hanno lo stesso cerchio osculatore, le due curve si dicono fra loro osculatrici.

Siano $y_a = f(x)$ ed $y_b = \varphi(x)$, le equazioni delle due curve: "a" e "b". Avremo che per un certo $x = x_0$ si ha: $f(x_0) = \varphi(x_0)$ cioè: $y_a = y_b$, ma le due curve per avere lo stesso cerchio osculatore dovranno avere: $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$, ed anche $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$ cioè: $R = \frac{(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}}{f''(x_0)} = \frac{(1 + \varphi'(x_0)^2)^{3/2}}{\varphi''(x_0)}$

Cioè nell'intorno del punto (x_0, y_0) le due curve debbono avere uguali ordinate, ed uguali le derivate prime e seconde.

Questa impostazione abbastanza generale, semplifica il problema, e riduce al cerchio osculatore la condizione di essere fra loro osculatrici, però non viene considerato che gli archi delle due curve possono essere più o meno bene sovrapposti, possono sovrapporsi meglio o peggio del cerchio osculatore.

Se noi consideriamo lo sviluppo in serie delle due funzioni, possiamo inserire questo problema e vedremo, per esempio, che nello sviluppo di una catenaria, lo sviluppo dell'ellisse coincide con un termine in più dello sviluppo della parabola, avendo preso come punto il vertice della catenaria. L'equazione di una catenaria è:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

ove: $y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$; $y'' = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$; $\dots = \frac{\frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}}{(1 + \sinh^2(\frac{x}{a}))^{3/2}}$

$$R = \frac{(1 + \sinh^2(\frac{x}{a}))^{3/2}}{\frac{1}{a} \cosh(\frac{x}{a})} = \frac{(\cosh^2(\frac{x}{a}))^{3/2}}{\frac{1}{a} \cosh(\frac{x}{a})} = \frac{\cosh^3 \frac{x}{a}}{\frac{1}{a} \cosh(\frac{x}{a})} = a \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

$R = \frac{y^2}{a}$ valido per qualunque punto della catenaria. (È comodo rilevare che $R : y = y : a$)

l'ordinata di una catenaria è media proporzionale fra il modulo "a" ed il raggio di curvatura in quel punto)

Per $x=0$ (vertice) $R = a$; $y = a$

Una parabola $y = mx^2$; $y' = 2mx$; $y'' = 2m$;

$$R = \frac{(1 + (2mx)^2)^{3/2}}{2m}$$

ove per $x=0 \rightarrow R = \frac{1}{2m}$ (= doppio della distanza focale), $\frac{1}{2m} = a \Rightarrow m = \frac{1}{2a}$; $y = \frac{1}{2a} x^2$

ma la parabola è spostata di a sulle

ordinate per cui: $y = \frac{1}{2a} x^2 + a$

Per l'ellisse di equazione: $\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (vedi II n°)
 il raggio di curvatura \bar{e} :

$$R = \frac{[a_e^2 - (1 - \frac{b^2}{a_e^2})x^2]^{3/2}}{-a_e b}$$

essendo $f^2 = (a_e^2 - b^2)$ si può scrivere:

$$R = \frac{[a_e^2 - f^2 \frac{x^2}{a_e^2}]^{3/2}}{-a_e^2 b}$$

nei vertici dell'ellisse ove $x=0$, oppure $x = \pm a_e$

per $x=0$ $R_b = \frac{-a_e^2}{b}$

per $x = a_e$ $R_a = \frac{-b^2}{a_e}$

Abbiamo scritto a_e (per l'ellisse) per distinguere il modulo "a" della catenaria.

L'equazione del cerchio osculatore nel vertice della catenaria sarà:

$$y = a \left(2 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) \text{ (semicerchio)}$$

poniamo: $x = a/m$; avremo:

l'equazione del semicerchio: $y = a \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}} \right)$

" della catenaria: $y = a \left(\cosh \frac{1}{m} \right)$

Sviluppando in serie:

per il semicerchio

$$y/a = 2 - \left(1 - \frac{1}{2m^2} - \frac{1!!}{4!!m^4} - \frac{3!!}{6!!m^6} - \dots - \frac{(2K-3)!!}{(2K)!!m^{2K}} \right)$$

(ove: $K!!$ si legge: "Kappa semi-fattoriale")

Per la catenaria:

$$y/a = 1 + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{4!m^4} + \frac{1}{6!m^6} + \dots + \frac{1}{(2K)!m^{2K}}$$

eseguendo i calcoli:

$$\text{(semicerchio): } \frac{y}{a} = 1 + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{8m^4} + \frac{1}{16m^6} + \dots$$

$$\text{(catenaria): } \frac{y}{a} = 1 + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{24m^4} + \frac{1}{720m^6} + \dots$$

Si ha l'uguaglianza dei primi due termini delle serie.

Si noti che il semicerchio coincide con la catenaria per $m = \infty$ cioè per $x = \frac{a}{\infty} = 0$, poi è sempre interno alla concavità della catenaria.

per $m = 2$; $x = a/2$; si ha:

$$\text{Semicerchio: } \frac{y}{a} = \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right) = 1,33974596$$

$$\text{catenaria: } \frac{y}{a} = \cosh\left(\frac{1}{2}\right) = 1,127625966$$

$$\text{Il cui rapporto è: } 1,005630086 = \frac{1}{0,994401435}$$

$$\text{la cui differenza è: } 0,006348630$$

cioè uno scostamento in y del 0,63% di a , cioè 0,56% dell'ordinata della catenaria.

Se consideriamo il cerchio osculatore nel punto della catenaria ove la tangente è inclinata di $\pi/4 = 45^\circ$; $y' = 1$; $x_t = \operatorname{argsh}(1) = x_t = a(0,8813735869)$; $y_t = a\sqrt{2}$; $R = 2a$

Le coordinate del centro saranno:

$$x_c = -a(\sqrt{2} - 0,8813735869) = \underline{\underline{-0,5328399751 \cdot a}}$$

$$y_c = 2a\sqrt{2} = \underline{\underline{2,828427124 \cdot a}}$$

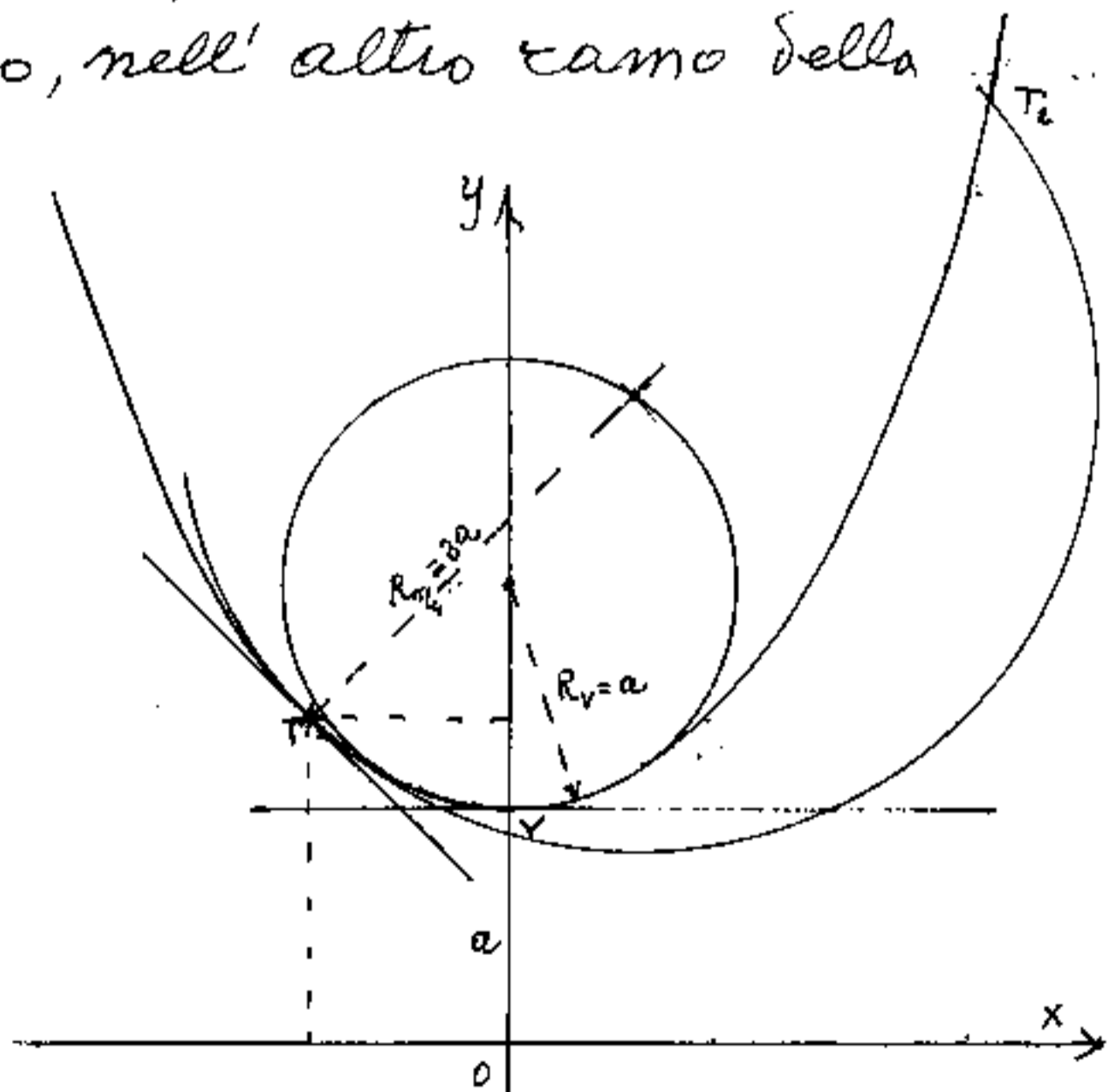
L'equazione del semicerchio sarà:

$$y/a = 2,828427124 - \sqrt{3,716081561 - (x/a)^2 - 1,065679950(x/a)}$$

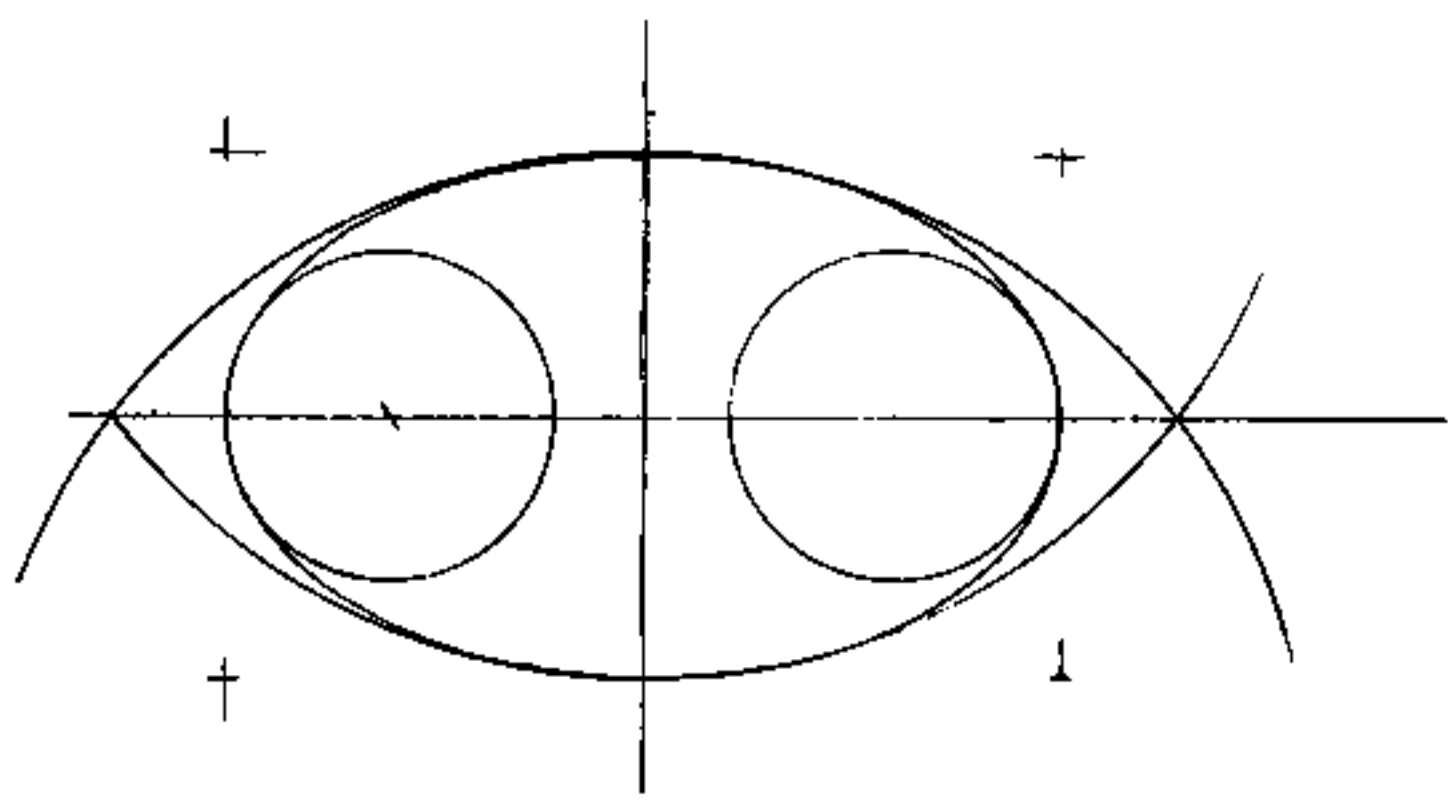
ove per $x = a$ ($0,8813735869$) si ha $y = a\sqrt{2}$ coincidente con la catenaria.

per: $x = 0$ si ha $y = 0,90071305(a)$, cioè minore dell'ordinata della catenaria, mentre per $x = a$, $y = 1,543747549$, maggiore dell'ordinata della catenaria che per $x = a$ è $y = 1,543080635$ cioè significa che le due curve si intersecano, hanno cioè un contatto di ordine pari nel campo in esame. In effetti, (come vedremo) il cerchio osculatore in un punto di un ramo di catenaria intersecherà la catenaria in due punti, uno ove è osculatore e l'altro, nell'altro ramo della catenaria.

Il centro del cerchio osculatore nel punto: $x = \operatorname{arcsinh}(1)$ è quasi sulla circonferenza del cerchio osculatore nel vertice.



che un cerchio osculatore (a curvatura costante) sia tutto interno alla concavità della curva quando è osculatore nel vertice a curvatura di raggio minimo, è logico, come è logico che rimanga dalla parte convessa se il vertice ha curvatura di raggio massimo; esempio classico l'ellisse.



Quindi una linea a curvatura variabile, il cerchio osculatore in un punto intermedio, la taglierà nel punto che cerchio e linea hanno la stessa curvatura, (stesso raggio) poi il cerchio rimarrà interno alla parte che tende ad aumentare R ed esterno alla parte di linea ove R tende a diminuire. Ma, nel punto comune, cerchio e linea avranno la stessa tangente.

Abbiamo già visto l'espressione della parabola che ha lo stesso vertice ed è osculatrice della catenaria, espressione che può scriversi

$$\frac{y}{a} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^2$$

questa formula coincide con i primi due termini dello sviluppo in serie della catenaria:

$$\frac{y}{a} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^4}{4!} + \dots$$

Se consideriamo gli scostamenti per $x = \pm \frac{a}{2}$ per la parabola si ha:

$$\frac{y}{a} = \frac{9}{8} = 1,1250000$$

per la catenaria:

$$\frac{y}{a} = 1,124625966$$

il cui rapporto è: $0,997671244 = \frac{1}{1,002334192}$

e la cui differenza è: $0,002625966$

cioè un errore del $0,26\%$ di a (minore di quello del cerchio) e $-0,23\%$ dell'ordinata della catenaria.

La migliore approssimazione è possibile perché entrambe le linee hanno curvatura variabile decrescente con x . Infatti in elettrotecnica, per cavi aerei molto tesi, si approssima la catenaria ad una parabola.

L'ellisse come curva osculatrice nel vertice della catenaria

Per l'ellisse di semiassi m ed n con $m > n$, avendosi incogniti due parametri m ed n la trattazione diventa più complessa. Il raggio di curvatura all'esterno del semiasse n è: $R_n = \frac{m^2}{n}$; mentre il raggio di curvatura all'estremo del semiasse m è $R_m = \frac{n^2}{m}$; poiché il raggio più piccolo è all'estremo del semiasse maggiore m , porremo la uguaglianza: $R_n = R_m$ cioè uguagliando raggi di curvatura nel vertice delle due curve avremo: $a = \frac{n^2}{m}$ e posto: $m = in$

$$a = \frac{n}{i} = \frac{m}{i^2}$$

L'equazione dell'ellisse osculatore nel vertice della catenaria risulta:

$$\frac{(y - m - a)^2}{m^2} + \frac{x^2}{m^2} = 1$$

$$\frac{(y - i^2 a - a)^2}{i^4 a^2} + \frac{x^2}{i^2 a^2} = 1$$

$$(y - a(i^2 + 1))^2 = i^4 a^2 - i^2 x^2$$

$$y = a(i^2 + 1) - \sqrt{i^4 a^2 - i^2 x^2}$$

$$\boxed{y/a = (i^2 + 1) - i \sqrt{i^2 - (x/a)^2}}$$

Si noti che occorre ancora introdurre una ulteriore condizione per definire l'ellisse.

Per $i=1$ si ricade nel caso del cerchio. Si tratta, in altre parole, di definire "i" in modo tale che l'ellisse sia il più possibile vicino alla catenaria.

Scriviamo l'equazione dell'ellisse nella forma:

$$\frac{y}{a} = 1 + i^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{ia}\right)^2} \right)$$

e sviluppiamo in serie:

$$\frac{y}{a} = 1 + i^2 \left[1 - \left(1 - \frac{(x/ia)^2}{2} - \frac{(x/ia)^4}{4!!} - \frac{3!!(x/ia)^6}{6!!} - \dots \right) \right]$$

cioè:

$$\frac{y}{a} = 1 + \frac{(x/a)^2}{2} + \frac{(x/a)^4}{i^2 4!!} + \frac{3!!(x/a)^6}{i^4 6!!} + \frac{5!!(x/a)^8}{i^6 8!!} + \dots$$

I primi due termini coincidono con lo sviluppo in serie della catenaria; possiamo scegliere "i" in modo tale che coincida anche il terzo termine:

$$\frac{(x/a)^4}{i^2 4!!} = \frac{(x/a)^4}{4!} \quad \left(\text{ma: } 4!! = 8; 4! = 24 \right)$$

per cui: $8i^2 = 24$; $i = \sqrt{3}$

e la serie diventa:

$$\frac{y}{a} = 1 + \frac{(x/a)^2}{2} + \frac{(x/a)^4}{24} + \frac{5(x/a)^6}{720} + \dots$$

serie che coincide fino al 3° termine con lo sviluppo in serie della catenaria.

Un tale ellisse avrà per equazione

$$\frac{y}{a} = 1 + 3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right)$$

calcoliamo i valori per $x = a/2$

$$\frac{y}{a} = 1,127718577 \quad \text{per l'ellisse}$$

$$\frac{y}{a} = 1,127625966 \quad \text{per la catenaria}$$

il cui rapporto è: $0,999917789 = \frac{1}{1,000082218}$

la cui differenza è: $0,000092711$

cioè uno scostamento in y del $0,0093\%$ di a
oppure $0,008\%$ rispetto all'ordinata della catenaria

Quindi l'ellisse è molto più approssimabile alla catenaria delle altre due curve.

Gli assi di tale ellisse sono: $(m=3a); (n=a\sqrt{3})$.

È evidente che le curve osculatrici ad una determinata linea sono infinite.

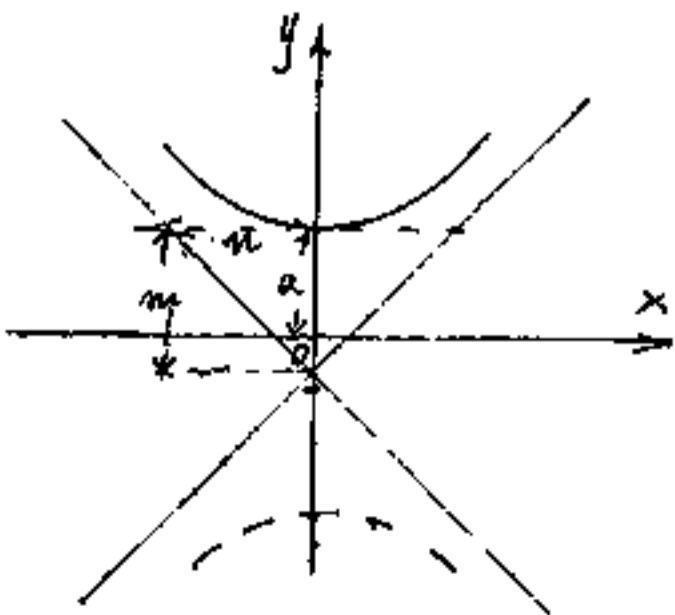
Utilizzando sovrapposizioni di sinusoidi di diversa frequenza ed ampiezza è possibile costruire linee che in un certo tratto possono praticamente coincidere con qualsiasi segmento curvilineo.

L'iperbole come curva osculatrice della catenaria

Per l'iperbole di semiassi "m" ed "n", si hanno, come per l'ellisse, due parametri incogniti, per l'ellisse si è dovuto far coincidere il diametro maggiore con l'asse y. Per l'iperbole dobbiamo porre il segno meno (-) al termine in x^2 affinché volga come la catenaria; cioè abbia in y l'asse focale. Il raggio di curvatura nel vertice dell'iperbole: è $R = \frac{n^2}{m}$ ove m è semiassi focale.

Cioè: $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ è l'iperbole al centro con asse focale sulle x; noi vogliamo l'equazione $\frac{(y+m-a)^2}{m^2} - \frac{x^2}{n^2} = 1$; che è una iperbole con asse focale sulle y con vertice nel punto $y=a$

$y = a - m + m \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}$ (solo segno + per avere il solo ramo di iperbole dalla parte della catenaria)



Si noti che: $m \geq a$

cioè saranno le condizioni che imponiamo a determinare i valori di m e di n.

affinchè abbiano lo stesso raggio di curvatura nel vertice dovrà essere:

$$\boxed{\frac{n^2}{m} = a}$$

analogamente a quanto fatto per l'ellisse, poniamo: $m = ni$; $a = \frac{n}{i} = \frac{m}{i^2}$;
e l'equazione dell'iperbole diventa:

$$\frac{(y + i^2 a - a)^2}{i^4 a^2} - \frac{x^2}{i^2 a^2} = 1$$

$$(y + a(i^2 - 1))^2 = i^4 a^2 + i^2 x^2$$

$$y = \sqrt{i^4 a^2 + i^2 x^2} - a(i^2 - 1)$$

$$\boxed{\frac{y}{a} = i \sqrt{i^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - (i^2 - 1)}$$

equazione che può scriversi:

$$\boxed{\frac{y}{a} = 1 + i^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{ia}\right)^2} - 1 \right)}$$

e sviluppando in serie di potenze:

$$\frac{y}{a} = 1 + i^2 \left[1 + \frac{\left(\frac{x}{ia}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{x}{ia}\right)^4}{4!!} + \frac{\left(\frac{x}{ia}\right)^6}{6!!} + \dots \right]$$

$$\frac{y}{a} = \left(1 + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^4}{i^2 4!!} + \frac{3!! \left(\frac{x}{a}\right)^6}{i^4 6!!} + \dots \right)$$

si noti che contrariamente all'ellisse il terzo termine della serie è negativo.

Se confrontiamo i terzi termini per ricavare "i" avremo:

$$\frac{-(x/a)^4}{i^2 4!!} = \frac{+(x/a)^4}{4!}$$

da cui: $i^2 = \frac{-4!}{4!!} = \frac{-24}{8} = -3$

cioè "i" ha radici immaginarie -

Se sostituiamo $i^2 = -3$ nell'equazione:

$$y = \pm \sqrt{i^4 a^2 + i^2 x^2} - a(i^2 - 1)$$

otteniamo:

$$y = 4a \pm \sqrt{9a^2 - 3x^2}$$

equazione di un'ellisse coincidente con quella già trovata: $\frac{y}{a} = 1 + 3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) = 4 \pm \sqrt{9 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2}$; non è più iperbole.

Tutto ciò implica che le condizioni imposte: cioè che l'iperbole abbia il vertice coincidente col vertice della catenaria, ed abbia lo stesso raggio di curvatura $\frac{m^2}{m} = a$, porta

$$y = a + m\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{ma}} - 1\right) \quad y = \left(a + \sqrt{m^2 + \frac{mx^2}{a}} - m\right)$$

$$\frac{y}{a} = 1 + \frac{m}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2 a}\left(\frac{x}{a}\right)^2} - 1\right) \quad \text{poniamo } a = 1 \text{ ed } m = 4$$

avremo: $y = 1 + 4\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} - 1\right) = 1 + 2\sqrt{4 + x^2} - 4 =$

$$y = 2\sqrt{4 + x^2} - 3$$

ovvero scrivendo

$$\frac{(y+4-1)^2}{4^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$$

si nota che ad ogni "m" arbitrario

Corrisponde uno ed un solo: $n = \sqrt{m \cdot a}$,
 affinché l'iperbole abbia lo stesso vertice e lo
 stesso raggio di curvatura, perciò il rapporto
 $i = \frac{m}{n} = (\text{costante})$ non può essere condizionato
 dalla corrispondenza del 3° termine degli
 sviluppi in serie della catenaria e dell'iper-
 bole. Cioè di iperboli che hanno lo stesso
 vertice e lo stesso raggio di curvatura nel
 vertice della catenaria ve ne sono infinite
 ma nessuna di esse può avere coincidente
 il 3° termine dello sviluppo in serie delle due
 curve.

Si noti che posto: $a = 1$ l'equazione dell'
 iperbole può scriversi:

$$y = (\sqrt{m}) \sqrt{m + x^2} - (m - 1)$$

ed al variare di m varia poco la y . Per fare
 un esempio: la catenaria per $x=2$ ha: $y=3,762196$
 per l'iperbole con $m=4$; ed $x=2$, $y=2,656854$

$$m=36; x=2, y=2,9473319$$

$$m=10000; x=2, y=2,9998$$

$$m=10^6; x=2, y \approx 3$$

ciò è dovuto alla curvatura dell'iperbole che varia
 molto più rapidamente di quella della catenaria.

Per $x = 1$ la catenaria ha $y = 1,543080$
 L'iperbole con $m = 4 \rightarrow y = 1,490712$
 $m = 36 \rightarrow y = 1,496575$
 $m = 10.000 \rightarrow y = 1,499987$
 mentre l'ellisse osculatore $y = 1,55051$
 e la parabola $y = 1,5$

TAVOLA di CONFRONTO

X	catenaria	parabola	iperbole	ellisse	cerchio
.1	1.005004	1.005	1.004996	1.005004	1.005013
.2	1.020067	1.02	1.019934	1.020067	1.020204
.3	1.045339	1.045	1.044667	1.045343	1.046061
.4	1.081072	1.08	1.078961	1.081096	1.083485
.5	1.127626	1.125	1.122499	1.127719	1.133975
.6	1.185465	1.18	1.174902	1.185751	1.2
.7	1.255169	1.245	1.235738	1.255915	1.285857
.8	1.337435	1.32	1.304542	1.339173	1.4
.9	1.433086	1.405	1.380829	1.436799	1.56411
1,-	1.543081	1.5	1.464102	1.55051	2.0.
1.1	1.668519	1.605	1.553871	1.682674	
1.2	1.810656	1.72	1.649658	1.83667	
1.3	1.970915	1.845	1.751	2.017578	
1.4	2.150899	1.98	1.857461	2.233648	
1.5	2.35241	2.125001	1.968627	2.500001	
1.6	2.577465	2.280001	2.084116	2.851089	
1.7	2.828316	2.445001	2.20357	3.425546	
1.8	3.107474	2.620001	2.326662		
1.9	3.417733	2.805001	2.453089		
2	3.762196	3.000001	2.582576		
2.1	4.144314	3.205001	2.714871		
2.2	4.567909	3.42	2.849742		
2.3	5.03722	3.645	2.986983		
2.4	5.556947	3.88	3.126402		
2.5	6.132287	4.125	3.267826		
x	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$y = 1 + \frac{x^2}{2}$	$y = \sqrt{9+3x^2} - 2$	$y = 4 - \sqrt{9-3x^2}$	$y = 2 - \sqrt{1-x^2}$

I punti delle linee nel piano

Abbiamo già dato (vol. I) la definizione euclidea di punto, abbiamo visto vari aspetti del punto, come origine di misure, o di assi; come delimitatore di segmenti, abbiamo visto i punti notevoli di un triangolo. Abbiamo già distinto i punti propri dai punti impropri (vol. III). Abbiamo trattato molti altri aspetti e attributi del punto, comprese le condizioni di appartenenza e di complanarità; ora vogliamo considerare i punti delle linee nel piano.

Consideriamo prima i punti appartenenti ad una linea, poi i punti comuni a più linee.

È consigliabile scorrere i vari attributi alla parola "Punto" nell'indice alfabetico e rivederne la trattazione nei precedenti volumi. Considerare il punto come una localizzazione nello spazio ennedimensionale, porta a considerare due traiettorie che geometricamente hanno un punto in comune, che nel tempo non è più comune: (la pallottola è passata per quel punto dopo che vi era passato un piccione...). Così due rette nel piano appaiono avere un punto comune, nello spazio tridimensionale possono essere sghembe.

Punti ordinari e singolari delle curve piane

Punti multipli

Sia: $f(x,y)=0$ l'equazione implicita di una curva Γ ,
e sia: $P \equiv (x_0; y_0)$ un punto di Γ (Cfr. Vol. III teorema del
Dini).

Se in P si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0, \text{ oppure } \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0, \text{ la}$$

$f(x,y)$ rappresenta il punto P in un tratto di curva
ove la tangente varierà con continuità all'intorno
di P , diremo tale punto ORDINARIO della
curva. Invece se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \text{ la } f(x,y)=0$$

rappresenta il punto P_s che chiameremo
punto Singolare della curva Γ .

Notiamo che la condizione di punto singolare
di una curva coincide con la condizione necessaria,
ma non sufficiente che P_s sia un max od un min.

Consideriamo un intorno di P_s , cioè:

$$\Gamma = f(x_s+h; y_s+k)$$

e sviluppiamo la funzione in serie di Taylor.

Trattandosi di un punto singolare, sono nulle le derivate del primo ordine e non figurano nello sviluppo, l'ordine delle altre derivate si indica con l'esponente in parentesi; ed avremo:

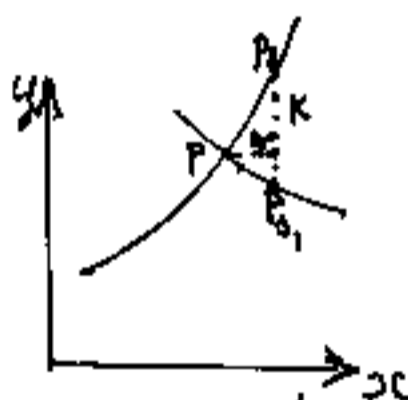
$$f(x_1+h, y_1+k) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k \right)^{(2)} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} k \right)^{(3)} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} h + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} k \right)^{(n)} + R_{n+1}$$

Supponiamo siano nulle le derivate di ordine inferiore ad (n) , il nostro sviluppo diventa:

$$\boxed{\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} h + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} k \right)^{(n)} + R_{n+1} = 0} \quad (1)$$

Quando P_1 tende a P_s , cioè $h \rightarrow 0$ (ed anche $k \rightarrow 0$), si ha che il rapporto $\frac{k}{h}$ tende ad un numero finito μ , allora sappiamo che la retta passante per s è espressa da:

$$\boxed{\frac{y - y_s}{x - x_s} = \mu}$$



è una retta tangente in P_s ; ma, nel nostro caso, il punto singolare P_s , per il quale vale la (1), se dividiamo tale espressione per h^n e chiamo il limite per h tendente a zero otteniamo l'equazione nel rapporto: $\frac{k}{h} = \mu$, cioè:

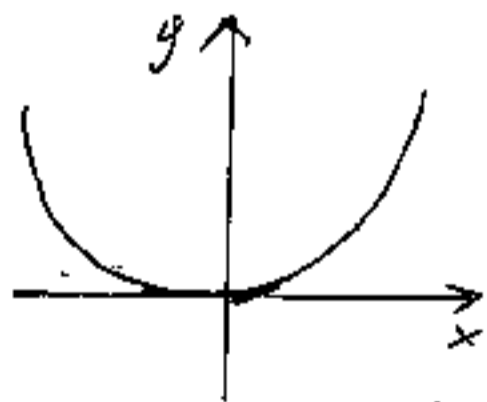
$$\boxed{\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \mu + \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} \mu^2 + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \mu^n = 0} \quad (2)$$

che è una equazione di grado "n" nell'incognita μ , cioè ammette n valori di μ (reali o immaginari) che possono soddisfarla.

Ma ad ogni valore di μ corrisponde una retta tangente in P_s (reale o immaginaria), in questo caso diremo che P_s è un punto MULTIPLO di ordine n, ed anche P_s è un punto ennuplo della curva Γ .

Come esempio pratico possiamo considerare le "codonee" (vedi in questo volume più avanti) a tre, quattro, n foglie che hanno nell'origine un punto rispettivamente triplo, quadruplo, ennuplo.

Occorre però considerare anche il punto singolare detto di ONDULAZIONE in cui la tangente ha contatto con un quadripunto per esempio: $(y = x^4)$ ed anche: $(x^4 - y) = 0$ ed è ondulazione di prima specie, come in figura



ricordando che le curve di IV grado si presentano:

Qualora i punti siano più di 4 sono detti di ondulazione di specie superiore.

Punti doppi, - Nodi - Cuspidi

Nella funzione $f^p(x, y)$ che abbiamo trattato sopra, se sono nulle solo le derivate del primo ordine e non quelle del secondo ordine avremo: μ_1 e μ_2 (vedi punti singolari) e quindi un punto doppio della $f^p(x, y)$. Spostiamo gli assi in modo che l'origine O coincida col punto doppio; ricordando che:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sviluppiamo in serie di MacLaurin la espressione della $f^p(x, y)$, con origine degli assi nel punto doppio e limitiamoci alle derivate terze.

$$f^p(x_0+h, y_0+k) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{0,0} x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,0} y^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{0,0} x^3 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{0,0} x^2 y + 3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{0,0} x y^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{0,0} y^3 = 0$$

L'equazione delle tangenti in funzione del coefficiente angolare μ diventa:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{0,0} + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} \mu + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,0} \mu^2 = 0$$

ed avrà due radici che possono essere reali, (distinte o coincidenti) oppure immaginarie coniugate a seconda che il discriminante dell'equazione $\Delta \geq 0$. tale discriminante corrisponde al determinante Hessiano, infatti:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = H = -\Delta$$

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \leq 0$$

I) Se : $H < 0$ si hanno due tangenti distinte, perciò il punto si dirà:

"Punto doppio a tangenti distinte"
od anche che:

"Nel punto vi è un nodo"

(Per esempio, nell'origine degli assi, il folium di Cartesio, o la lemniscata di Bernouilli, hanno "Un nodo").

II) Se : $H > 0$ e nell'origine $f(x_0, y_0) = 0$, ma in un intorno di (x_0, y_0) e la $f(x_0+h, y_0+k)$, con h e k piccolissimi, mantiene lo stesso segno si suol dire che:

"in "0" vi è un punto isolato"

(Per esempio la Concoide di Nicomede
 $(y-a)^2(x^2+y^2) = b^2y^2$, a seconda che: $a < b$,
oppure: $a > b$ nell'origine si ha: un nodo oppure
un punto doppio isolato)

III) Se : $H = 0$ Le direzioni delle tangenti coinci-
dono nel punto x_0, y_0 di Γ . Perciò il
punto: (x_0, y_0) sarà detto:

"Punto doppio a tangenti coincidenti"

oppure: "Cuspide"

la cuspide è detta anche:

Punto di regresso

La cuspidale si distingue in due sottocasi:
e cioè:

III a) se $H=0$ e se i due rami della curva Γ stanno da banda opposta alla tangente la cuspidale si dice:

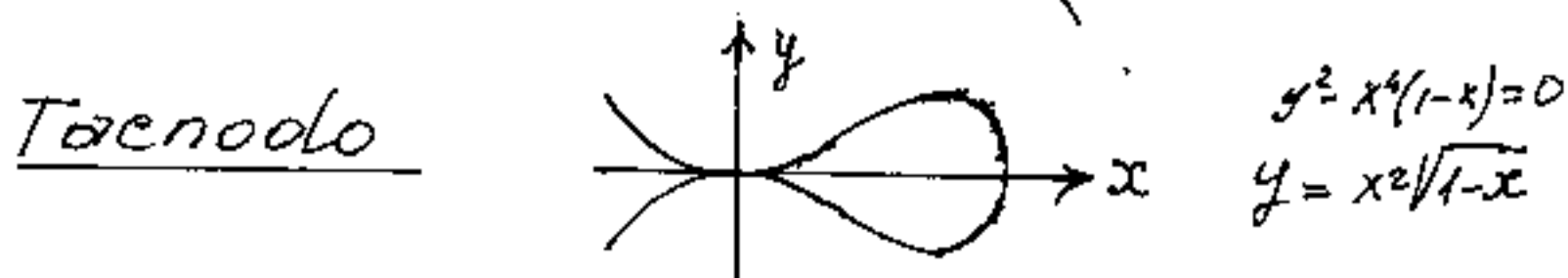
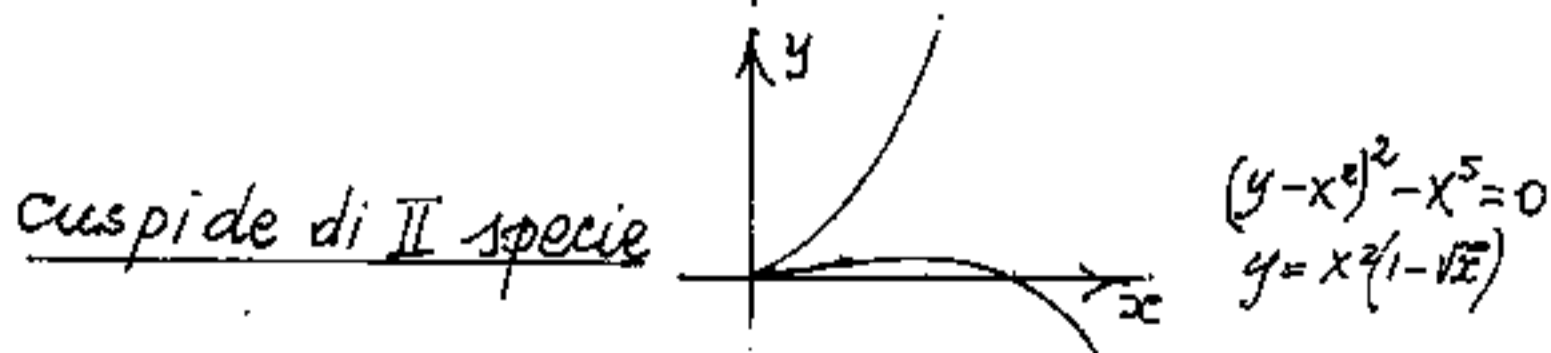
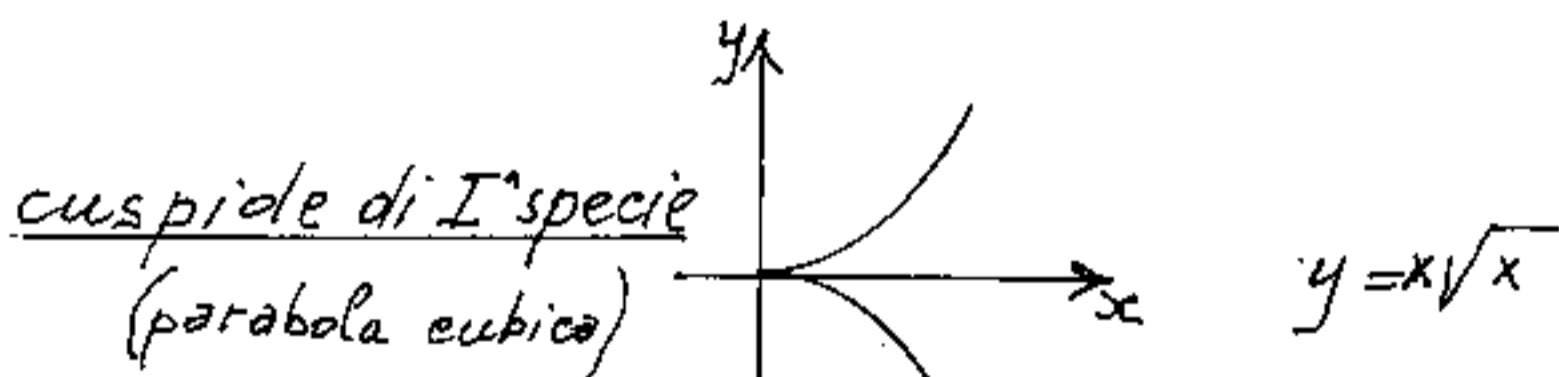
"Cuspidale di I^a specie"

III b) se $H=0$ e e i due rami della curva Γ stanno dalla stessa banda rispetto alla tangente si ha la:

"Cuspidale di II specie"

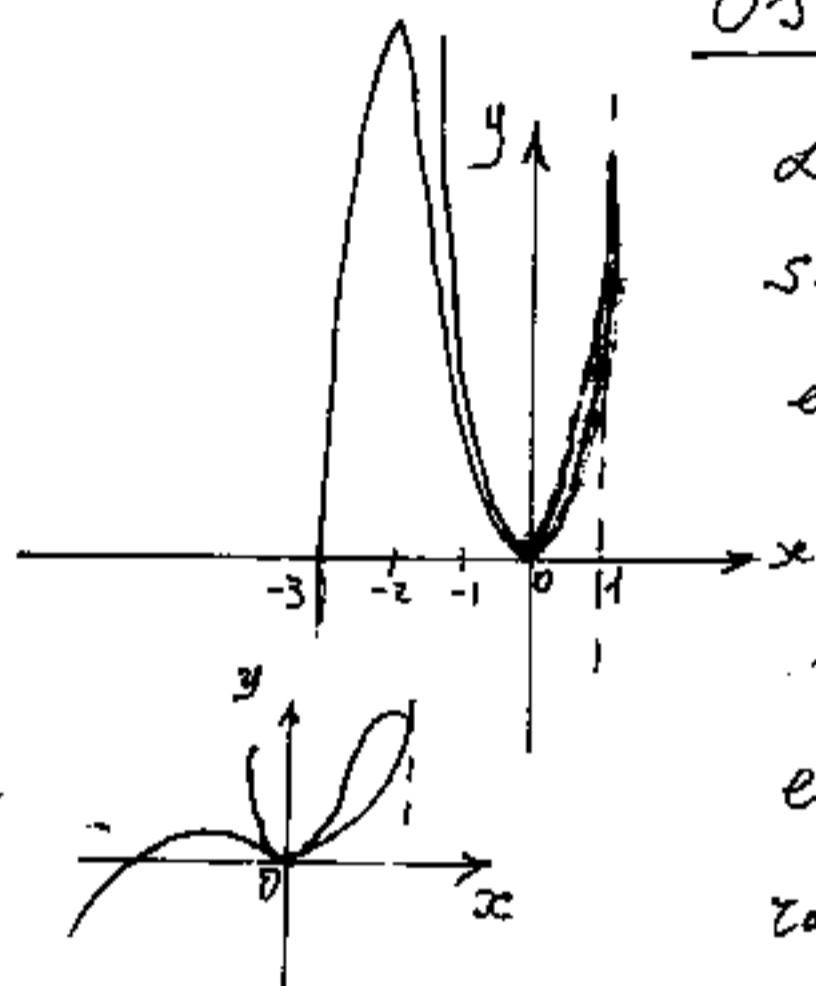
IV a) se $H=0$ e se i due rami della curva Γ proseguono oltre (x_0, y_0) e pur avendo la stessa tangente restano da bande opposte alla stessa si ha un:

"Tacnodo"



IV.) se $H=0$ e se i due rami della curva Γ , non solo non si incrociano, pur avendo la stessa tangente in (x_0, y_0) , ma proseguono e permangono dalla stessa parte delle ascisse, in questo caso si ha un:

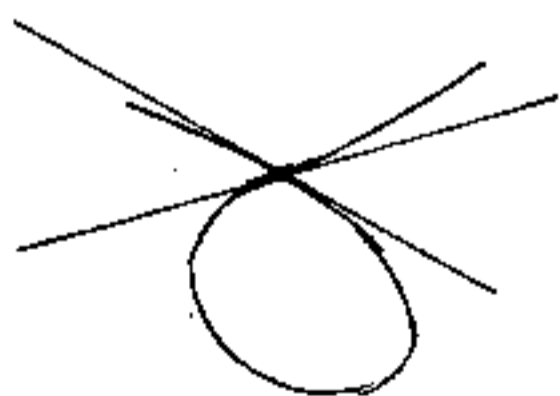
"Oscenodo"



La figura a fianco è solo indicativa per curva esempio: $(y-6x^2)^2 - x^5(1-x) = 0$
 cioè: $y = x^2(6 \pm x\sqrt{1-x})$,
 ma l'oscenodo è più evidente nella seconda figura a fianco.

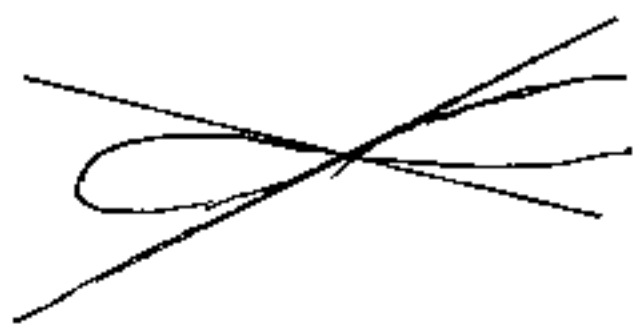
V° Se in un nodo si hanno due tangenti distinte, ma un ramo della curva ha un flesso nel nodo, si ha quello che si chiama:

"Flecnode"



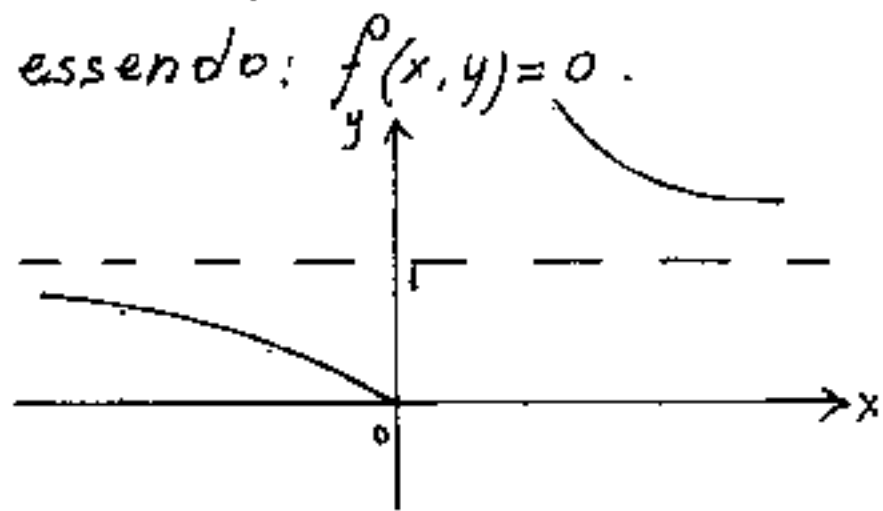
Se invece entrambi i rami della curva hanno un flesso nel nodo si ha il:

"Biflecnode"

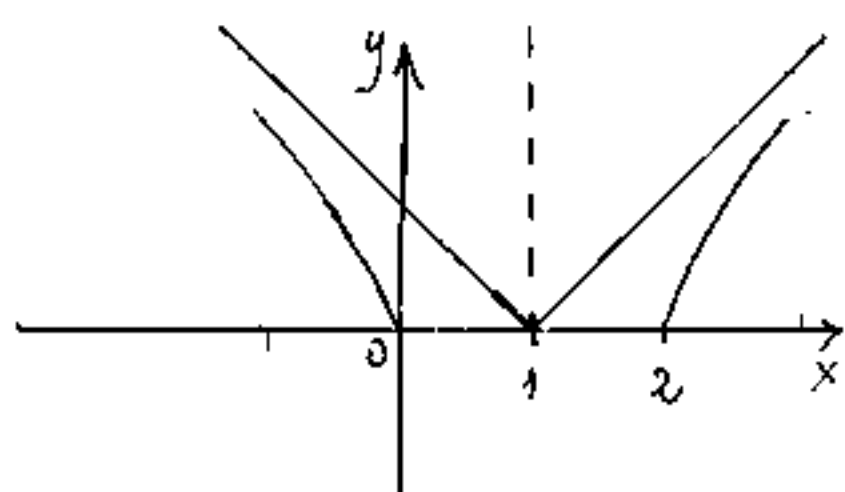


Punti di arresto

Diconsi punti di arresto quei punti nei quali non è possibile effettuare lo sviluppo di Taylor essendo: $f'(x, y) = 0$.



Per esempio: $y = e^{\frac{1}{x}}$ ha un punto di arresto per $x \rightarrow -0$ sul semiasse negativo.

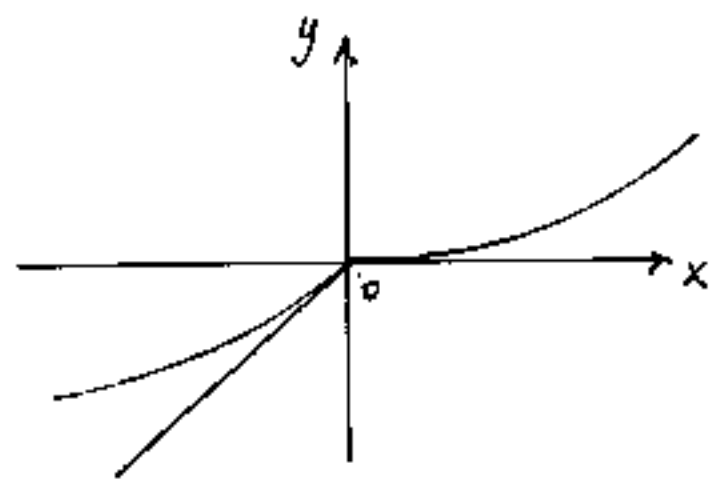


La $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ha due punti di arresto: $x \rightarrow -0$ $x \rightarrow 2+$ che delimitano il campo di esistenza della

funzione (zero è limite destro del primo ramo, 2 è limite sinistro del secondo ramo di iperbole.)

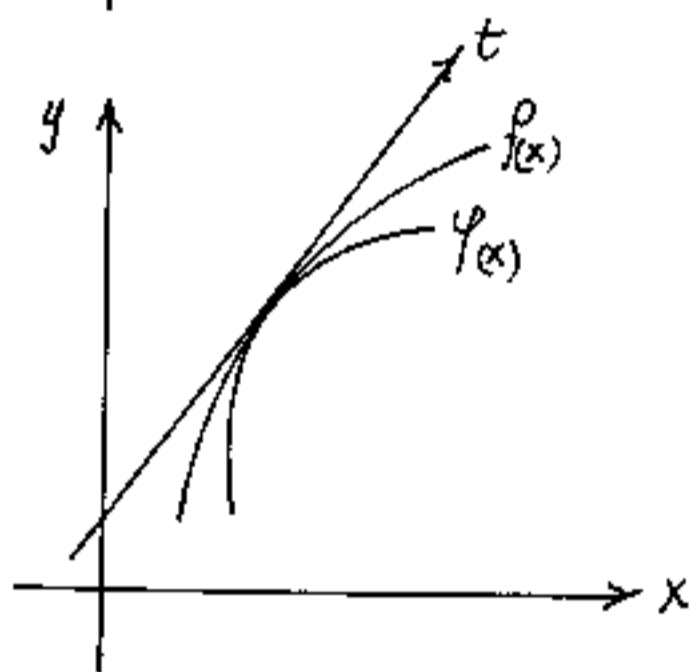
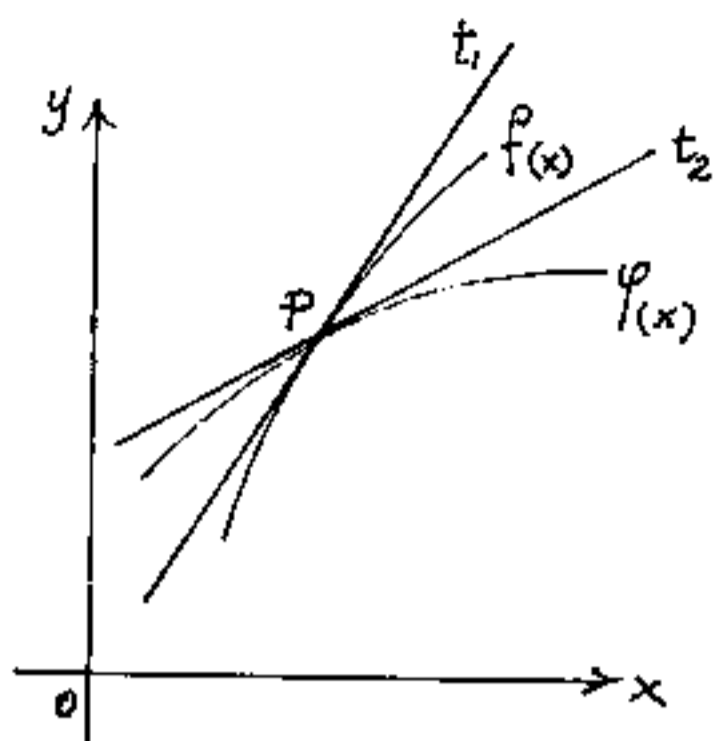
Punti angolari, o salienti, o vertici

Diconsi punti angolari, o salienti, o vertici, quei punti che uniscono due rami della curva senza che essi abbiano tangente comune. (vedasi anche vol. I



studio delle funzioni). La $y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ ha per derivata: $y' = \frac{1 + e^{1/x} + e^{1/x}/x}{(1 + e^{1/x})^2}$ ove: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y') = +\frac{1}{2}$ (asintoto $x \rightarrow \infty$), $\lim_{x \rightarrow -0} (y') = +1$; $\lim_{x \rightarrow +0} (y') = 0$;

ORDINE dei PUNTI di CONTATTO di due CURVE PIANE



Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ due curve piane aventi in comune il punto P . Cioè: $f(x_p) = \varphi(x_p)$.

Siano t_1 e t_2 le rette tangenti in P rispettivamente a $f(x)$ e $\varphi(x)$; si dice che due linee hanno un contatto di ordine " n " quando sono uguali le derivate fino all'ordine " n ". Cioè se:

$$f(x) = \varphi(x); \quad f'(x) = \varphi'(x); \quad f''(x) = \varphi''(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x); \quad f^{(n+1)}(x) \neq \varphi^{(n+1)}(x)$$

Se: $f'(x) = \varphi'(x)$ le due linee hanno la stessa tangente nel punto comune (e la stessa normale)

Se $f''(x) = \varphi''(x)$ le due linee hanno lo stesso cerchio osculatore cioè la stessa curvatura nel punto comune.

Se una terza curva $\psi(x)$ ha in P con una delle altre due curve un contatto di ordine $K < n$ anche l'altra ha lo stesso contatto dello stesso ordine essendo $f^{(K)}(x) = \varphi^{(K)}(x) = \psi^{(K)}(x)$.

Abbiamo già trattato, a proposito delle

curve osculatrici l'ordine pari e dispari dei punti comuni; vogliamo dare ora una nuova definizione di curva osculatrice.

Una linea Γ nella cui equazione compaiono k coefficienti arbitrari, si dice osculatrice di un'altra curva Γ_1 quando i coefficienti arbitrari sono scelti in modo da avere un contatto del massimo ordine (in genere; $k-1$)

Si dice che, se il contatto è di ordine dispari le due curve non si attraversano, mentre se il contatto è di ordine pari le due curve si attraversano.

Secondo questa teoria (connessa con l'accettazione dell'ordine degli infinitesimi) il cerchio osculatore, (contatto di ordine due, e quindi pari) attraversa la curva. (Naturalmente è ordine due, se le derivate terze nel punto comune sono diverse, per la catenaria ed il suo cerchio osculatore nel vertice le y''' sono entrambe nulle.)

Integrali fra limiti infiniti

Abbiamo già introdotto il concetto di integrale improprio (vedi Vol I), per la $f(x)$ che diverga all'

l'infinito, nel campo finito di integrazione. Ora

è il campo di integrazione che si estende all'

infinito. L'integrale fra limiti infiniti, può essere: convergente, divergente, o non aver significato

come abbiamo già visto per gli integrali impropri.

L'integrale: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\int_{-K}^{+K} f(x) dx \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\int_{-K}^c f(x) dx + \int_c^K f(x) dx \right]$

p. es. $\int_0^K e^{-\alpha x} dx = \left(\frac{1 - e^{-\alpha K}}{\alpha} \right)$; $\lim_{K \rightarrow \infty} (e^{-\alpha K}) = 0$ per cui $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$

$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\int_1^K \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} (\log K) = \infty$ per cui: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty$ (diverge)

$$\int_0^K \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \int_0^K \frac{d\left(\frac{bx}{a}\right)}{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab} \left(\arctg\left(\frac{b}{a} K\right) \right); \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \left(\frac{\pi}{2ab} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \left(\frac{\pi}{ab} \right)$$

Se esiste una $F(x)$ la cui derivata è $f(x)$ ed esiste

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x))$ l'integrale: $\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a)$ Fondamentale

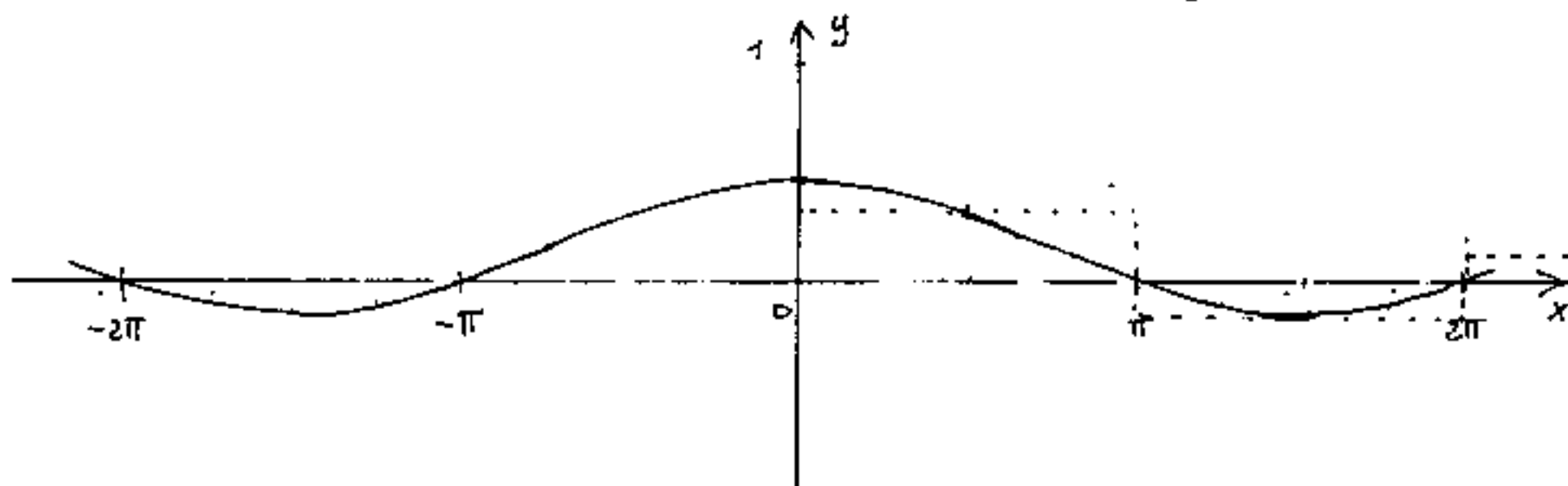
Convergenza fra limiti infiniti dedotta con metodi particolari.

Si abbia: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \cos(x) dx$

noi sappiamo che: $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0 \right) \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \right)$

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \dots \dots \dots \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Se noi consideriamo il grafico: $y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)$



notiamo che le aree comprese fra la curva e l'asse delle ascisse, sono coppie a segni alterni, per tratti base lunghi π e che vanno rapidamente diminuendo al crescere di $m\pi$. Poniamo quindi

$$(-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = a_n \quad \text{con } (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

abbiamo così la successione a segni alterni,

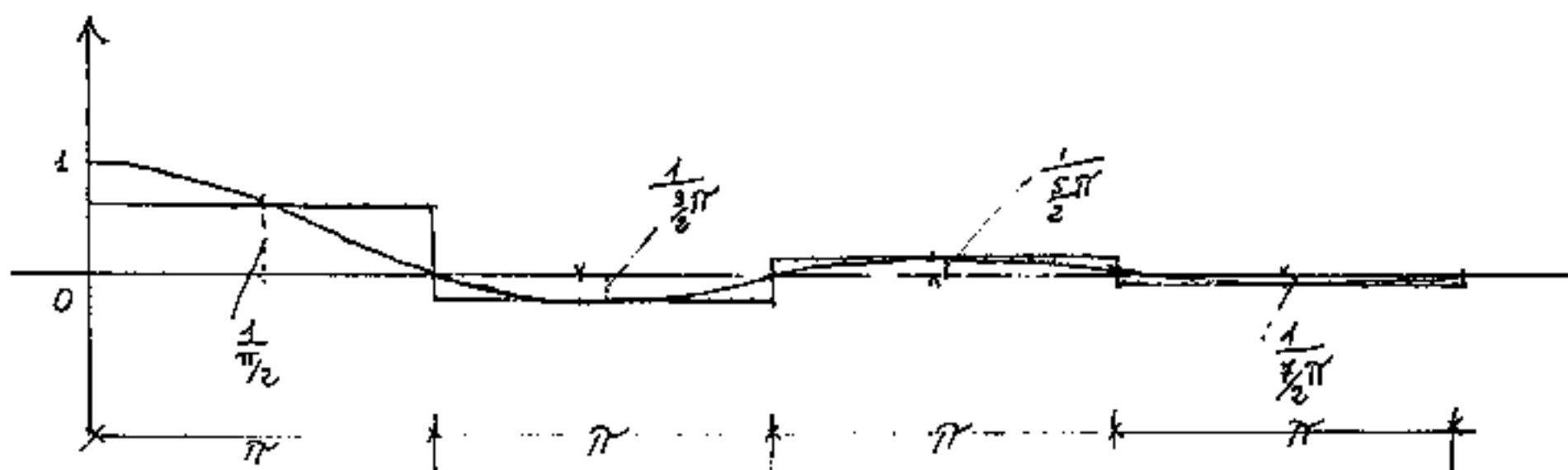
$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \quad \text{i cui termini}$$

in valore assoluto vanno rapidamente decrescendo e tendono a zero per $n \rightarrow \infty$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = |a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + \dots \pm |a_n|$$

La serie a segni alterni, a termini decrescenti, con $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, è certamente convergente.

Infatti consideriamo la serie delle aree rettangolari in figura.



avremo: $\sum_{m=0}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2}} \right) (-1)^m$ con: $(m = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$

cioè la serie:

$$2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

ma in parentesi è la serie ciclotomica = $\frac{\pi}{4}$ (vedi vol II)

per cui le nostre aree

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2}{(2m+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Si può dimostrare che anche: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Attenzione, i max ed i min di $\frac{\sin(x)}{x}$ si hanno per

$x = \text{arctang}(1)$ cioè per $x = 0,00$; $x = 4,4934094579$ rad;

$x = 7,7252518359$ rad; $x = 10,904121659$ rad; ecc. ove: $\frac{\text{tg}(x)}{x} = 1$.

Gli integrali di Fresnel

Consideriamo i due integrali: (di Fresnel)

$$\int_0^x \sin x^2 dx \quad ; \quad \int_0^x \cos x^2 dx$$

nei quali facciamo tendere il limite superiore $x \rightarrow \infty$.

Per quanto detto precedentemente: (con $m = \text{intero}$)

$$\int_0^{\sqrt{2m\pi}} \sin x^2 dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{3\pi}} \sin x^2 dx + \dots + \int_{\sqrt{(2m-1)\pi}}^{\sqrt{2m\pi}} \sin x^2 dx$$

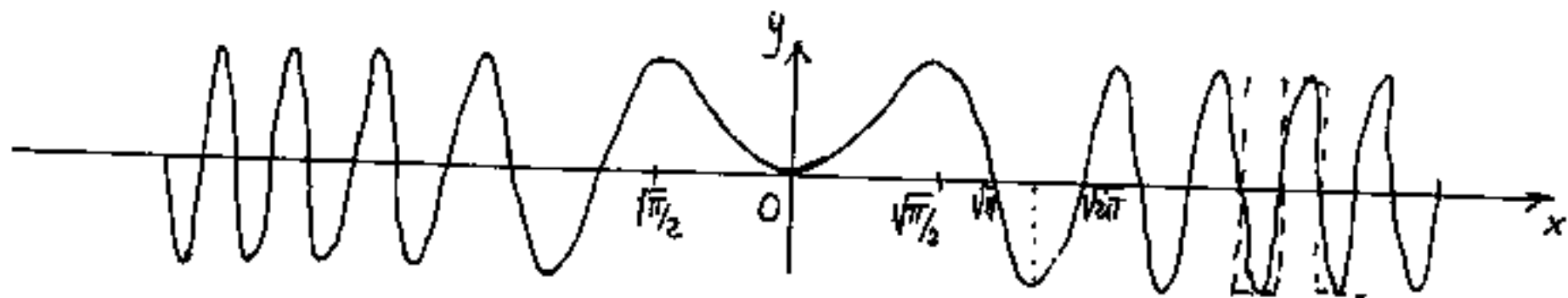
ove facciamo la serie $\{a_m\}$, poniamo ora:

$$(-1)^m \int_{\sqrt{m\pi}}^{\sqrt{(m+1)\pi}} \sin x^2 dx = a_m$$

avremo:

$$\int_0^{\sqrt{2m\pi}} \sin x^2 dx = |a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + \dots - |a_{2m-2}| + |a_{2m-1}|$$

facciamo il grafico di $\sin x^2$.



Si noti come le aree di segno alterno vadano diminuendo in valore assoluto; d'altra parte: $(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) \cdot (1)$ è l'area del rettangolo che contiene una semionda, le aree che sono > 0 e quelle < 0 , dopo un po' tendono a compensarsi:

$$+(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) - (\sqrt{(n+2)\pi} - \sqrt{(n+1)\pi}) = 2\sqrt{(n+1)\pi} - (\sqrt{n\pi} + \sqrt{(n+2)\pi}) = \sqrt{\pi} [2\sqrt{n+1} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+2})]$$

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Integrali Curvilinei

Sia Γ una linea curva in campo tridimensionale definita dalle espressioni parametriche:

$$x = x(t) ; y = y(t) ; z = z(t)$$

Consideriamo un tratto finito e continuo di tale curva, delimitato dai punti A e B , definiti rispettivamente dai valori: "a" e "b" del parametro t .

$$\text{cioè: } x_A = x(a) ; y_A = y(a) ; z_A = z(a)$$

$$x_B = x(b) ; y_B = y(b) ; z_B = z(b)$$

In funzione del punto P , variabile sulla curva Γ , esistono due funzioni $f(P)$ e $\varphi(P)$, che possiamo pensare estendersi in altre dimensioni dello spazio.

(così come: $z = f(x, y)$ avremo: $\xi = f^0(x, y, z) ; \eta = \varphi(x, y, z)$.)

Attribuiamo un verso all'arco \widehat{AB} ; ($\widehat{AB} > 0 ; \widehat{BA} < 0$)

e sia: $a < b$. Dividiamo l'arco \widehat{AB} in "n" parti: s_1, s_2, \dots, s_n ; Sia:

$P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_n = B$ i punti di divisione determinati

dai parametro; rispettivamente: $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n = b$.

(ove: $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$). L'intervallo (o incremento) del pa-

rametro sia: $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ (per arrivare a t_i),

e sia $P_i = (x_i, y_i, z_i)$. A questo intervallo Δ_i

che corrisponde il tratto di arco: $\widehat{P_{i-1} P_i} = s_i$ della

curva Γ , corrisponde anche un intervallo o incremento

nelle funzioni $\varphi(P)$ ed $f(P)$, avremo cioè:

$$\Delta_i \varphi = \left(\varphi(P_i) - \varphi(P_{i-1}) \right) = \left[\varphi(x_i, y_i, z_i) - \varphi(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) \right]; \text{ ove: } x_i = x(t_i); y_i = y(t_i); z_i = z(t_i).$$

$$\Delta_i f = (f(P_i) - f(P_{i-1})) = (L_i - l_i) \text{ ove } l_i \text{ ed } L_i,$$

sono i limiti della $f(P)$ nell'archetto " s_i " di Γ

Sia: " f_i " un numero qualsiasi compreso fra l_i ed L_i

cioè: $l_i \leq f_i \leq L_i$. (E' appena il caso di aggiungere

un esempio dimensionale: sia t_i un numero puro, cui

corrisponde geometricamente il punto P_i di Γ , e sia

$\delta_i = t_i - t_{i-1}$ l'incremento di t , ancora numero puro,

a cui corrisponde l'archetto $s_i = \widehat{P_i P_{i-1}}$ dimensiona-

bile in misure di lunghezza ed a cui corrisponde

l'intervallo: $(L - l)$ della $f(P)$ dimensionabile in altra

dimensione fisica per esempio kg. all'interno del quale considero

una " f_i " (una specie di funzione di funzione).

Consideriamo ora le somme:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} (f_i) (\Delta_i \varphi)} \quad \text{ove (ripetiamo) } (l \leq f_i \leq L); \quad \Delta_i \varphi = (\varphi_{P_i} - \varphi_{P_{i-1}}).$$

Se facciamo tendere n ad infinito e quindi

a zero gli archetti: s_i , ed al limite esiste ed è

finito il valore delle somme di cui sopra, cioè

esiste un numero: $I_{A,B}$ che è tale valore, chiameremo

$I_{A,B}$ l'integrale curvilineo della $f(P)$

nel differenziale della $\varphi(P)$, nel tratto

A,B della curva Γ

$$I_{A,B} = \int_{A,B} f \cdot d\varphi \quad ; \quad \text{od anche: } \boxed{I_{A,B} = \int_{\Gamma} f \cdot d\varphi}$$

Possiamo anche scrivere:

$$I_{\widehat{AB}} = \int f(P_t) d\varphi(P_t) = \boxed{I_{AB} = \int_a^b f(P_t) \varphi'(P_t) dt}$$

Ma $P(t) \rightarrow x_P = x(t) ; y_P = y(t) ; z_P = z(t)$

$$I_{\widehat{AB}} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot d\varphi(x(t), y(t), z(t)) =$$

$$I_{\widehat{AB}} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} x'(t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'(t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'(t) dt \right]$$

che può scindersi nella somma di tre integrali

$$\boxed{I_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_{\widehat{AB}} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \int_{\widehat{AB}} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz}$$

Facciamo un esempio:

L'elica: $x = R \cos(t) ; y = R \sin(t) ; z = K \cdot t$

arco \widehat{AB} definito da: $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; per $t=0 \rightarrow x=R$; $t=\frac{\pi}{2} \rightarrow x=0$

Le due funzioni siano: $f(P) = x^2$; $\varphi(P) = x+y+z$; $P \equiv (x, y, z)$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1$$

$$\begin{aligned} \boxed{\int_{\widehat{AB}} f \cdot d\varphi} &= \int_{\widehat{AB}} f \cdot dx + \int_{\widehat{AB}} f \cdot dy + \int_{\widehat{AB}} f \cdot dz = \int_R^0 x^2 dx + \int_0^{\pi/2} (R \cos(t))^2 dy + \int_0^{\pi/2} (R \cos(t))^2 dz = \\ &= \int_R^0 x^2 dx + \int_0^{\pi/2} (R^2 \cos^2 t) d(R \sin t) + \int_0^{\pi/2} (R^2 \cos^2 t) d(Kt) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_R^0 + R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt + KR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{-R^3}{3} + R^3 \frac{2}{3} + KR^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{R^2}{12} [4R + 3K\pi]} \end{aligned}$$

$$\left(\int \cos^2 t dt = \int \cos t d \sin t = \int (1 - \sin^2 t) d \sin t = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C \right)$$

Integrali curvilinei estesi ad una curva chiusa.

Se l'integrale: $I_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} f d\varphi$ si integra per parti

$$\text{avranno: } \int_{\overline{AB}} f d\varphi = [f \cdot \varphi]_A^B - \int_{\overline{AB}} \varphi df$$

se l'arco \widehat{AB} si richiude su se stesso, cioè $A=B$

il termine $[f \cdot \varphi]_A^B = 0$ per cui:

$$\oint f d\varphi = - \oint \varphi df$$

(col simbolo \oint intendiamo: "integrale esteso a tutto il ciclo")

Calcolo delle aree delimitate da circuiti chiusi, mediante integrali curvilinei.

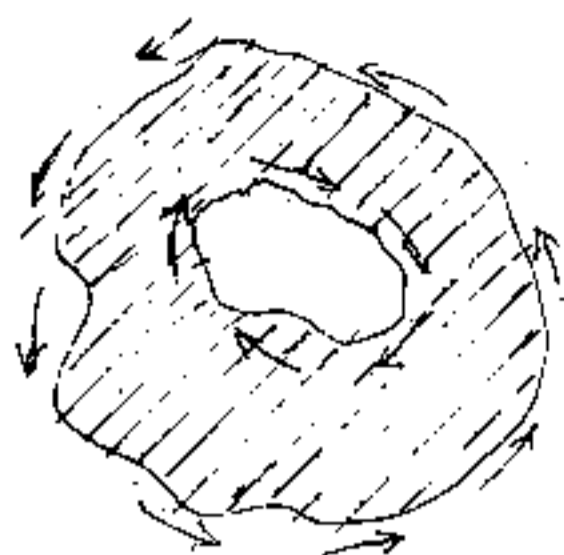
Il circuito non deve essere intrecciato e deve essere piano, definito da: $x = x(t)$; $y = y(t)$.

con t variabile nell'intervallo a, b : $a \leq t \leq b$

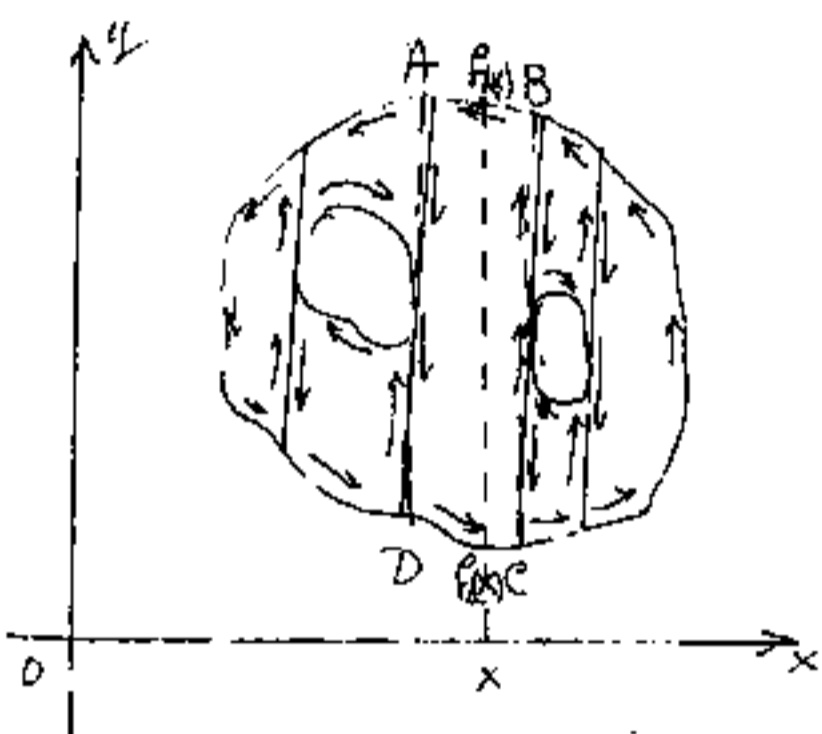
ai limiti avremo: $x(a) = x(b)$ ed $y(a) = y(b)$ coincidono affinché la curva sia chiusa, e non può avvenire per valori intermedi, se non è intrecciata.

Assumiamo, come verso positivo, il cammino antiorario sul circuito: in modo che un osservatore, che percorra il circuito in tal senso, avrà l'area da misurare sempre alla sua sinistra; mentre saranno da sottrarre le

aree delimitate da circuiti percorsi nel verso opposto.



Si noti che un'area di tal genere può essere scomposta in aree delimitate sia dalle linee dei circuiti sia dalle linee delle ordinate, rispettando i versi orari e antiorari per considerare le aree negative o positive e farne la somma algebrica. (come si vede nella figura a fianco).



Si noti che una di tali aree

come la ABCD può essere espressa da: $\int (f_1(x) - f_2(x)) dx$ che può scriversi $\int_{\widehat{AB}} f(x) dx - \int_{\widehat{DC}} f(x) dx$ ed anche:

$$-\int_{\widehat{BA}} f(x) dx - \int_{\widehat{DC}} f(x) dx \quad \text{ed essendo: } \int_{\widehat{CB}} f(x) dx = 0; \int_{\widehat{AD}} f(x) dx = 0$$

L'area del circuito: -ABCD sarà:

$$A = -\int_{\widehat{DC}} f(x) dx + \int_{\widehat{CB}} f(x) dx - \int_{\widehat{BA}} f(x) dx - \int_{\widehat{AD}} f(x) dx =$$

$$A = -\int_{\Gamma} y dx$$

Abbiamo visto che per circuiti chiusi: $\int_{\Gamma} f dy = - \int_{\Gamma} \varphi df$
 avremo per la formula trovata:

$$\int_{\Gamma} x dy = - \int_{\Gamma} y dx = A$$

ed anche sommando:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x dy - y dx)$$

Se poniamo: $t = \frac{y}{x}$ avremo: $dt = \frac{x dy - y dx}{x^2}$

cioè: $(x dy - y dx) = x^2 dt$ sostituendo:

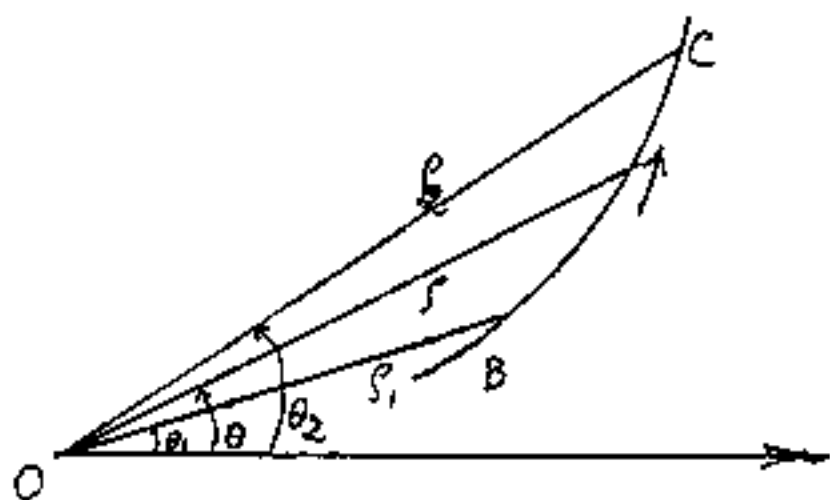
$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x^2 dt$$

Importante formula per il calcolo dell'Area di un circuito chiuso.

(un'area è sempre delimitata da un circuito chiuso (continuo o discontinuo))

Utilizzeremo questa formula per il calcolo della Cissoide, dell'area del cappio del folium di Cartesio ecc. A cui si rimanda per gli esempi.

Aree dei settori in coordinate polari



Il circuito sia riferito ad un sistema di coordinate polari, ove:

$$x = \rho \cos \theta ; y = \rho \sin \theta$$

e siano ρ e θ funzioni di un parametro t .

Avremo anche: $dx = \cos \theta \cdot d\rho - \rho \sin \theta d\theta$

$$dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

e quindi ricordando: $A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\rho \sin \theta \cos \theta d\rho + \rho^2 \cos^2 \theta d\theta - (-\rho \sin \theta \cos \theta d\rho + \rho^2 \sin^2 \theta d\theta)) =$
 (vedi sopra)

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho^2 d\theta$$

Si noti che il cerchio in coordinate polari è $\rho = R$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$; da cui: $A = R^2 \pi$

Qualora l'area sia limitata al settore OBE
 (vedi figura) delimitato dai segmenti $OB = \rho_1$, $OC = \rho_2$
 e dall'arco di curva \widehat{BC} di equazione $\rho = \rho(\theta)$ con
 θ variabile: $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

Essendo: $\int_{OB} \rho^2 d\theta = 0$; $\int_{CO} \rho^2 d\theta = 0$ avremo: $\int_{BC} \rho^2 d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$

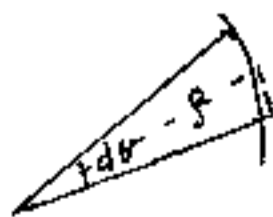
per cui l'area
 sarà:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

Occorre fare attenzione qualora si applichi la
 formula ad una spirale, al primo giro occorre calcolare
 l'integrale; perché se l'area si estende
 al secondo giro, l'area del I sarebbe calcolata
 due volte e va sottratta, analogamente se si estende al
 terzo giro occorre togliere due volte l'area del I giro ed
 una volta l'area del secondo, e così via.



Si potera arrivare alla formula molto più
 semplicemente considerando che la lunghezza
 infinitesima di arco $ds = \rho d\theta$ può considerarsi base di
 un triangolo di altezza ρ e quindi di
 area elementare $dA = \frac{\rho \cdot ds}{2}$. Da cui
 sostituendo: $A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta$.



Gli operatori funzionali

Abbiamo già trattato il concetto di operatore in matematica (Cfr. I Vol.), cioè gli operatori aritmetici, algebrici, ecc. evidenziando il tipo di operatore monadico che trasforma un numero in un altro numero. Consideriamo l'operatore "log" (logaritmo) $\log(x) = a$, agisce su "x" e lo trasforma in "a". Questo operatore algebrico agisce su quantità numeriche e le trasforma in altre quantità numeriche. Tale operatore consente di esplicitare e risolvere incognite in equazioni altrimenti risolte per tentativi per es: $a^x = b$, se con l'operatore "log" si risolve per tentativi, mentre $x = \log(b) / \log(a)$ e dalle tavole o con un regolo calcolatore o con un comune calcolatore elettronico il risultato è immediato.

Vogliamo ora trattare gli operatori funzionali, che agiscono su funzioni e non su numeri; alcuni li abbiamo già trattati senza darle l'appellativo di operatori; per esempio le derivate; i differenziali; gli integrali; ecc. Ma ve ne sono dei nuovi, parlo degli operatori del Brogi che hanno consentito di

esplicitare e risolvere incognite in equazioni a tutt'oggi risolte per tentativi. Alcuni casi sono stati pubblicati (Cfr. Bollettino degli Ingegneri - (organo ufficiale del Collegio Ingegneri della Toscana) N° 12 anno 1972 - N° 2/3 e N° 12 anno 1977.) Ed è stata verificata sperimentalmente la loro validità. (Cfr. Bollettino Ingegneri N° 7/8 anno 1981)

Gli operatori del Brogi consistono in una operazione aritmetica fra la funzione e l'argomento: $sf(x) = f(x) \cdot x$; $df(x) = f(x) - x$; $Pf(x) = (f(x))(x)$; $ra f(x) = f(x)/x$.

Il più importante è forse il $ra f(x) = \frac{f(x)}{x}$ il "ra" è quindi il rapporto fra la funzione e l'argomento, è come la definizione di derivata: $\frac{df(x)}{d(x)}$ a cui siano tolti i simboli di differenziale. Per esempio $ra \sin(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
 $ra \log(x) = \frac{\log(x)}{x}$. (intendiamo "log" in base e cioè "ln")

Esattamente come per le derivate si può verificare il caso che l'argomento sia funzione della variabile (X); cioè la funzione data sia: funzione di funzione, in tal caso:

$$\frac{d(\log \tan x)}{d(\tan x)} = \frac{1}{\tan x}; \quad \frac{d(\tan x)}{d(x)} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \frac{d(\log \tan x)}{dx} = \frac{1}{\tan x \cos^2 x}$$

$$\frac{d(\log \tan x)}{dx} = \frac{1}{\sin x \cos x}. \quad \text{Nel caso del "ra" occorre che}$$

l'argomento sia evidenziato (magari con parentesi)

Negli integrali (funzioni inverse delle derivate) l'argomento differenziale rispetto a cui si integra è evidente: $\int \frac{dtgx}{tgx} = \log tgx + c$.

$$\int \frac{dx}{\tan x \cdot \cos x} = \log tgx + c \quad \text{infatti} = \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\text{ralog}tg(x) = \frac{\log tgx}{x} = K_2; \quad \text{ralog}(tgx) = \frac{\log(tgx)}{tgx} = K_1$$

Mentre le parentesi, in qualche modo, evidenziano l'argomento nelle rispettive funzioni inverse, non potremo scrivere: $\text{argralog}tg[K_1]$. La cosa migliorerebbe se scrivessimo:

$$\text{argralog}(tgx)[K_1] = tgx; \quad \text{argralog}tg(x)[K_2] = x$$

in effetti: $\text{argralog}[K_1] = tgx$.

Quando può diventare poco comprensibile l'espressione algebrica, nel caso di funzione di funzione, si può sempre fare il cambio di variabili: posto: $tgx = u$; $\text{ralog}(u) = K_1$; $\text{argralog}[K_1] = u$.

Il Prof. Giovanni Sansone ci ha più volte sollecitato a trovare tutte le correlazioni del "ra" per farne un'algebra, come esistono i calcoli trigonometrici o logaritmici, ed un giorno di fronte alla nostra perplessità, staccò un foglietto del calendario, (che riproduciamo) e con pochi passaggi dimostrò che:

$$\text{raversh}(x) = \text{rarsinh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

scritto il 13-X-72
Dal Prof. Giovanni Sannarè

SETTEMBRE
MARTEDI
ss. Cosma e Damiano

26

$$\frac{e^x + e^{-x} - 1}{2} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}$$

$$= \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2}{2}$$

$$= \frac{2 \sinh^2 \frac{x}{2}}{2}$$

$$\frac{e^x}{2} \quad \frac{e^{-x}}{2}$$

Il Prof. Sannarè
ha dimostrato che
ca. versh x = cosh x
e basta moltiplicare per
e^{x/2} / x

cioè essendo:

$$\text{ca. versh}(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 1}{2x}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x} =$$

$$= \frac{(e^{\frac{x}{2}})^2 + (e^{-\frac{x}{2}})^2 - 2e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2x} =$$

il numeratore è un
quadrato perfetto

$$= \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2}{2x} =$$

$$= \frac{[2(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2})]^2}{2x} =$$

$$= \frac{2^2 \sinh^2 \frac{x}{2}}{2x}$$

$$= \frac{\sinh^2(\frac{x}{2})}{(x/2)}$$

perciò: $\text{ca. versh}(x) = \text{ca. senh}^2(\frac{x}{2})$

Questa correlazione è stata da noi utilizzata per il calcolo dei cavi tesi con appoggi a dislivello "h" e distanza orizzontale "d" per funi lunghe l, ove la configurazione assunta dalla fune (catenaria = $y = a \cosh \frac{x}{a}$) può essere disegnata conoscendo "a"

$$a = \frac{d}{2 \operatorname{arccosh}(\sqrt{\frac{l^2 - d^2}{d^2}})}$$

La posizione degli assi cui è riferita la catenoria è determinata dalle coordinate dei punti di attacco: A, e B, espresse da:

$$X_A = a \ln \left| \left(\frac{a}{l-h} \right) (1 - e^{-d/a}) \right|$$
$$Y_A = a \cosh \left(\frac{X_A}{a} \right)$$

$$X_B = X_A + d$$
$$Y_B = Y_A + h$$

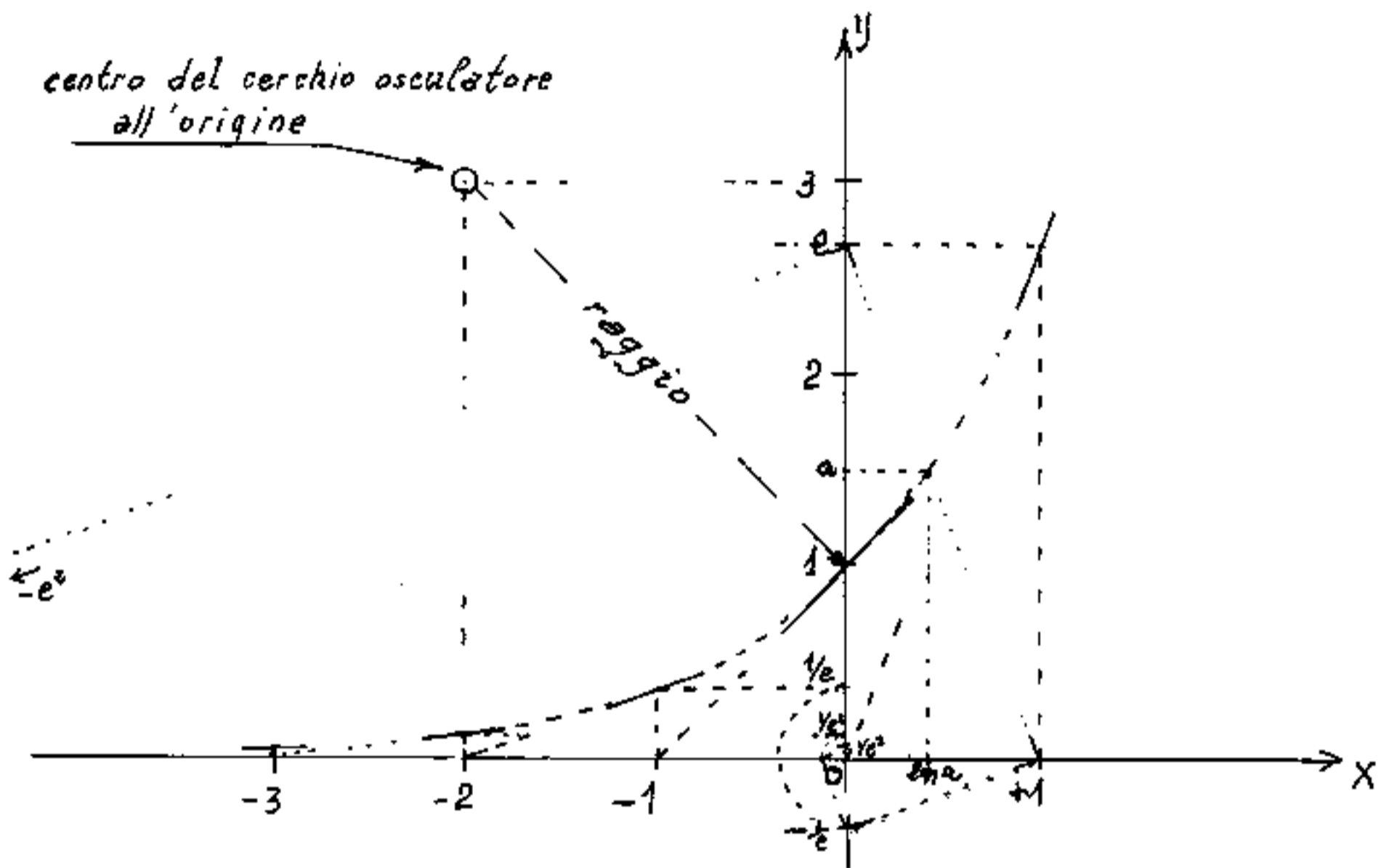
La $f(x)$ e la x possono avere dimensioni fisiche anche diverse fra loro, il problema si trova negli stessi termini per le derivate, è il problema di riduzione all'unità: "la velocità è lo spazio percorso nell'unità di tempo" (il "ca" dà la velocità media; le derivate la velocità istantanea).

È chiaro quale importanza possa assumere nella fenomenologia fisica l'operatore "ca".
Torneremo sull'argomento.

La curva esponenziale

È la rappresentazione grafica della funzione: $y = e^x$. Se teniamo conto che: $y' = e^x$, la costruzione della curva è facilitata.

Fissato il modulo unitario del grafico e tracciati gli assi di riferimento, si possono fissare i



punti: $x = 0 \rightarrow y = 1$; $x = 1 \rightarrow y = e$. In ogni punto della curva, la pendenza in quel punto, o tangente alla curva, può tracciarsi unendo quel punto (di ascissa x) con l'ascissa: $(x-1)$ ($y=0$) abbiamo così la curva involupata dalle tangenti. ($y/x = \text{tg} \alpha = y_1 = y/x_1$).

Ma noi, dato il modulo unitario sappiamo costruire il reciproco di ogni segmento, ove

il modulo = 1 è l'altezza di un triangolo rettangolo, riferita all'ipotenusa, ove le proiezioni dei cateti, sono il reciproco l'una dell'altra. (Euclide II)

Unito $(x=0; y=e)$ con $(x=+1; y=0)$ e da quest'ultimo punto tracciamo la perpendicolare che incontrerà l'asse delle ordinate nel punto: $(x=0; y=-\frac{1}{e})$

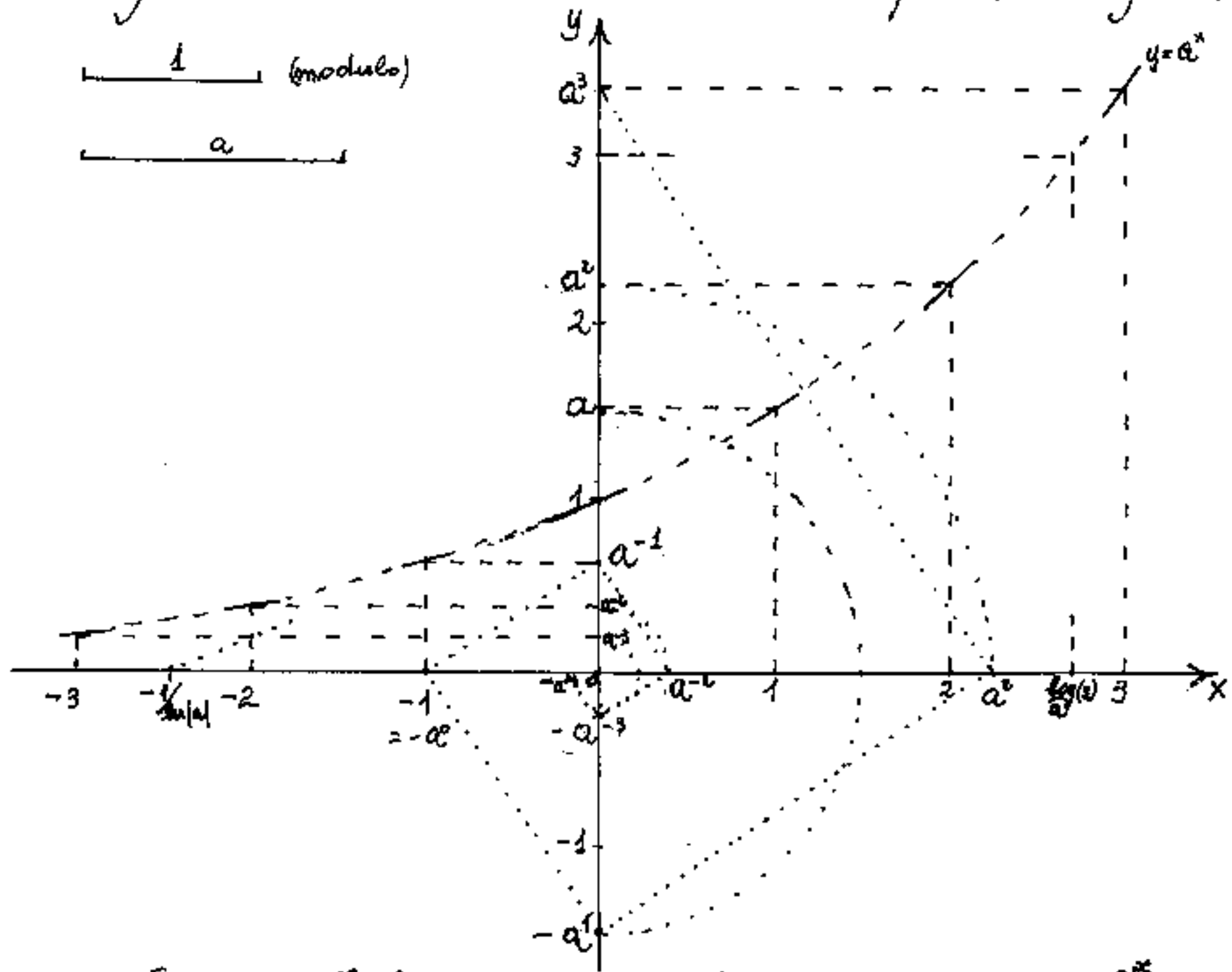
Nel I volume abbiamo insegnato come si trovano le potenze di un segmento quando sia noto il modulo o segmento unitario; per cui, continuando a tracciare perpendicolari, delimitiamo sugli assi i segmenti: $\frac{1}{e} = e^{-1}$; $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$; $\frac{1}{e^3} = e^{-3}$; ecc. che riportiamo in ordinate dai punti di ascissa $x=-1$; $x=-2$; $x=-3$; ecc, ed unendo i punti della curva con le ascisse: $(x-1)$ troviamo le tangenti alla curva, cioè le pendenze della curva in quei punti.

Anche dal punto: $(x=0; y=e)$ possiamo tracciare la perpendicolare alla retta che unisce questo punto con: $(x=-1; y=0)$ e troveremo in ascisse e^2 ; con una successiva perpendicolare troveremo in ordinate: $-e^3$, continuando troveremo in ascisse: $-e^4$ e così via. Ma le potenze del segmento: "e" escono presto dal foglio,

perciò allo scopo di evidenziare graficamente il procedimento, tracciamo la curva: $y = a^x$

con a poco superiore all'unità: $a = 1,50$.

Non è necessario specificare misure, basta tracciare due segmenti, cioè il segmento "a" ed il segmento modulo unitario. ed è possibile: $y = a^x$.



Poiché $y' = a^x \cdot \ln|a|$ che può scriversi: $y' = \frac{a^x}{\frac{1}{\ln|a|}}$ è facile tracciare le pendenze; (il segmento $\ln|a|$ può ricavarsi dalla precedente curva ove: $e^{\ln|a|} = a$).

Ovviamente, da questa curva, leggendo in ordinate i numeri, in ascisse leggiamo i rispettivi logaritmi in base a .

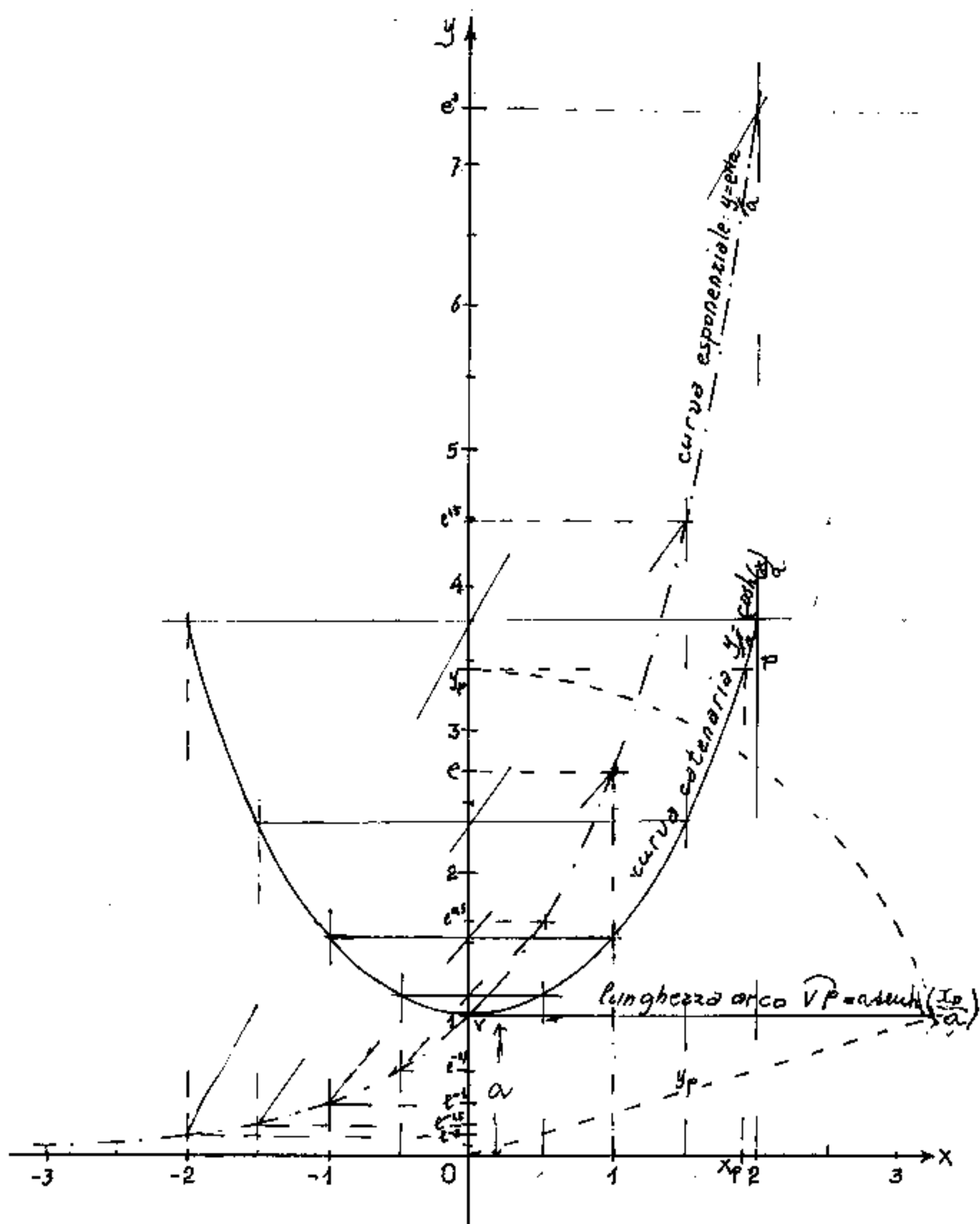
Ricordando che il raggio di curvatura di una $y = f(x)$ è dato da $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, nel caso della $y = e^x$, si ha: $R = \frac{(1+e^{2x})^{3/2}}{e^x}$, che per $x=0$ diventa: $R_{(0)} = \frac{(1+1)^{3/2}}{1}$, cioè: $R_{(0)} = (2)^{3/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cioè il raggio di curvatura per $x=0$ della $y = e^x$ è la diagonale di un quadrato di lato 2 facilmente costruibile perché la diagonale (normale alla tangente) è a 45° rispetto agli assi x ed y , cioè le coordinate del centro del cerchio sono: $C_0 = (-2; +3)$. (vedi figura).

La curva esponenziale è importantissima perché scambiando gli assi otteniamo la curva logaritmica dei logaritmi naturali o neperiani: $x = \ln |y|$.

La curva esponenziale permette di tracciare le curve delle funzioni iperboliche $y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cioè per ogni x e $(-x)$ il valore del coseno iperbolico è la media fra $y = e^x$ ed $y = e^{-x}$ e poiché l'asse y è simmetrico fra $+x$ e $-x$, basta unire $y_1 = e^x$ con $y_2 = e^{-x}$ e leggere sull'asse y il valore del coseno iperbolico e riportarlo in ordinate su (x) e su $(-x)$ ottenendo così la curva detta "catenaria" (di modulo 1).

Costruzione grafica della curva catenaria

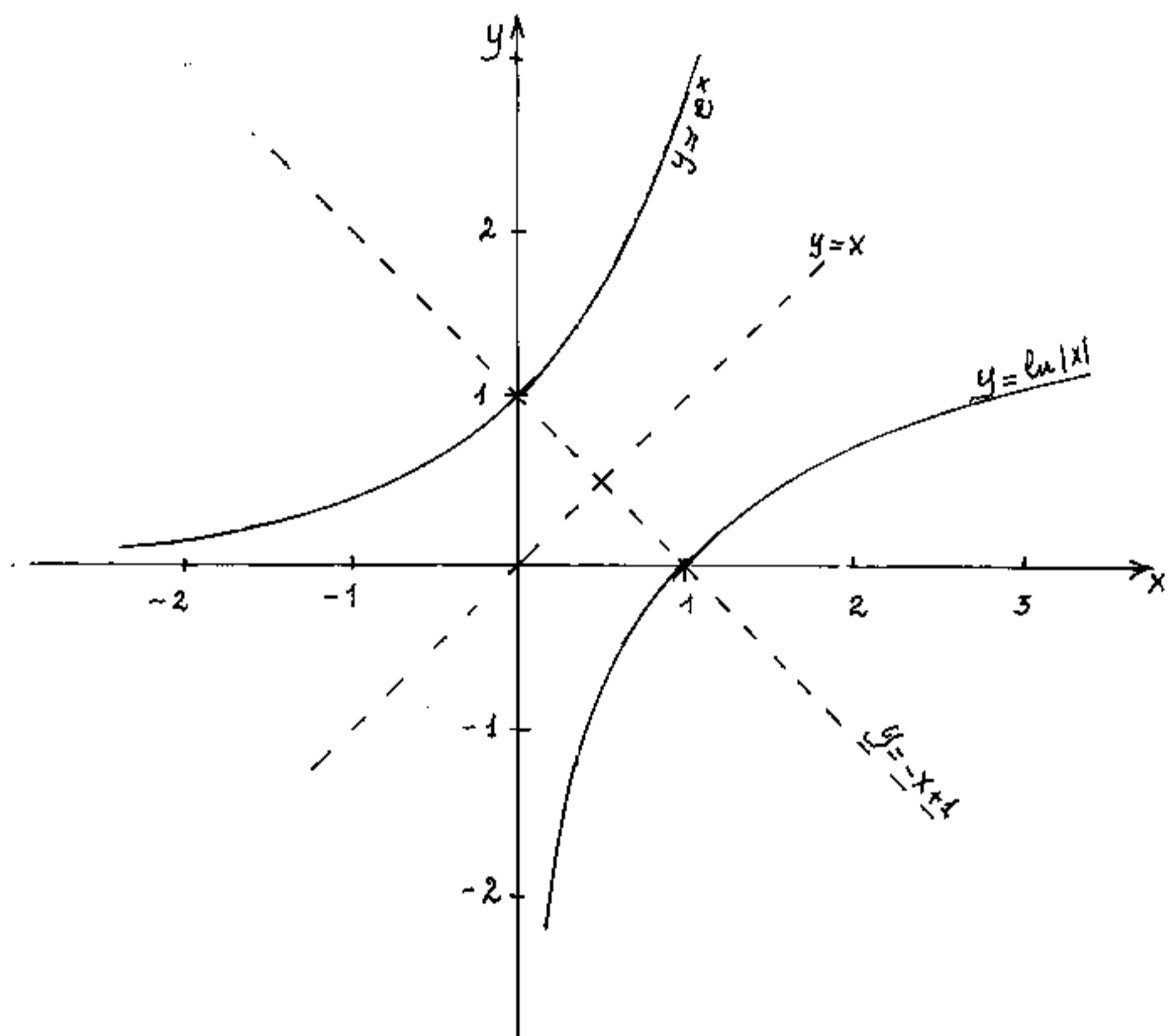
data $y = e^x$



Ricordiamo che la catenaria si usa scrivere $y = a \cosh(x/a)$
ove "a" è il modulo unitario nel nostro caso $a = \overline{OV}$.

La curva logaritmica

Abbiamo già visto che la curva logaritmica è la curva esponenziale ad assi scambiati:

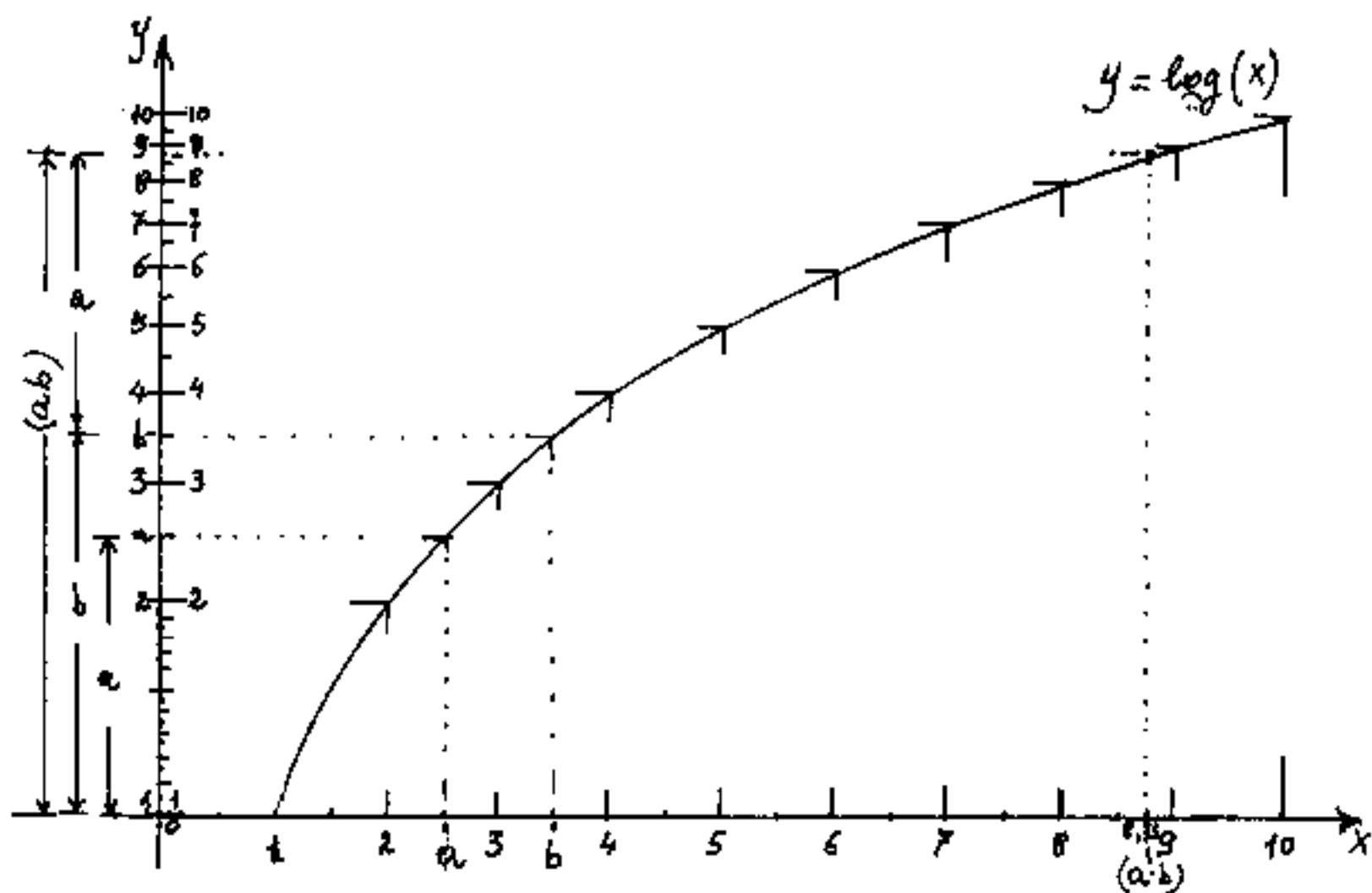


Si noti la simmetria delle due curve rispetto alla: $y=x$, però non sono simmetriche rispetto alla: $y=-x+1$; infatti il ramo a sinistra ammette un asintoto finito, (l'axe (-x) per e^x ; l'asse (-y) per $\ln|x|$), i rami a destra l'asintoto è all'infinito (indefinito) ortogonale al precedente.

Il regolo calcolatore logaritmico

Supponiamo di aver disegnato con molta accuratezza la curva logaritmica, e di graduare l'asse delle ordinate con i numeri che generano le rispettive quantità logaritmiche. (come in figura)

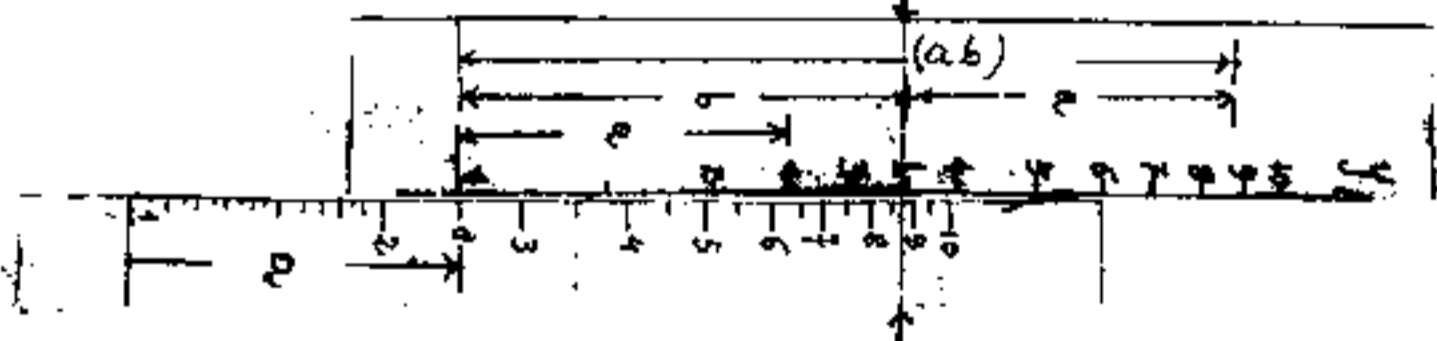
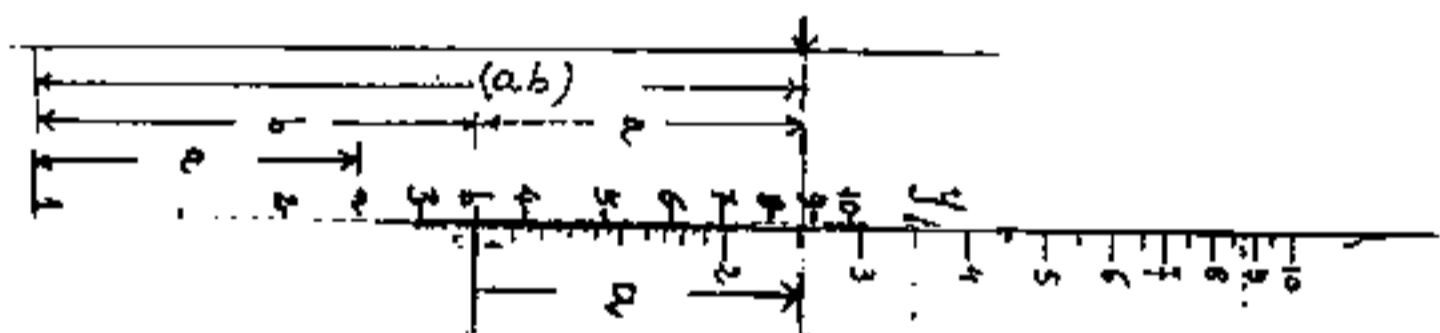
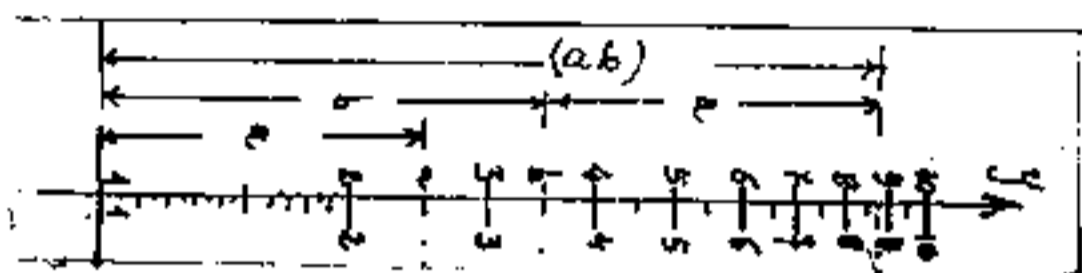
Poiché cambiando base cambia solo la scala delle ordinate e restano le relazioni: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
 $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$; $\log(a)^m = m \log(a)$.



In ordinate notiamo che se al segmento indicato con: $(b) = (3.5)$ aggiungiamo il segmento: $(a) = (2.5)$ otteniamo un segmento che è $(a \cdot b) = (8.75)$; infatti: $(2.5) \cdot (3.5) = (8.75)$.
Il segmento delle ordinate dei logaritmi da 1 a 10 può essere amplificato a piacere cambiando scala, a parità di ascisse cambiando base logaritmica:

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)} = \frac{\log(x)}{\log(a)} \cdot \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

Se su una striscia di carta riportiamo le graduazioni delle ordinate numerandole da due parti, come abbiamo già fatto, e tagliamo la striscia di carta lungo l'asse, le due parti della striscia di carta possono slittare, rimanendo a contatto con l'asse e possiamo materialmente fare la somma dei segmenti a e b .



Si noti che "b" della scala soprastante ed "a" della scala sottostante fa leggere $(ab) + (ba) = (ba)$ nella scala soprastante. Mentre "a" della scala sottostante e "b" della scala soprastante fanno leggere $(a)(b) = (ab)$ nella scala sottostante, ed $(ab) = (ba)$.

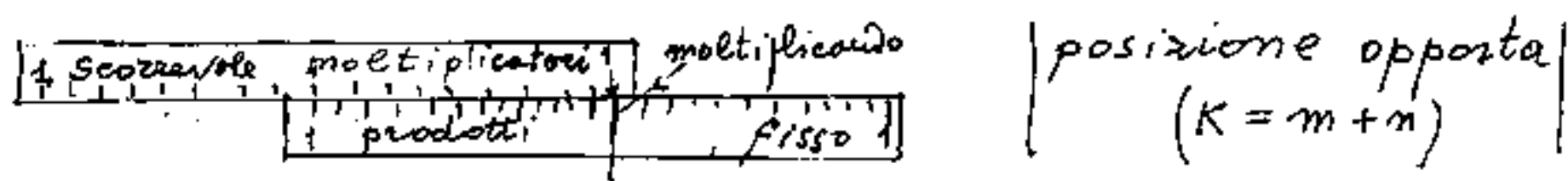
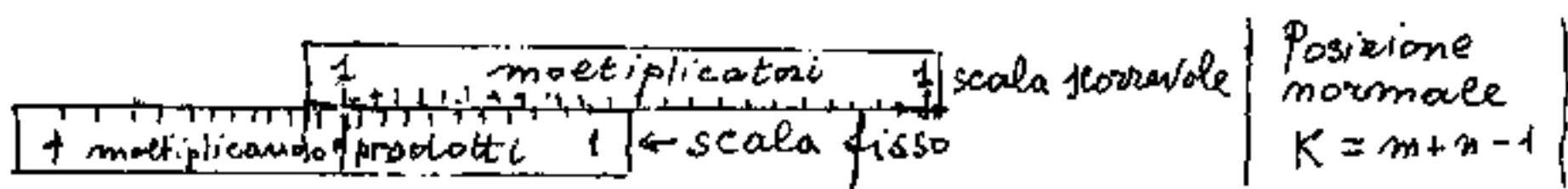
Pero' notiamo che se "a" e "b" li volessimo moltiplicare per 5, il risultato sarebbe fuori scala.

Inoltre se "a" fosse stata: 25 o 250 o 2500 anziché 2,5 come si poteva tenerne conto?

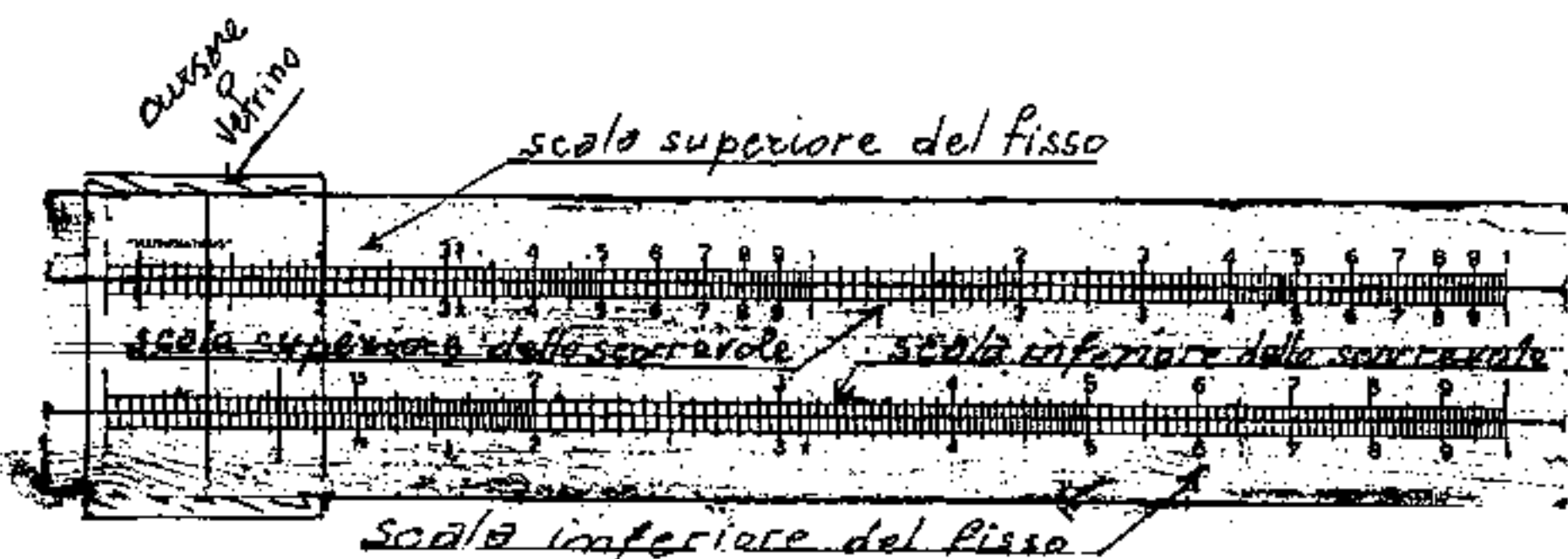
È ovvio che bisogna fissare delle regole:

La scala inferiore è considerata del fisso su di essa si individua il moltiplicando sul quale si fissa l'inizio (1) della scala soprastante che è l'inferiore dello scorrevole, ogni valore dello scorrevole è un moltiplicatore che si trova in corrispondenza del prodotto da leggersi sulla scala del fisso.

Se "a" ha un numero "m" di cifre prima della virgola, e se "b" ha "n" cifre prima della virgola, se K è il numero di cifre del prodotto (prima della virgola)



Nei regoli calcolatori al posto del 10 figura 1



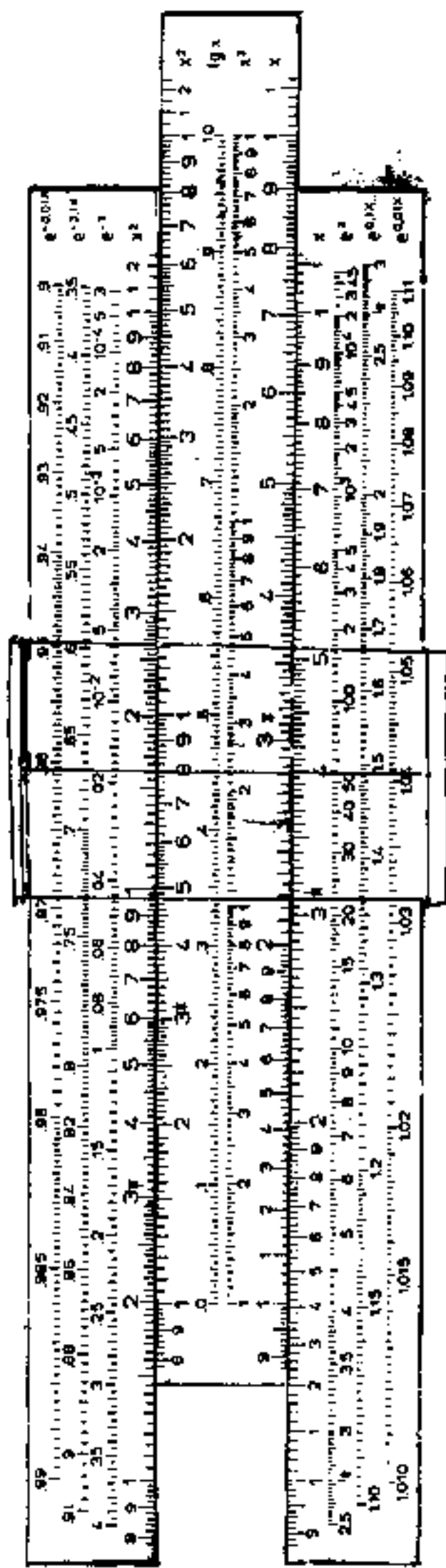
Le scale essenziali sono praticamente due; la inferiore che è la fondamentale e la superiore che, essendo doppia, rappresenta i quadrati, ma possono essere anche molteplici come nel regolo a fianco ove si sta' moltiplicando sulla

inferiore $\sqrt{2}$ ottenuto dalla superiore e $\sqrt{8}$ pure ottenuto dalla superiore e l'ovvio risultato "4" è indicato dal vetrino.

Analogamente si può dire per la divisione: se al segmento $\log(4)$ tolgo $\log(\sqrt{8})$ ottengo il segmento $\log(\frac{4}{\sqrt{8}}) = \log \sqrt{2}$. cioè posto il vetrino sul 4 della inferiore si fa coincidere con l'8 della superiore dello scorrerole, l'1 della inferiore dello scorrerole indica il valore 1,4142... cioè l'uno

della scala superiore dello scorrerole indica 2 quindi

$\frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$. I valori della scala inferiore dello scorrerole sono i moltiplicatori di $\sqrt{2}$ i cui prodotti si leggono sul fisso.



Si notano le scale esponenziali, la scala dei logaritmi in base 10, e la scala dei cubi. Sul retro vi sono le scale delle funzioni trigonometriche: $\sin(x)$; $\cos(x)$; $\tan(x)$; $x \cdot \pi$ ecc. Alcuni regoli riportano anche la scala dei $\log(\log(x))$ mediante la quale è possibile calcolare qualsiasi potenza anche ad esponente frazionario, infatti:

$$\lg \log a^x = \lg(x \log a) = (\lg x + \log \log(a)).$$

Vi sono regoli che riportano scale tecniche per calcoli elettrici, economici, meccanici, ecc.

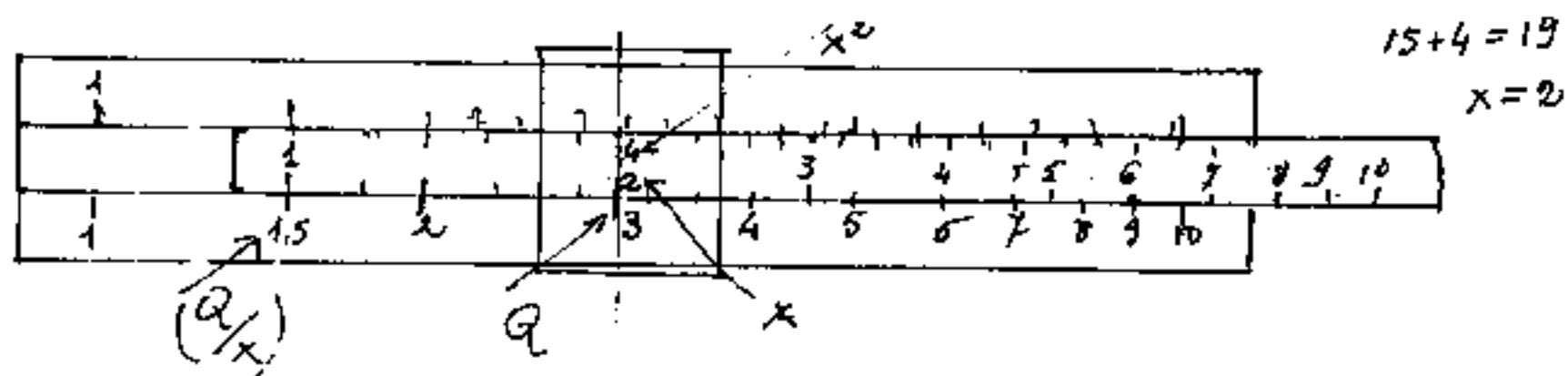
Fra i molti giochi che sono possibili col regolo calcolatore riportiamo un metodo per trovare la radice reale nelle equazioni ridotte alla forma:

$$\underline{X^3 \pm PX \pm Q = 0} \quad \text{oppure:} \quad \underline{X^3 \pm HX^2 \pm K = 0}$$

trasformiamo: l'equazione prima in: $\boxed{X^2 \pm \frac{Q}{X} = P}$

esempio numerico: $(x^3 - 19x + 30 = 0 \text{ diventa } \boxed{x^2 + \frac{30}{x} = 19})$

Fissato Q sulla scala inferiore del fisso vi si fa scorrere i valori della scala inferiore dello scorrevole che col suo "1" indica $\frac{Q}{x}$ mentre il filo del vetrino indica x^2 sulla scala superiore dello scorrevole; sommando ad x^2 il valore $\frac{Q}{x}$ dobbiamo avere P . Nel nostro caso: $\frac{30}{2} = 15$



continuando a spostare lo scorrevole arriviamo

$$a: \frac{30}{3} = 10 \text{ ove } 3^2 = 9 \text{ e } 10 + 9 = 19 \text{ per cui } \boxed{X_2 = 3}$$

Se vi sono due radici reali, è reale anche la terza.

Continuando a spostare lo scorrevole si arriva

ad $x = 4,36 = \sqrt{19}$ cioè $x^2 = 19 > 0$, ovvio che la x de
ve in valore assoluto, ma dovrà essere $x < 0$, per
soddisfare la relazione. Infatti per $x = 5$ si ha

$$\frac{30}{5} = 6; \quad x^2 = 25; \quad 25 - 6 = 19 \text{ cioè } \boxed{X_3 = -5}$$

L'esempio è con numeri interi, con numeri fra-
zionari l'approssimazione è quella del regolo usato,
(Nell'esempio le radici sono esatte).

Per il secondo tipo di equazioni: $x^3 \pm Hx^2 \pm K = 0$,
da scriversi nella forma: $\boxed{x \pm \frac{K}{x^2} = \mp H}$, il metodo

risulta più efficiente. Infatti prendiamo i va-

lori H e K sulla scala superiore del fisso e po-

niamo l'1 dello scorrevole su H ed il filo del vetrino

su K . In questa posizione, sullo scorrevole, il filo del ve-

trino indica il numero che dividendo K dà come quo-

ziente H , non solo, ma dà anche la radice di tale

numero. Se moviamo lo scorrevole in modo che

l'1 che centrava H si scosti da esso quanto

indicava la radice del dividendo di K , si nota che

il valore della radice del numero indicato dal

vetrino, (zimasto su K.), varia poco, e quindi è facile ottenere che tale scostamento coincida con la radice del numero, ed abbiamo la x .

Per esempio l'equazione: $x^3 - 20x^2 + 6 = 0$, si scrive nella forma: $x + 6/x^2 = 20$, ove $K=6$; $H=20$.

Affinché $6/x^2 = 20$ dove $x^2 = 0,3$ (mossa iniziale con 1 finale su 20, nella scala dei quadrati e 0,3 che divide 6, ove: $\sqrt{0,3} \cong 0,548$).

Spostando di $\approx 0,55$ l'1 della scala superiore, il valore della x indicato dal vetrino sulla scala inferiore dello scorrevole è: $x=0,555$, (effettivamente è $x_1 = 0,5554911\dots$ calcolando col computer).

Si riproduce il tratto di regolo interessato:



Se invece spostiamo lo scorrevole verso destra aumentando di $\approx 0,5$ il valore di $H=20$ si ha $x_2 = 0,54\dots (< 0)$ (il vero valore è $x_2 = 0,5404686\dots$, riproduciamo le posizioni sul regolo):



Se vi sono due radici reali anche la x_3 è reale e può essere sia minore che maggiore di zero, però nell'equazione $x^3 - 20x^2 + 6 = 0$ il termine noto $6 > 0$ per cui non possono esservi due radici < 0 .

Perciò facendo slittare verso sinistra lo scorrerole cioè dividendo $K = 6$ per valori sempre maggiori

$$6/0,3 = 20; \quad 6/0,4 = 15; \quad 20 - 15 = 5 \text{ mentre } \sqrt{0,4} = 0,632$$

$$6/1 = 6; \quad 20 - 6 = 14 \text{ mentre } \sqrt{6} = 2,44$$

$$6/10 = 0,6; \quad 20 - 0,6 = 19,4 \text{ mentre } \sqrt{10} = 3,16$$

$$6/30 = 0,2; \quad 20 - 0,2 = 19,8 \text{ mentre } \sqrt{30} = 5,47$$

$$6/40 = 0,15; \quad 20 - 0,15 = 19,85; \quad \sqrt{40} = 6,32$$

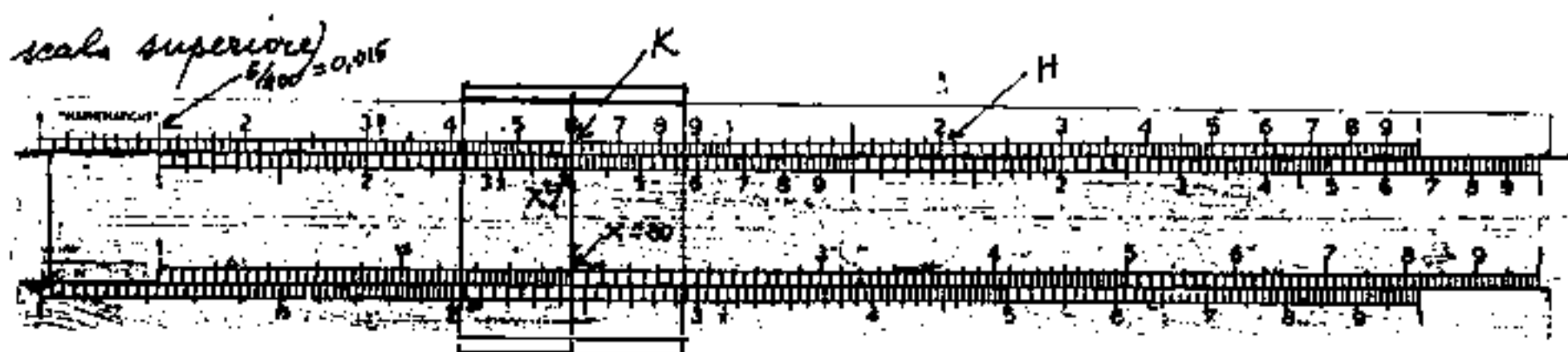
$$6/100 = 0,06; \quad 20 - 0,06 = 19,94; \quad \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{6}{400} = 0,015; \quad 20 - 0,015 = 19,985; \quad \sqrt{400} = 20: \text{ torniamo indietro}$$

$\frac{6}{399} \cong 0,015$ lo scostamento è pressoché inapprezzabile, quindi x_3 è leggermente minore di 19,985, infatti il vero valore con l'approssimazione computer è: 19,98498

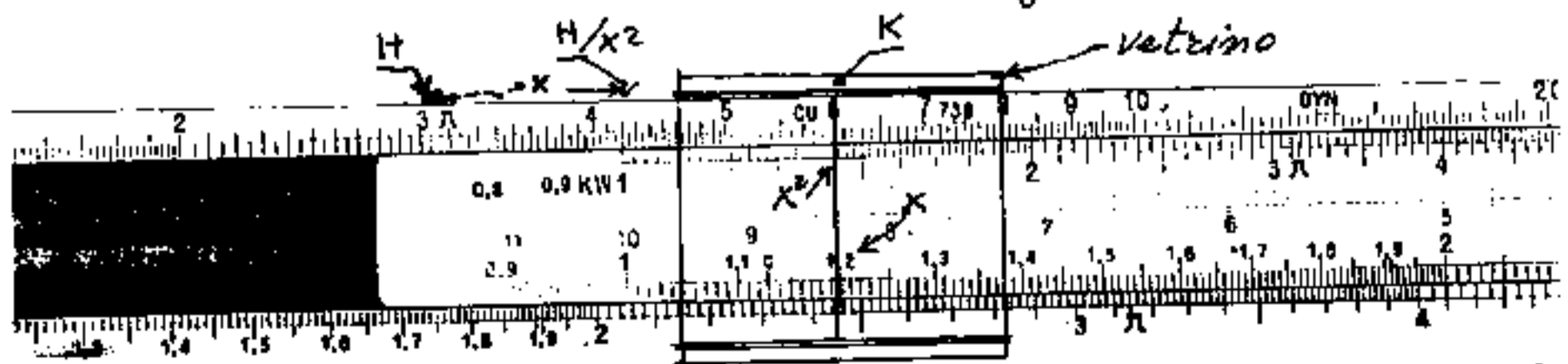
$$x_3 \cong 19,985$$

Abbiamo fatto tutti i passaggi per togliere il dubbio della posizione delle virgole, e per far notare l'efficienza del metodo anche con regoli di modestissima precisione (simoti lo 0,015 sull'1 della



Consideriamo l'equazione: $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$
 che diventa: $x + 6/x^2 = 3$; $H=3$; $K=6$;
 la posizione iniziale del regolo calcolatore è
 la divisione nella scala superiore: $\frac{6}{2} = 3$ con
 $x = \sqrt{2}$; aumentando il quoziente si arriva a
 $3 + \frac{6}{9} > 3$ ove è evidente che qualunque aumento
 porta a valori maggiori di 3, cioè non esistono
 radici reali > 0 .

Torniamo a: $6/2 = 3$, e muoviamo lo scorrevole
 in modo da diminuire il dividendo; le radici
 saranno negative: per $x = -1,20$; $x^2 = 1,44$; $6/1,44 = 4,17$
 $4,17 - 1,20 = 2,97$ dobbiamo diminuire il valore assoluto di x
 per: $x = -1,195$, abbiamo $6/x^2 \approx 4,19$ che assumiamo 4,195
 $4,195 - 1,195 = 0$; $x = -1,195$ (il vero valore $x = -1,195823$)
 ogni ulteriore spostamento dello scorrevole non
 consente: $\frac{6}{x^2} - x = 3$ ($\frac{6}{4} - 1 = 1,5$), ciò vuol dire
 che le altre due radici sono immaginarie coniugate.

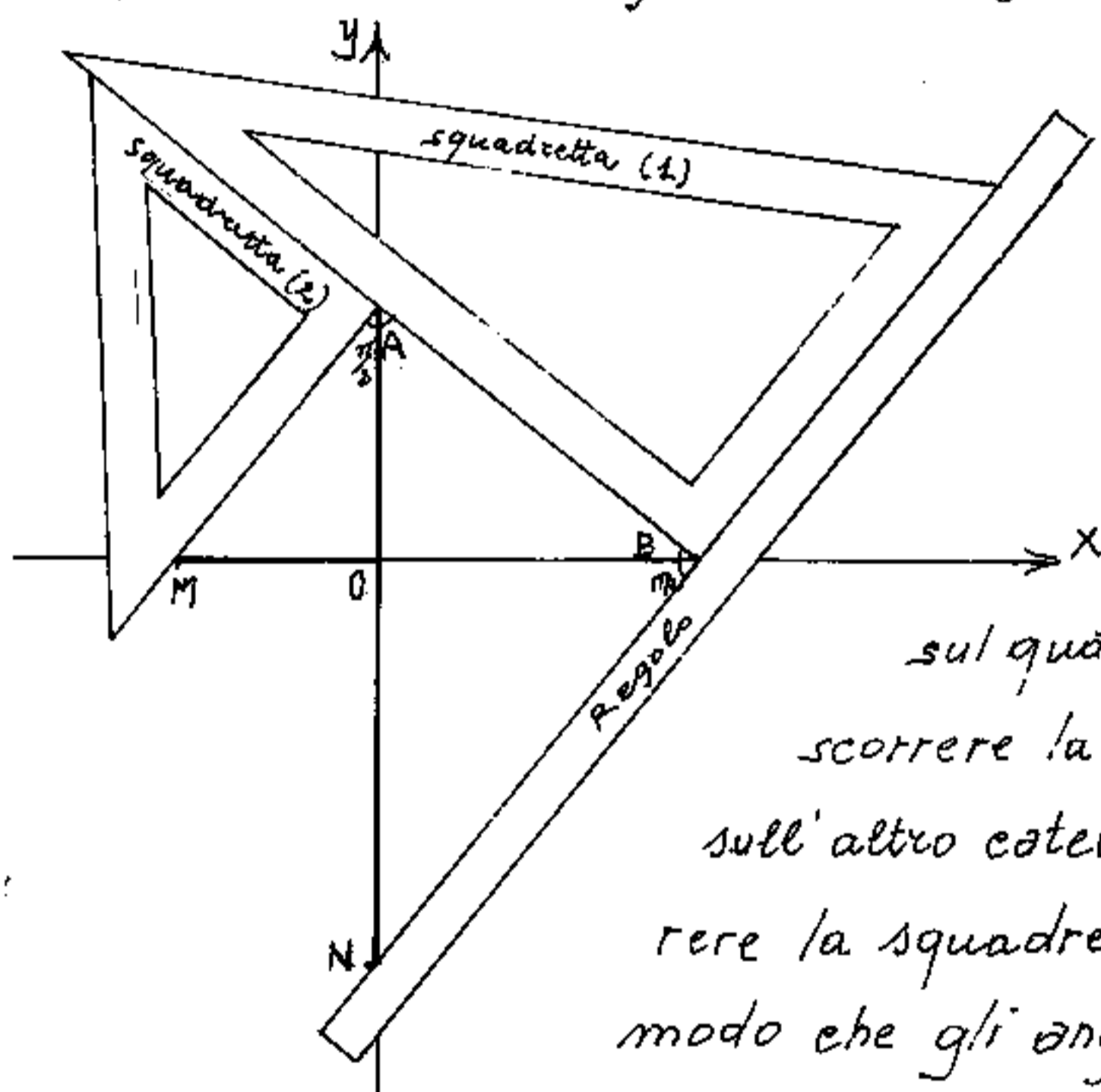


Il tratto di regolo interessato evidenzia i limiti di precisione.

Un metodo per trovare graficamente la radice cubica di un segmento riferito ad un modulo unitario (Risolve il problema di Delo).

Disposti due assi ortogonali x e y , riportiamo il modulo \overline{OM} in ascisse con $x_M = -1$; ed il segmento \overline{ON} con $y_N = -N$. (N è un numero dato da $\overline{ON}/\overline{OM}$)

Si pone su N un regolo che taglia le ascisse



sul quale si fa scorrere la squadretta (1) sull'altro cateto si fa scorrere la squadretta (2) in modo che gli angoli retti in A e B abbiano i vertici su

gli assi e che il cateto libero della squadretta (2) passi per M; a tal fine basta ruotare il regolo intorno ad N e far scorrere le squadrette; avremo:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \sqrt[3]{\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}}$$

(modulo $\overline{OM} = 1$)

Il problema di Delo.

Delo è una isoletta delle Cicladi nel mare Egeo ove esistevano due famosi templi dedicati ad Apollo ed a Latona, ed era, nell'antichità famosa per l'oracolo detto di Delo.

Proprio l'oracolo richiese di raddoppiare il volume dell'altare di Apollo, mantenendo la rigorosa forma cubica, allo scopo di far cessare una epidemia che martoriava gli Ateniesi.

La popolazione di Delo, poco esperta di matematica raddoppiò gli spigoli del cubo, e l'epidemia raggiunse i vertici della sua gravità...

Il popolo impressionato consultò Platone, il quale rispose che Apollo ha voluto punire la vostra ignoranza, voi infatti avete costruito un altare cubico di volume otto volte il precedente e non doppio...

Volera dire che il nuovo spigolo doveva essere $\sqrt[3]{2}$ volte il precedente infatti: $(\sqrt[3]{2} \cdot s)^3 = 2s^3 = 2V_1$.

Il disegno precedente ove: $\overline{ON} = 2\overline{OM}$ e dove $\overline{OA} = \sqrt[3]{2}(\overline{OM})$; cioè misurati \overline{OM} ed \overline{OA} in qualsiasi unità di misura lineare e facendone i cubi risulterà:

$$2(\overline{OM})^3 = (\overline{OA})^3$$

cioè risolvere il problema di Delo (sia pure tentativo).
(vedremo che il problema può risolversi con l'ausilio di curve)

Le linee curve nel piano

LA PARABOLA CUBICA

Abbiamo già trattato le coniche, cioè le curve derivanti da polinomi di 2° grado.

(vol. II). Vediamo ora le linee derivanti da polinomi di 3° grado.

La più semplice: $y = x^3$ (parabola cubica)

$$y' = 3x^2 ; y'' = 6x ; y''' = 6 \quad \text{cioè si ha un}$$

flesso orizzontale per $x = 0$, la pendenza cresce coi quadrati di x .

PARABOLA CUBICA TRASLATATA

Se trasliamo questa

curva si ha: (x_0 = ascissa del flesso)

$$y - y_0 = (x - x_0)^3$$

$$y = x^3 - (3x_0)x^2 + (3x_0^2)x - (x_0^3 + y_0)$$

cioè:

$$x^3 - sx^2 + qx - p = y$$

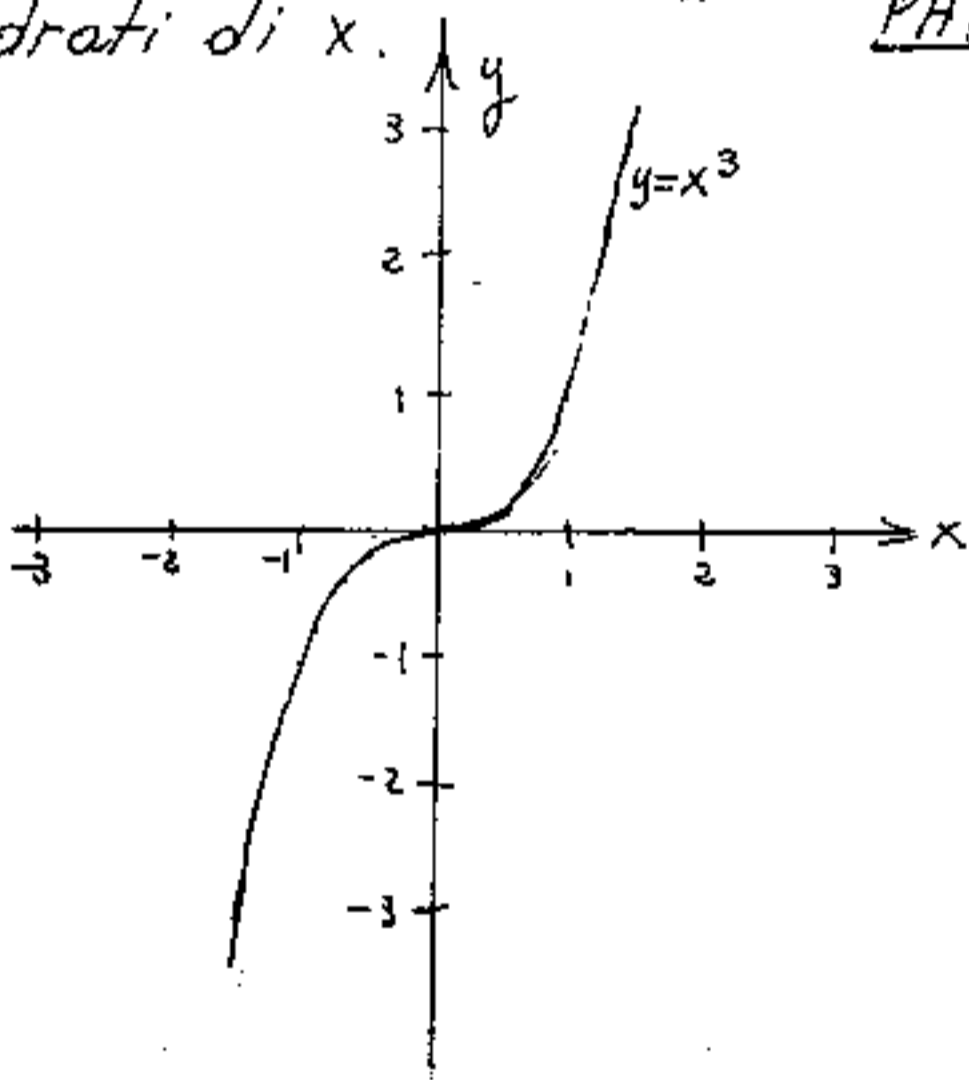
classica espressione delle equazioni di 3° grado.

Per confronto si ha: $x_0 = \frac{s}{3}$; $Q = \frac{s^2}{3}$; cioè se: $Q = \frac{s^2}{3}$ allora l'equazione ha una sola radice:

$$y' = 3x^2 - 2sx + Q = 0 ; (s^2 - 3Q) \geq 0 , \text{ in quanto non si hanno}$$

massimi e minimi, ma solo un flesso, per $x = \frac{s}{3}$

$$y'' = 6x - 2s = 0 ; (x = \frac{s}{3})$$



$$y' = 3x^2 - (6x_0)x + 3x_0^2 = 0$$

$$y' = x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0 \quad (x_0^2 - x_0^2) = 0 \text{ in queste condizioni}$$

il flesso è solo orizzontale per $x = x_0$ se in y' sostituiamo

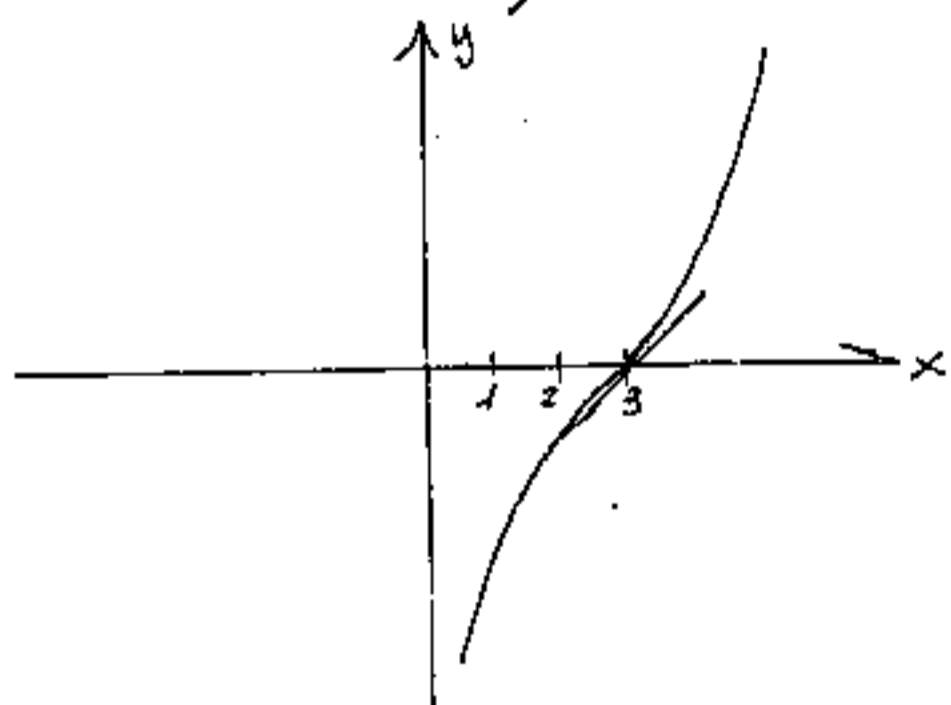
$$x = \frac{S}{3} \text{ abbiamo: } y' = \frac{S^2}{3} - \frac{2S^2}{3} + Q = \left(-\frac{S^2}{3} + Q\right) \text{ che possiamo}$$

porre a piacere per esempio $y' = +1$ abbiamo: $Q = 1 + \frac{S^2}{3}$

$$y = x^3 - Sx^2 + \left(1 + \frac{S^2}{3}\right)x - P \text{ per esempio poniamo: } S = 9$$

$$y = x^3 - 9x^2 + 28x - 30 \text{ consideriamo } P = 30 \text{ (visto che è solo}$$

una traslazione) abbiamo: per $x = \frac{S}{3} = 3$; $y = 27 - 81 + 84 - 30 = 0$



$$y' = 3x^2 - 18x + 28$$

$$\text{per } x = 3; y' = 27 - 54 + 28 = +1$$

come ci eravamo proposti.

Supponiamo ora di imporre: ($y' = -1$) nel punto di flesso. Abbiamo:

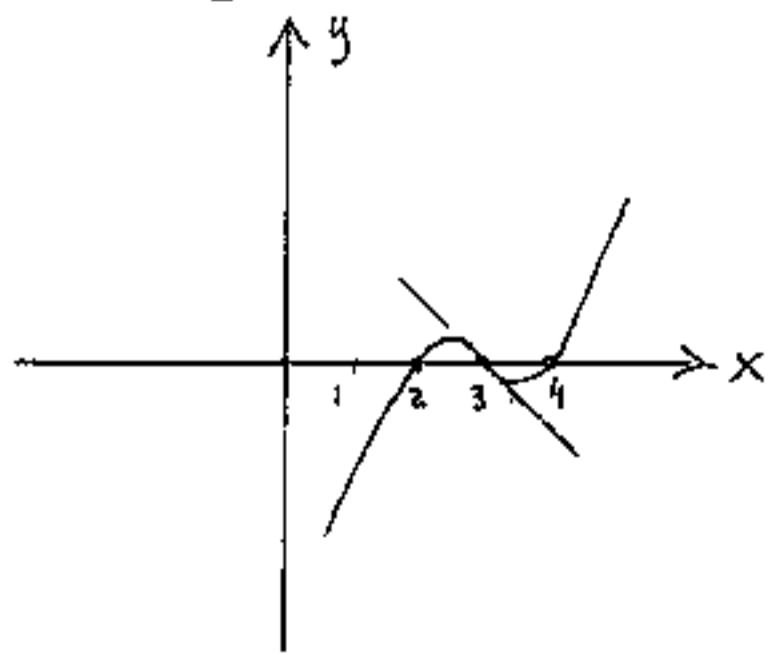
$$-\frac{S^2}{3} + Q = -1; \quad Q = \frac{S^2}{3} - 1; \quad y = x^3 - Sx^2 + \left(\frac{S^2}{3} - 1\right)x - P$$

Poniamo ancora $S = 9$ da cui: $y = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

$$y' = 3x^2 - 18x + 26$$

$$\frac{18 \pm \sqrt{324 - 312}}{6} \quad y'' = 6x - 18 = 0 \quad x = 3$$

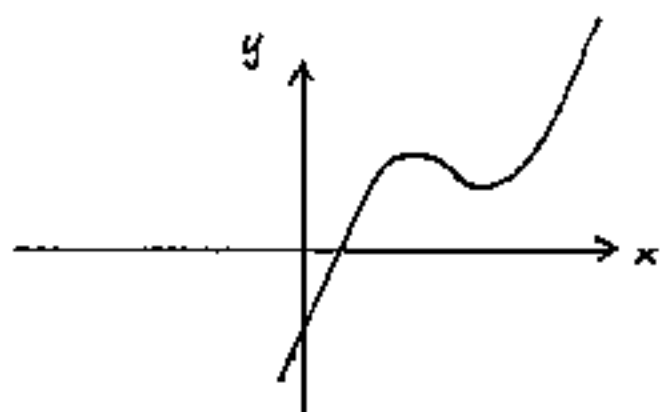
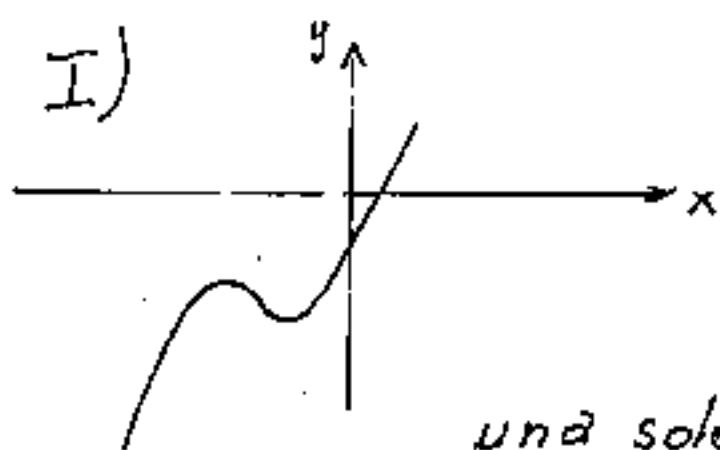
$$y' = \frac{9 \pm \sqrt{3}}{3} = 3 \pm 0,57735 \text{ Avendo scelto, per il flesso, la}$$



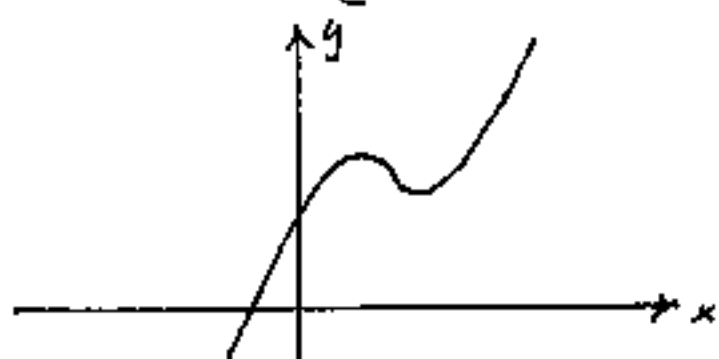
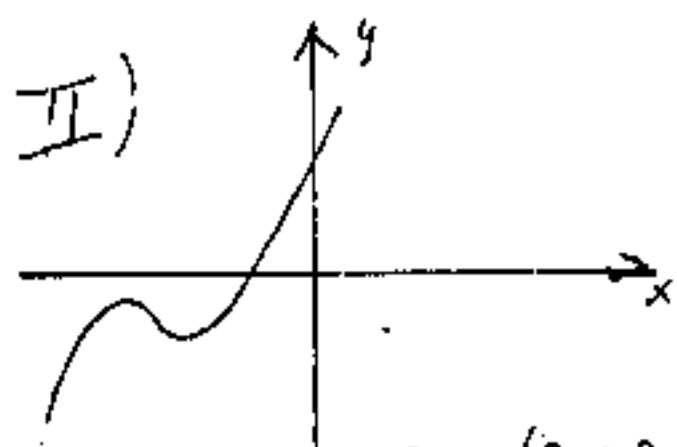
pendenza negativa, necessariamente la curva presenta un max ed un min. Inoltre avendo scelto P in modo che $y = 0$ nel punto di flesso: l'equaz. avrà tre radici reali.

Se l'ordinata del flesso è pari al valore del massimo o del minimo del caso $y_0=0$ e cambiati di segno, cioè se la curva è tangente l'asse delle x si hanno due radici uguali.

In particolare si hanno i seguenti casi:

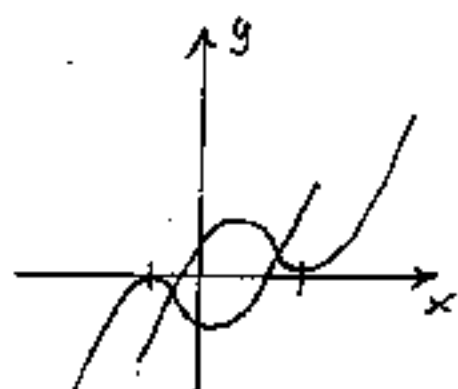
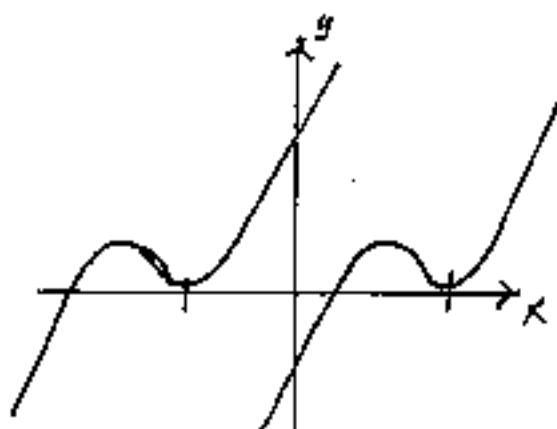
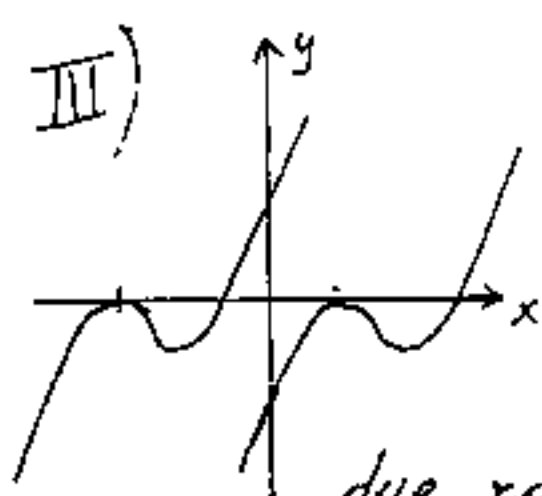


una sola radice reale > 0 (sinoti $P < 0$)

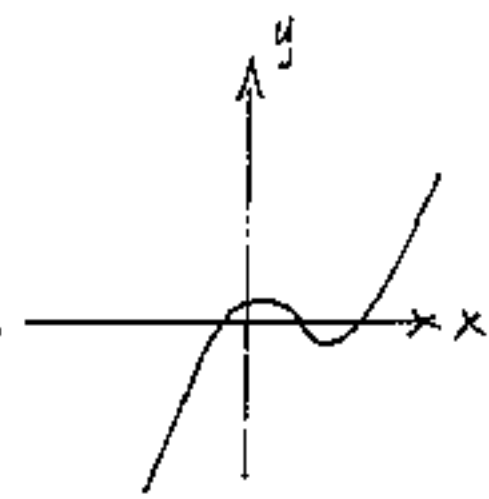
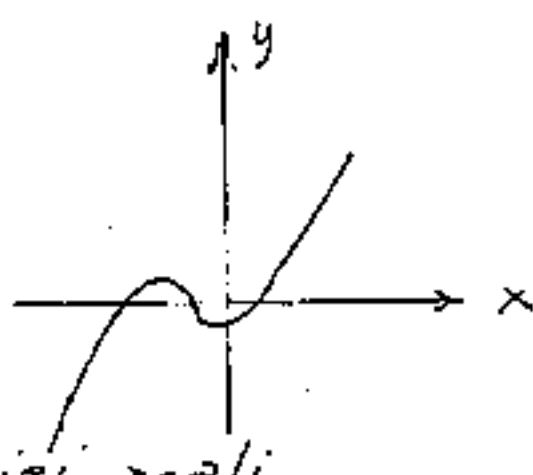
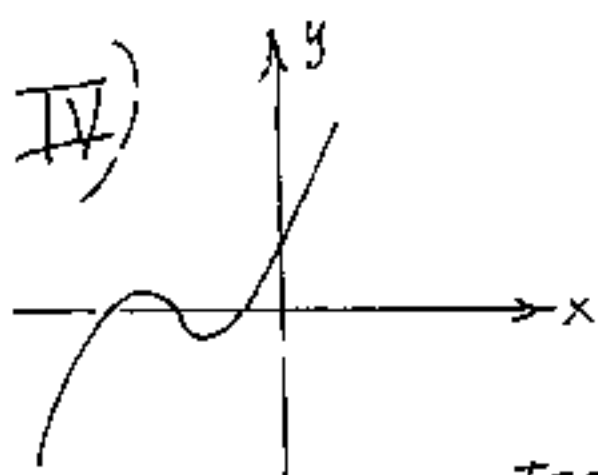


una sola radice reale < 0

(sinoti $P > 0$)



due radici uguali ≥ 0 (si noti che il segno di P non è più determinante)



Tre radici reali

PARABOLA CUBICA RUOTATA

Supponiamo ora di ruotare gli assi di

$$\text{rifermimento: } \begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

la $y = x^3$ diventa:

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = x^3 \cos^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha X^2 y + 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha X y^2 + y^3 \sin^3 \alpha = 0$$

ordinando si ha:

$$(\cos^3 \alpha) X^3 + (\sin^3 \alpha) y^3 + 3(\sin \alpha \cos^2 \alpha) X^2 y + 3(\sin^2 \alpha \cos \alpha) X y^2 + X \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$$

dividendo per $(\cos^3 \alpha)$:

$$X^3 + (\tan^3 \alpha) y^3 + 3(\tan \alpha) X^2 y + 3(\tan^2 \alpha) X y^2 + \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} X - \frac{y}{\cos^2 \alpha} = 0$$

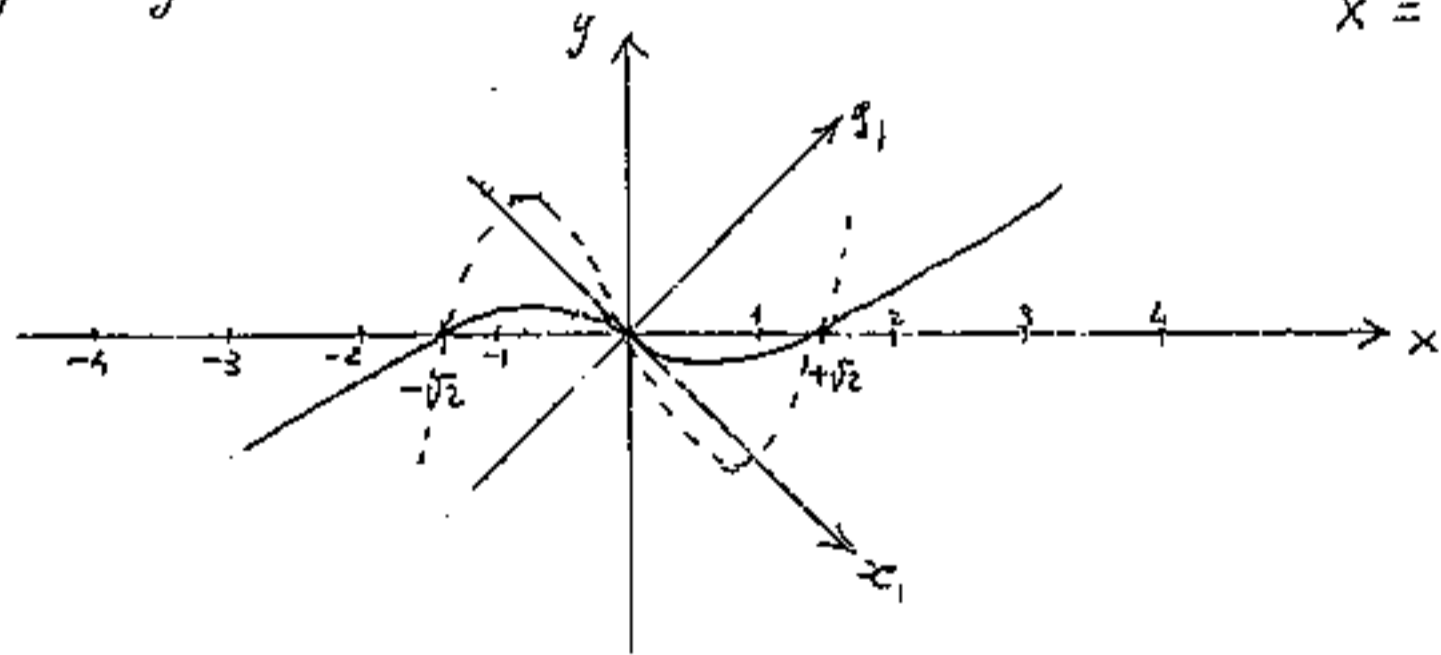
$$\boxed{a_{111} X^3 + a_{222} y^3 + 3 a_{112} X^2 y + 3 a_{122} X y^2 + a_{133} X - a_{233} y = 0}$$

Per visionare un caso concreto poniamo $\alpha = -45^\circ$

$$\boxed{X^3 - y^3 - 3X^2 y + 3X y^2 - 2X - 2y = 0}$$

per $x=0$ si ha: $-y^3 - 2y = 0$ da cui: $\begin{cases} y=0 \\ y^2 = -2 < \begin{cases} +\sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i \end{cases} \end{cases}$

per $y=0$ si ha $+X^3 - 2X = 0$ da cui $\begin{cases} X=0 \\ X = \begin{cases} +\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$



Si hanno tre radici $x_1 = 0$; $x_2 = +\sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$ ottenibili con la semplice equazione: $x^3 - 2x = 0$. (disegnata a tratto)

PARABOLA CUBICA RUOTATA e TRASLATA

$$(\cos^3 \alpha)(x-x_0)^3 + (\sin^3 \alpha)(y-y_0)^3 + 3(\sin \alpha \cos^2 \alpha)(x-x_0)^2(y-y_0) + 3(\sin^2 \alpha \cos \alpha)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \sin \alpha(x-x_0) - \cos \alpha(y-y_0) = 0$$

sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} & (\cos^3 \alpha)(x^3 - 3x_0x^2 + 3x_0^2x - x_0^3) + (\sin^3 \alpha)(y^3 - 3y_0y^2 + 3y_0^2y - y_0^3) + \\ & + 3(\sin \alpha \cos^2 \alpha)(x^2y - 2x_0xy + x_0^2y - x^2y_0 + 2x_0y_0x - x_0^2y_0) + \\ & + 3(\sin^2 \alpha \cos \alpha)(xy^2 - 2y_0xy + xy_0^2 - x_0y_0^2 + 2x_0y_0y - x_0y_0^2) + \\ & + (\sin \alpha)(x - x_0) - \cos \alpha(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$

ordinando si ha:

$$\begin{aligned} & (\cos^3 \alpha)x^3 + (\sin^3 \alpha)y^3 + 3(\sin \alpha \cos^2 \alpha)x^2y + 3(\sin^2 \alpha \cos \alpha)xy^2 - \\ & - 3(\cos^3 \alpha x_0 + \sin \alpha \cos^2 \alpha y_0)x^2 - 3(\sin^3 \alpha y_0 + \sin^2 \alpha \cos \alpha x_0)y^2 - \\ & - 6(x_0 \cos^2 \alpha \sin \alpha + y_0 \sin^2 \alpha \cos \alpha)xy + \\ & + 3(x_0^2 \cos^3 \alpha + 2x_0y_0 \sin \alpha \cos^2 \alpha + y_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha)x + \\ & + 3(y_0^2 \sin^3 \alpha + 2x_0y_0 \sin^2 \alpha \cos \alpha + x_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \cos \alpha)y - \\ & - [\cos^3 \alpha x_0^3 + \sin^3 \alpha y_0^3 + 3(\sin \alpha \cos^2 \alpha)x_0^2y_0 + 3(\sin^2 \alpha \cos \alpha)x_0y_0^2 - (\sin \alpha)x_0 + (\cos \alpha)y_0] = 0 \end{aligned}$$

L'equazione generale risulta quindi:

$$a_{111}x^3 + a_{222}y^3 + 3a_{122}x^2y + 3a_{122}xy^2 - 3a_{113}x^2 - 3a_{223}y^2 - 6a_{123}xy + 3a_{133}x + 3a_{233}y + a_{333} = 0$$

Il polinomio di 3° grado ora specificato non ha i coefficienti tutti indipendenti fra loro, infatti se dividiamo per a_{111} si ottiene:

$$\begin{aligned} & x^3 + (\operatorname{tg}^3 \alpha)y^3 + 3(\operatorname{tg} \alpha)x^2y + 3(\operatorname{tg}^2 \alpha)xy^2 - 3(x_0 + y_0)(\operatorname{tg} \alpha)x^2 - 3(y_0 \operatorname{tg}^2 \alpha + x_0 \operatorname{tg} \alpha)y^2 - \\ & - 6(x_0 \operatorname{tg} \alpha + y_0 \operatorname{tg}^2 \alpha)xy + 3(x_0^2 + 2x_0y_0 \operatorname{tg} \alpha + y_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3 \cos^2 \alpha})x + 3(y_0^2 \operatorname{tg}^3 \alpha + 2x_0y_0 \operatorname{tg}^2 \alpha + \\ & + x_0^2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{3 \cos \alpha})y - [x_0^3 + \operatorname{tg}^3 \alpha y_0^3 + 3(\operatorname{tg} \alpha)x_0^2y_0 + 3(\operatorname{tg}^2 \alpha)x_0y_0^2 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}x_0 + \frac{y_0}{\cos \alpha}] = 0 \end{aligned}$$

ed anche:

$$X^3 + (\tan^3 \alpha) y^3 + 3(\tan \alpha) X^2 y + 3(\tan^2 \alpha) X y^2 - 3(X_0 + y_0 \tan \alpha) X^2 - 3 \tan^2 \alpha (X_0 + y_0 \tan \alpha) y^2 - 6 \tan \alpha (X_0 + y_0 \tan \alpha) X y + \left[3(X_0 + y_0 \tan \alpha)^2 + \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} \right] X + \left[3(\tan \alpha) (X_0 + y_0 \tan \alpha) - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right] y - \left[(X_0 + y_0 \tan \alpha)^3 + \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} X_0 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} y_0 \right] = 0$$

$$\boxed{X^3 + (\tan^3 \alpha) y^3 + 3(\tan \alpha) X^2 y + 3(\tan^2 \alpha) X y^2}$$

I primi quattro termini sono

indipendenti dalla traslazione, dipendono solo dalla rotazione ciò consente di determinare: $\alpha = \arctan\left(\frac{a_{113}}{3}\right)$

Il successivo tre termini cioè: $-3(X_0 + y_0 \tan \alpha) [X^2 + (\tan^2 \alpha) y^2 + 2X(\tan \alpha)y]$ il 5°, 6°, 7°, sono tutti moltiplicati per: $-3(X_0 + y_0 \tan \alpha)$ e sono un quadrato perfetto.

$$\boxed{-3(X_0 + y_0 \tan \alpha) (X + (\tan \alpha) y)^2}$$

noto α , queste osservazioni permettono di determinare:

$$\boxed{(X_0 + y_0 \tan \alpha) = -a_{113}/3}$$

Solo il termine noto permette di trovare l'altra equazione per determinare: X_0, y_0

$$-a_{333} - \left(-\frac{a_{113}}{3}\right)^3 = -\frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} X_0 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} y_0$$

$$\begin{cases} -(\tan \alpha) X_0 + y_0 = \cos^2 \alpha \left[\left(\frac{a_{113}}{3}\right)^3 - a_{333} \right] \\ (\tan \alpha) X_0 + \tan^2 \alpha y_0 = -\frac{a_{113}}{3} \tan \alpha \end{cases}$$

$$y_0 = \frac{\cos^2 \alpha \left[\left(\frac{a_{113}}{3}\right)^3 - a_{333} \right] - \frac{a_{113}}{3} \tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)}$$

$$\boxed{y_0 = \cos^4 \alpha \left[\left(\frac{a_{113}}{3}\right)^3 - a_{333} \right] - \left(\frac{a_{113}}{3}\right) \tan \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$\text{essendo } (\cos^2 \alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + a_{122}/3}$$

avremo:

$$y_0 = \frac{[(a_{113}/3)^3 - a_{333}]}{(1 + a_{122}/3)^2} - \frac{(a_{113}/3)(a_{112}/3)}{(1 + a_{122}/3)}$$

$$x_0 = \frac{[(a_{113}/3)^3 - a_{333}]}{(1 + a_{122}/3)^2} + \frac{(a_{113}/3)(a_{112}/3)}{(1 + a_{122}/3)}$$

Come si vede, per assegnare una parabola cubica debbono essere rispettate varie correlazioni fra i coefficienti e precisamente per i primi quattro:

$$a_{111} = 1$$

$$a_{222} = (a_{112}/3)^3$$

$$a_{112} = 3 \tan^2(\alpha)$$

$$a_{132} = 3 (a_{112}/3)^2 = a_{112}^2/3 \quad \text{oltre le correlazioni fra gli altri coefficienti.}$$

Se le correlazioni non sono rispettate si hanno altri tipi di curve di 3° grado.

Se la curva non è traslata è nullo a_{333} e sono nulli: a_{113} , a_{223} , a_{123} .

Se la curva non è ruotata, sono nulli: a_{222} , a_{112} , a_{122} .

La mancanza di una formula esplicita, nella risoluzione delle equazioni di 3° grado, nel caso irriducibile, cioè quando si hanno tre radici reali, ha impedito una razionale inquadatura delle curve derivanti dal polinomio di 3° grado. (Analogamente a quanto è stato possibile per il polinomio di 2° grado - coniche)

Proviamoci a scrivere il polinomio nella forma:

$$(a_{222}y^3 + (3a_{122}x - a_{223})y^2 + (3a_{112}x^2 - 6a_{123}x + 3a_{233})y + (a_{111}x^3 - 3a_{113}x^2 + 3a_{133}x + a_{333})) = 0$$

posto $z = \left(y + \frac{a_{122}x + a_{223}}{a_{222}} \right)$

$$y = a_{222}z + a_{122}x - a_{223}$$

avremo l'equazione ridotta in z : $z^3 + mz + n = 0$

ove:

$$m = \left(3a_{112}x^2 - 6a_{123}x + 3a_{233} - 3a_{122}^2x^2 + 6a_{122}a_{223}x - 3a_{223}^2 \right)$$

$$n = \left[2(a_{122}x - a_{223})^3 - (a_{122}x - a_{223})(3)(a_{112}x^2 - 2a_{123}x + a_{233}) + (a_{111}x^3 - 3a_{113}x^2 + 3a_{133}x + a_{333}) \right]$$

posto: $A = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$; $B = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$

$$z = (A+B) \text{ reale ; se: } \left(\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27} \right) > 0$$

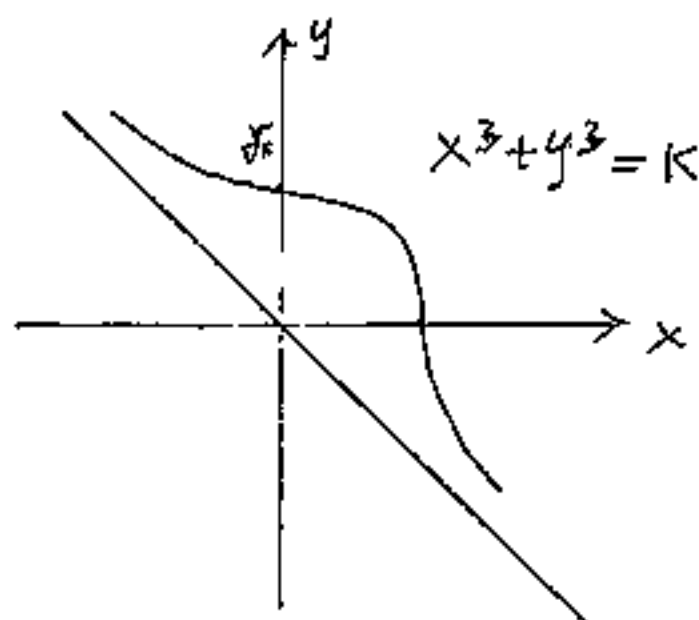
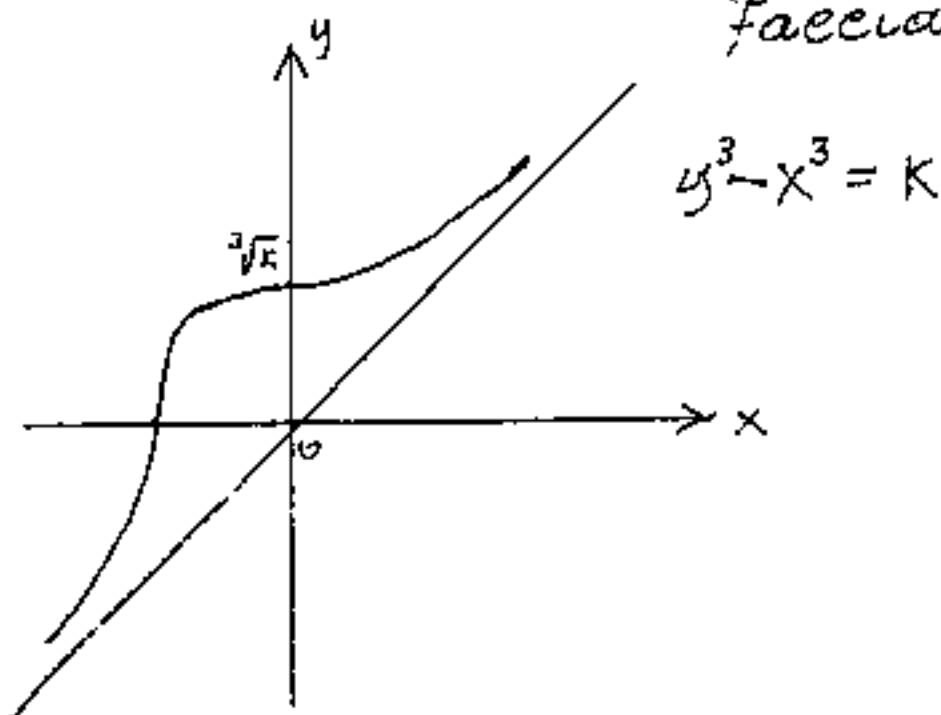
come si vede i calcoli divergono complessi.

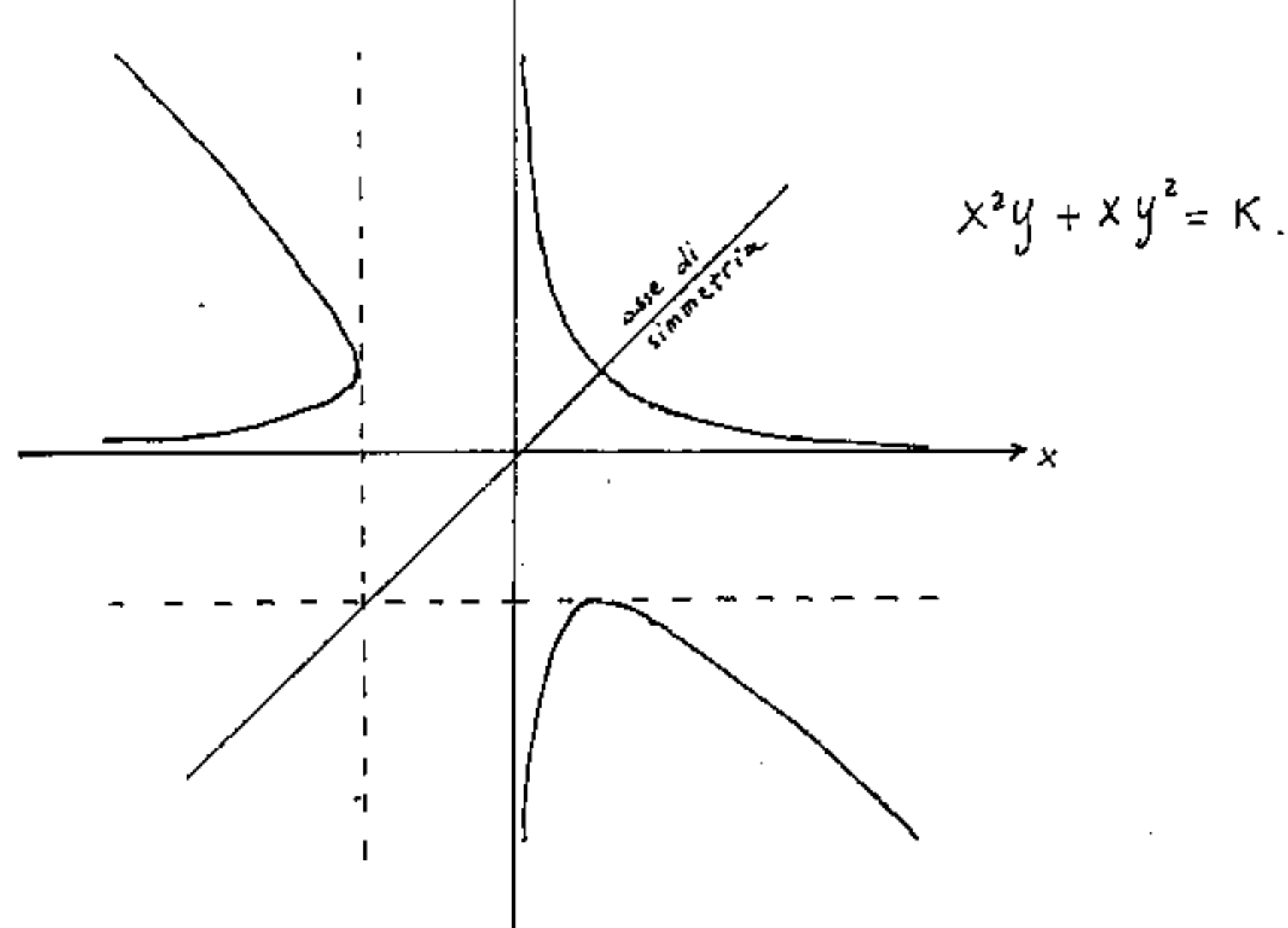
Lo stesso avviene se proviamo l'intersezione con una retta qualsiasi.

Noi abbiamo accennato al caso di curve simmetriche rispetto alla: $y=x$; in questo caso i coefficienti della x e della y di ugual grado sono uguali, per cui possiamo scrivere:

$$x^3 + y^3 + 3a_{12}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_2x^2 + a_2y^2 + a_1x + a_1y + a_{11}xy + a_0 = 0$$

facciamo degli esempi:





Con questi esempi si è voluto esporre il contributo dei termini di 3° grado del polinomio. Prima di continuare, diamo un cenno sugli integrali algebrici e le curve razionali.

Integrali algebrici - curve razionali

Abbiamo già visto (vol. I) come razionalizzare un integrale del tipo: $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, cioè ponendo: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ ove elevando a quadrato sparisce ax^2 ed $x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$.

Consideriamo ancora l'integrale:

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx \text{ e generalizziamolo}$$

nella forma: $\int f(x, y) dx$

ove la x e la y sono legate da: $y^2 - ax^2 - bx - c = 0$

ed ancora più in generale:

$$F(x, y) = 0$$

Tutti i punti: (x, y) che soddisfanno questa equazione costituiscono una curva algebrica Γ .

Se è possibile esprimere le coordinate di ciascun punto di Γ in funzione di un parametro t (razionalmente)

cioè:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

La curva è razionale o, come si dice: è di genere zero.

In questo caso è possibile razionalizzare qualunque integrale del tipo: $\int f(x, y) dx$ ove:

la x e la y sono legate da $F(x, y) = 0$, funzione razionale di x ed y ; ed essendo: $x = x(t)$ ed $y = y(t)$

ovremo: $\int f(x, y) = \int \underline{f(x(t), y(t)) x'(t)} dt$.

Questo integrale è detto: abeliano o integrale algebrico.

Le funzioni: $F(x, y) = 0$, espresse da polinomi di 2° grado sono le coniche e le coniche sono curve razionali.

A noi interessiamo ora le $F(x, y) = 0$ espresse da polinomi di 3° grado.

Abbiamo già visto le curve di un binomio simmetrico di 3° grado, vediamo ora un

trinomio simmetrico di 3° grado:

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

questa curva è detta Folium di Cartesio,

Per razionalizzare un integrale: $\int f(x,y) dx$
 qualunque sia la funzione, se x e y sono
 legate dall'espressione del folium di Cartesio, basta

porre: $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$; $(t = y/x)$

IL FOLIUM di CARTESIO

Abbiamo già visto che l'espressione algebrica:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

è il folium di Cartesio

che tali coordinate possono essere espresse

parametricamente da: $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

La curva può essere espressa in coordi-
 nate polari sostituendo $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$

cioè: $\rho^3 \cos^3 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta = 3\rho^2 \sin \theta \cos \theta$

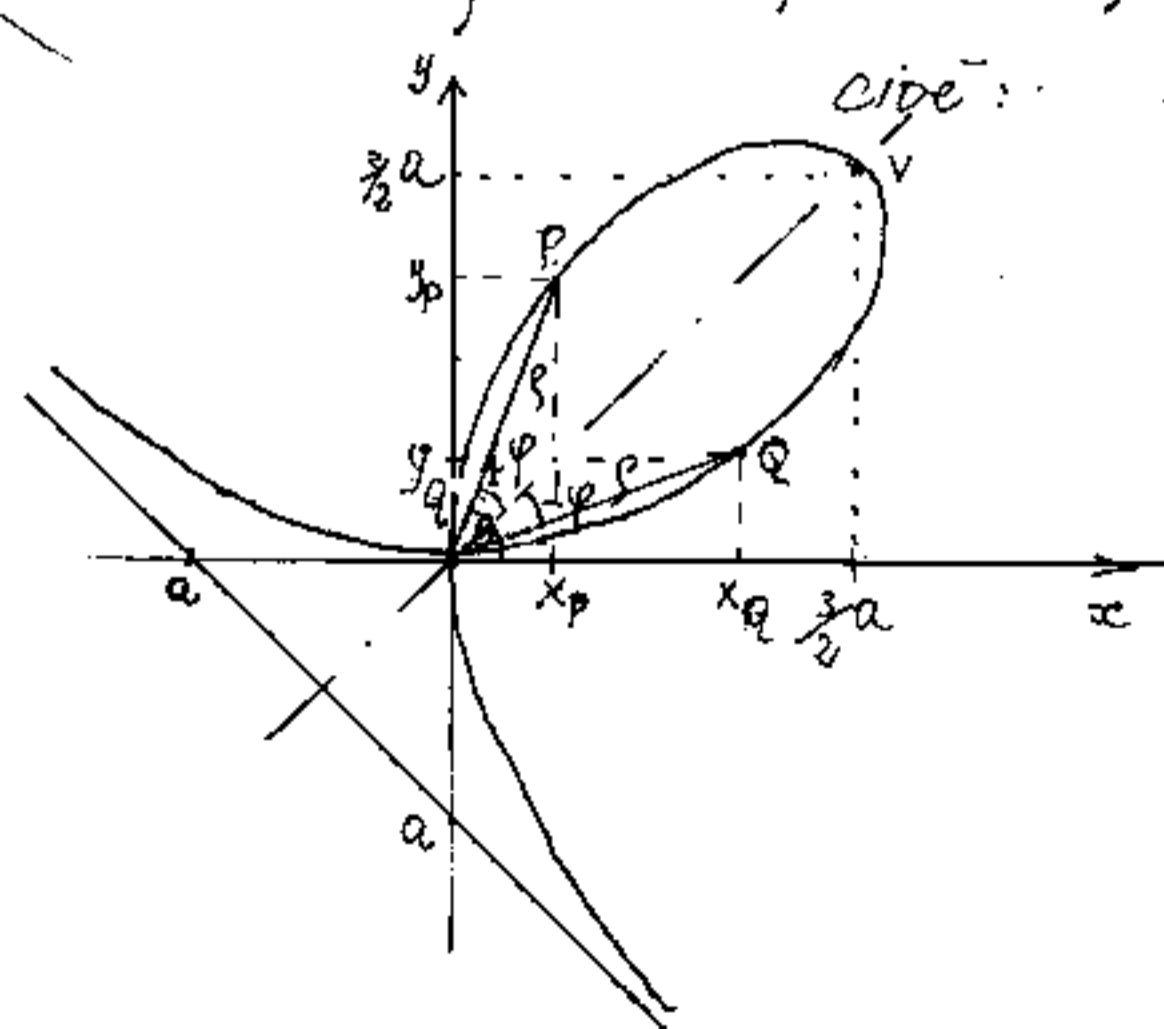
$$\rho = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}$$

ed anche:

$$\rho = \frac{3a}{2} \left(\frac{\sin 2\theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta} \right)$$

Per $\theta = 45^\circ$ $\rho = \frac{3}{2} a \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\int_{45^\circ} = \frac{3a}{\sqrt{2}} = K$$



Poiché la curva è simmetrica rispetto alla retta $y=x$,
 poniamo: $\theta_1 = (45^\circ + \varphi)$; $\theta_2 = (45^\circ - \varphi)$ sostituendo si ha:

$$\boxed{\rho = \rho_1 = \rho_2 = \frac{\sin(90 \pm 2\varphi)}{\sin^3(45 \pm \varphi) + \cos^3(45 \pm \varphi)} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}a\sqrt{2} \frac{1 - 2\sin^2\varphi}{\cos\varphi(1 + 3\sin^2\varphi)}}$$

che può anche scriverci: $\boxed{\frac{3}{2}a\sqrt{2} \frac{(2\cos^2\varphi - 1)}{\cos\varphi(3 - 2\cos^2\varphi)} = \rho}$

Tabella delle coordinate e parametro del folium di Cartesio

φ	θ_1	θ_2	$\rho/\frac{3}{2}a$	$X_{P/\frac{3}{2}a} = Y_{Q/\frac{3}{2}a}$	$Y_{P/\frac{3}{2}a} = X_{Q/\frac{3}{2}a}$	$t_2 = 1/t_1$
0	45°	45°	$\sqrt{2}$	1	1	1
5°	50°	40°	1,377127	0,885200	1,054940	0,83909963
10°	55°	35°	1,272675	0,729976	1,042514	0,70020754
15°	60°	30°	1,118146	0,559073	0,968343	0,57735027
20°	65°	25°	0,934294	0,394850	0,846758	0,46630766
25°	70°	20°	0,739025	0,252761	0,694456	0,36397027
30°	75°	15°	0,544331	0,140883	0,525783	0,26794919
35°	80°	10°	0,356142	0,0618434	0,3507312	0,17632698
40°	85°	5°	0,175528	0,0152983	0,1748602	0,08748866
45°	90°	0	0	0	0	0
50°	95°	-5°	-0,175763	0,0153188	-0,175095	-0,08748866
55°	100°	-10°	-0,350068	0,062525	-0,354598	-0,17632698
60°	105°	-15°	-0,5656854	0,1464102	-0,5464102	-0,26794919
65°	110°	-20°	-0,81390173	0,27837078	-0,7648175	-0,36397027
70°	115°	-25°	-1,1451388	0,48395656	-1,0378482	-0,46630766
90°	135°	-45°	∞	∞	∞	-1

Notiamo che per ogni valore di φ si ha un solo valore di ρ ; ma che lo stesso valore di ρ può aversi da $-\varphi$; per valori di $\varphi > 45$, ($\cos\varphi = -\cos(180-\varphi)$), abbiamo ρ negativi.

Ma utilizzando la simmetria è possibile avere due valori simmetrici per ogni x_1 , cioè si ottiene ruotando gli assi X ed Y di $+45^\circ = \pi/4$ rad.

Se ruotassimo di -45° espliciteremmo la $x_2 \equiv -y_1$ avremmo il coppia simmetrico sulla y_2 , ma ad ogni x_2 avremmo tre valori (3 reali o 2 immaginari ed uno reale).

Sappiamo che:

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

appliciamo le formule:

$$\begin{cases} X = x_1 \cos(\alpha) - y_1 \sin(\alpha) \\ Y = y_1 \cos(\alpha) + x_1 \sin(\alpha) \end{cases} ; \quad \begin{cases} X = (x_1 - y_1) / \sqrt{2} \\ Y = (x_1 + y_1) / \sqrt{2} \end{cases}$$

sostituendo nella:

$$x^3 + y^3 = 3aXY \quad \text{si ha:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x_1^3 - 3x_1^2 y_1 + 3x_1 y_1^2 - y_1^3) + \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1^3 + 3x_1^2 y_1 + 3x_1 y_1^2 + y_1^3) = \frac{3a}{2} (x_1^2 - y_1^2)$$

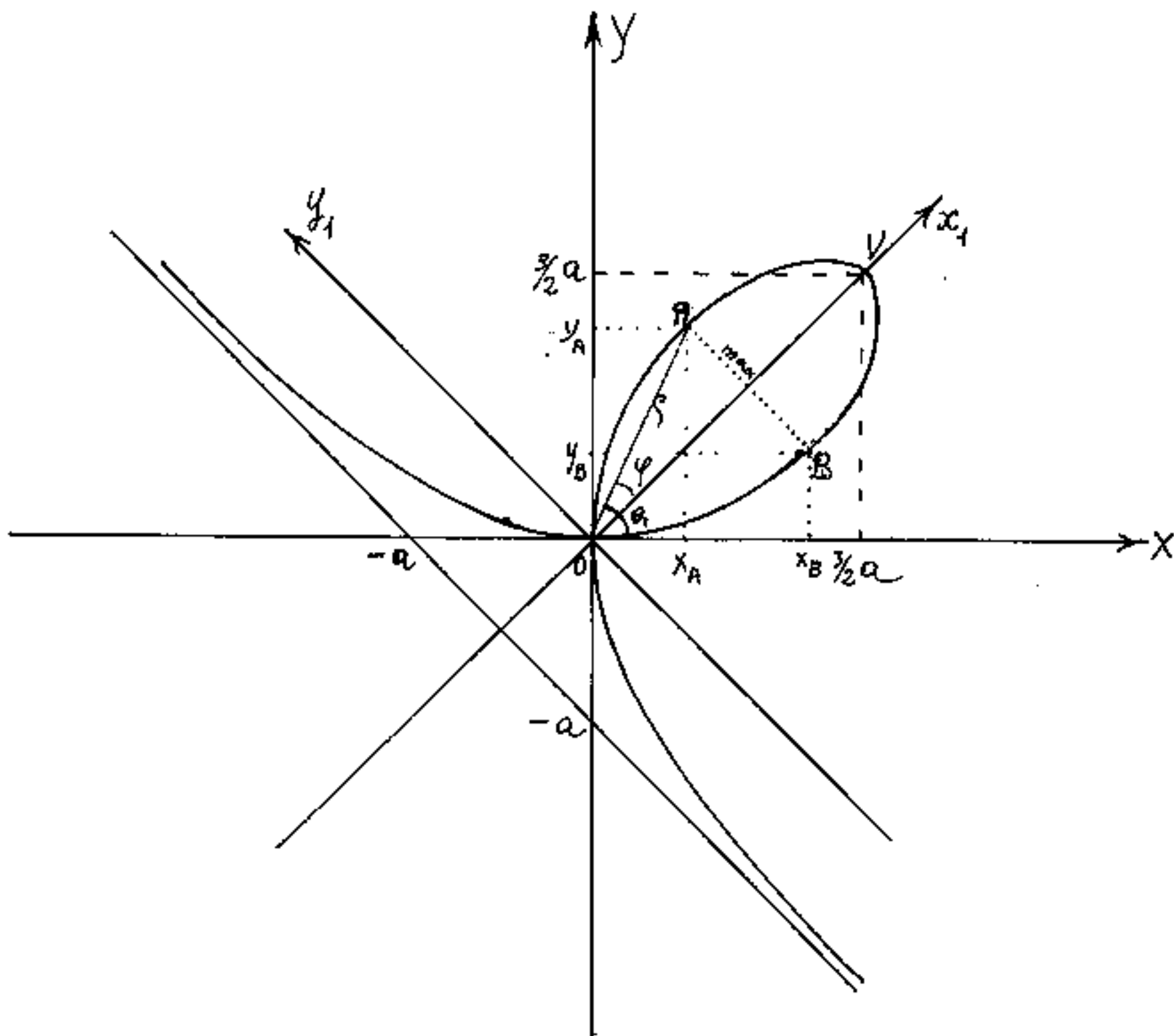
$$2x_1^3 + 6x_1 y_1^2 = 3\sqrt{2} a (x_1^2 - y_1^2)$$

$$(x_1^3 + 3x_1 y_1^2) = \frac{3a}{\sqrt{2}} (x_1^2 - y_1^2) ; \quad \left(\text{posto: } K = \frac{3a}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(3x_1 + K) y_1^2 = x_1^2 (K - x_1)$$

$$\boxed{y_1 = x_1 \sqrt{(K - x_1) / (K + 3x_1)}}$$

abbiamo così esplicitato y_1



$x_1 = \rho \cos(\varphi)$; $y_1 = \rho \sin(\varphi)$ sostituendo nella equazione:
 $y_1 = x_1 \sqrt{(K - x_1) / (K + 3x_1)}$ elevato a quadrato si ha:

$$(\rho^2 \sin^2 \varphi) = (\rho^2 \cos^2 \varphi) (K - \rho \cos \varphi) / (K + 3\rho \cos \varphi)$$

$$(K + 3\rho \cos \varphi)(1 - \cos^2 \varphi) = K \cos^2 \varphi - \rho \cos^3 \varphi$$

$$K - K \cos^2 \varphi + 3\rho \cos \varphi - 3\rho \cos^3 \varphi = K \cos^2 \varphi - \rho \cos^3 \varphi$$

$$\therefore \rho = \frac{K(2\cos^2 \varphi - 1)}{3\cos \varphi - 2\cos^3 \varphi}$$

$$\boxed{\rho = \frac{K \cos(2\varphi)}{\cos \varphi (3 - 2\cos^2 \varphi)}}$$

Identica a quella già calcolata e che ora rappresenta l'equazione in polari ad assi ruotati.

Eseguiamo la derivata prima della:

$$y_1 = x_1 \sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)}$$

avremo:

$$y_1' = (1) \cdot \left(\sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)} \right) + (x_1) \frac{[(-1)(K+3x_1) - (K-x_1)(3)]}{2 \sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)}} \cdot \frac{1}{(K+3x_1)^2}$$

riducendo allo stesso denominatore:

$$y_1' = \frac{(2)(K-x_1)(K+3x_1) - Kx_1 - 3x_1^2 - 3Kx_1 + x_1^2}{2 \sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}} =$$

$$y_1' = \frac{2K^2 + 6Kx_1 - 2Kx_1 - 6x_1^2 - 4Kx_1 + x_1^2}{2 \sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}} =$$

$$y_1' = \frac{K^2 - 3x_1^2}{\sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}}$$

La conoscenza della derivata prima ci consente di calcolare molte caratteristiche del folium di Cartesio.

1) Per $x_1 = 0 \rightarrow y_1' = \pm 1$

ciò vuol dire che le tangenti nell'origine degli assi sono a $\pm 45^\circ$ rispetto ad x_1 , cioè sono gli assi principali: x ed y . Nell'origine degli assi il folium di Cartesio ha un punto doppio e tangenti distinte (a 90°) cioè ha: "un nodo ordinario".

2) Per $x_1 = K$, cioè $x_1 = \overline{OV}$ (nel vertice V);

$y_1' = \infty$ (si ha una tangente ortogonale ad x_1)

3) Per $x_1 = -K/3 \rightarrow y_1' = \infty$ (asintoto) $x_1 = -\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

$$4) \text{ per } x_1 = +\frac{K}{3} = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1,154700538$$

Vogliamo ora calcolare la corda massima del coppia e la sua posizione, cioè cerchiamo il massimo ed il minimo relativo di y_1 . Poniamo:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 0 \quad \text{cioè: } \frac{K^2 - 3x_1^2}{\sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}} = 0$$

$$\text{si ha per: } \boxed{x_1 = \frac{K}{3}} \quad \text{cioè: } \boxed{x_1 = a\sqrt{3}/2}$$

$$\text{si può scrivere: } \frac{K}{3}\sqrt{3} = x_1 = (0,577350269)K = (1,224744871)a$$

a cui corrisponde:

$$\underline{y_1} = \frac{K}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(K - \frac{K}{3}\right) / \left(K + 3K/\sqrt{3}\right)} = \frac{K}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}} = \frac{K}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4\sqrt{3}-6}{6}}$$

$$\underline{y_1} = \frac{K}{3} \sqrt{2\sqrt{3}-3} = \pm K(0,224083345)$$

$$\text{ed anche: } \underline{y_1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sqrt{3}-3} = a \sqrt{\sqrt{3}-\frac{3}{2}} = \pm a(0,481716522)$$

La corda massima è quindi: $2y_1 = c$

$$\overline{AB} = c = \frac{2}{3} K \sqrt{2\sqrt{3}-3} = (0,454166692)K$$

$$\overline{AB} = c = 2a \sqrt{\sqrt{3}-\frac{3}{2}} = (0,963433044)a$$

Calcoliamo gli estremi della corda in coordinate polari:

$$\tan \varphi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3}-1} \Rightarrow \varphi = 21^\circ 28' 14,53''$$

$$\boxed{45^\circ + \varphi} = \theta_1 = 66^\circ 28' 14,53''; \quad \boxed{45^\circ - \varphi} = 23^\circ 31' 45,47'' = \theta_2$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = a \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{3}{2}} = \boxed{\rho = a \sqrt[4]{3} = a(1,316074013)}$$

$$\text{ed anche: } \rho = K \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{3}} = \boxed{\rho = \frac{K}{3} \sqrt{2\sqrt{3}}}$$

$$\rho = K(0,620403239)$$

Le coordinate polari sono riferite all'asse principale X per cui le coordinate x ed y saranno:

$$X_A = \rho \cos \theta_1; \quad Y_A = \rho \sin \theta_1 \quad (\text{coordinate del max})$$

$$X_B = \rho \cos \theta_2; \quad Y_B = \rho \sin \theta_2 \quad (\text{coordinate del min})$$

$$X_A = \frac{X_1 - Y_1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2} (\sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}-3}) = a(0,525400384) = Y_B$$

$$Y_A = \frac{X_1 + Y_1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}-3}) = a(1,206650423) = X_B$$

$$(a = \frac{K}{3} \sqrt{2}) \quad X_A = \frac{K}{3} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{2}} \right) = K(0,247676116) = Y_B$$

$$Y_A = \frac{K}{3} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{2}} \right) = K(0,5688200464) = X_B$$

Per verificare i valori: X_A ed Y_A ; X_B, Y_B dei punti estremi della massima corda del cappio, applichiamo il teorema del Dini: $(y' = \frac{-\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y})$ alla funzione implicita:

$$\boxed{x^3 + y^3 - 3axy = 0}$$

avremo:

$$\begin{aligned} -\partial f / \partial x &= -(3x^2 - 3ay) \\ \partial f / \partial y &= (3y^2 - 3ax) \end{aligned} \quad \boxed{y' = \frac{(ay - x^2)}{(y^2 - ax)}}$$

Imponiamo alla "pendenza" della tangente al folium di Cartesio di essere inclinata rispetto ad x di 45° , cioè: $\text{tang}(\alpha) = y' = 1$. per cui:

$$(ay - x^2) = (y^2 - ax)$$

ed anche:
$$x^2 + y^2 - ax - ay = 0$$

equazione di un cerchio ad assi traslati di:

$$x_c = \frac{a}{2}; \quad y_c = \frac{a}{2}; \quad R = \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad \text{può scriversi:}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

è un cerchio che passa per l'origine degli assi, ha il centro sull'asse di simmetria: $y = x$ e taglia il folium nei punti estremi A e B della corda massima, infatti sostituendo x_A ed y_A nella sua equazione abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} x_A^2 &= \left[\frac{a}{2} (\sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}-3}) \right]^2 = \frac{a^2}{4} (2\sqrt{3}) (1 - \sqrt{2\sqrt{3}-3}) \\ -ax_A &= -\frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{2\sqrt{3}-3}) \\ y_A^2 &= \left[\frac{a}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}-3}) \right]^2 = \frac{a^2}{4} (2\sqrt{3}) (1 + \sqrt{2\sqrt{3}-3}) \\ -ay_A &= -\frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} + 2\sqrt{2\sqrt{3}-3}) \end{aligned} \right\} \text{somma}$$

$$\underline{x_A^2 + y_A^2 - ax_A - ay_A = 0} \quad (\text{verificato})$$

e che A è un punto del folium:

$$\left[x_A^3 = 0,14503445 \right] + \left[y_A^3 = 1,756889343 \right] - \left[(x_A = 0,525400384)(3)(1,206650423 = y_A) \right] = 0$$

$$= 1,901923788 - 1,901923788 = 0 \quad (\text{verificato})$$

I raggi di curvatura nel folium di Cartesio

Abbiamo le seguenti equazioni del folium di Cartesio:

1) Implicita negli assi fondamentali X e Y

$$\boxed{X^3 + Y^3 - 3XY = 0} \quad (\text{parametro } a=1)$$

oppure:

$$\boxed{X^3 + Y^3 - 3aXY = 0}$$

2) Parametrica in t (riferita ad X ed Y)

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{3at}{1+t^3} \\ Y &= \frac{3at^2}{1+t^3} \end{aligned}} \quad \left(\frac{Y}{X} = t = \tan(\alpha)\right)$$

3) Coordinate polari $\rho; \theta$ (con $\theta=0$ su X)

$$\boxed{\rho = 3a \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{\sin^3(\theta) + \cos^3(\theta)}}$$

4) ad assi x_1, y_1 ruotati di 45° rispetto X, Y
(esplicita y_1)

$$\boxed{y_1 = X_1 \sqrt{\left(\frac{3a}{\sqrt{2}} - X_1\right) / \left(\frac{3a}{\sqrt{2}} + 3X_1\right)}}$$

oppure:

$$\boxed{y_1 = X_1 \sqrt{(K - X_1) / (K + 3X_1)}} \quad \text{ove: } (K = \frac{3}{\sqrt{2}}a)$$

5) Coordinate polari $\rho; \varphi$ riferite ad x_1

x_1 = asse di simmetria $\theta = 45^\circ \pm \varphi$

$$\boxed{\rho = K \frac{\cos(2\varphi)}{3\cos(\varphi) - 2\cos^3(\varphi)}}$$

$$\boxed{\rho = \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right) \frac{\cos(2\varphi)}{3\cos(\varphi) - 2\cos^3(\varphi)}}$$

Le espressioni in coordinate polari sono suscettibili di assumere aspetti oliversi operando opportune trasformazioni trigonometriche, che possono essere utili in casi particolari.

6) Parametriche in t_1 (riferite ad x_1, y_1)

$$x_1 = k \frac{(1-t_1^2)}{(1+3t_1^2)}$$

$$y_1 = \frac{kt_1(1-t_1^2)}{(1+3t_1^2)}$$

Abbiamo le seguenti derivate prime delle espressioni del folium di Cartesio.

1')
$$y' = \frac{(ay - x^2)}{(y^2 - ax)}$$
 (ottenuta col teorema del Dini)

2')
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$

3')
$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{p' = 3a \left(\frac{\cos(2\theta)(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta - \cos\theta)}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2} \right)}{}$$

(espressione poco agevole)

4')

$$y_1' = \frac{(K^2 - 3X_1^2)}{(\sqrt{K-X_1} \cdot (K+3X_1)^3)}$$

5')

$$\rho_1' = K \frac{-\sin(\varphi) \cdot (3 + 4\cos^4\varphi)}{\cos^2\varphi (3 - 2\cos^2\varphi)^2}$$

L'espressione che appare più agevole per fare la derivata seconda è forse la 4').

Ricordiamo le espressioni del raggio di curvatura:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

(in coordinate cartesiane)

$$R = \frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{3/2}}{\rho_2^2 + 2\rho_1^2 - \rho\rho''}$$

(in coordinate polari)

$$R = \frac{(X_{(t)}'^2 + Y_{(t)}'^2)^{3/2}}{(Y_{(t)}'' X_{(t)}' - (Y_{(t)}' X_{(t)}''))}$$

$(X_{(t)}' = \frac{dX}{dt}; Y_{(t)}' = \frac{dY}{dt})$
(in coordinate parametriche)

Perci  considereremo il raggio di curvatura nel sistema cartesiano X_1, Y_1 ruotato di 45° rispetto ad X, Y .

Facciamo la derivata seconda da:

$$y' = \frac{(K^2 - 3X_1^2)}{\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}}$$

$$y'' = \left[\left(-6X_1 \sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3} \right) - (K^2 - 3X_1^2) \frac{(-1)(K+3X_1)^3 + (K-X_1)(3)(K+3X_1)^2(3)}{2\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}} \right] \frac{1}{\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}}$$

$$y'' = \frac{-12X_1(K-X_1)(K+3X_1)^3 - (K^2 - 3X_1^2)(K+3X_1)^2(9(K-X_1) - (K+3X_1))}{2\sqrt{(K-X_1)^3 \cdot (K+3X_1)^3} (K+3X_1)^2}$$

$$y'' = \frac{-12X_1(K-X_1)(K+3X_1) - (K^2 - 3X_1^2)(8K - 12X_1)}{2\sqrt{(K-X_1)^3 \cdot (K+3X_1)^5}}$$

$$y'' = \frac{-6X_1(K^2 + 2KX_1 - 3X_1^2) - (K^2 - 3X_1^2)(4K - 6X_1)}{\sqrt{(K-X_1)^3 \cdot (K+3X_1)^5}}$$

$$y'' = \frac{-6K^2X_1 - 12KX_1^2 + 18X_1^3 - 4K^3 + 6K^2X_1 + 12KX_1^2 - 18X_1^3}{\sqrt{(K-X_1)^3 (K+3X_1)^5}}$$

$$y'' = \frac{-4K^3}{\sqrt{(K-X_1)^3 \cdot (K+3X_1)^5}}$$

È bene ricordare che queste derivate sono state ricavate dalla forma esplicitata relativa agli assi $X_1; Y_1$ ruotati di $45^\circ = \pi/4$ rispetto agli assi principali X ed Y .

Calcoliamo il raggio di curvatura in funzione di x_1 e con modulo K .

$$R = \frac{(1 + y_1')^2}{y_1''}$$

Sostituiamo:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{K^2 - 3x_1^2}{\sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[\frac{-4K^3}{\sqrt{(K-x_1)^3 \cdot (K+3x_1)^5}}\right]}$$

$$R = \frac{\left[\frac{[(K-x_1)(K+3x_1)^3 + (K^4 - 6K^2x_1^2 + 9x_1^4)]^{3/2}}{(K-x_1)(K+3x_1)^3 \sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}}\right]}{\frac{-4K^3}{(K-x_1)(K+3x_1)^3}}$$

$$R = \frac{[(K-x_1)(K^3 + 9K^2x_1 + 27Kx_1^2 + 27x_1^3) + (K^4 - 6K^2x_1^2 + 9x_1^4)]^{3/2}}{(-4K^3)(K+3x_1)^2}$$

$$R = \frac{[K^4 + 9K^3x_1 + 27K^2x_1^2 + 27Kx_1^3 - K^3x_1 - 9K^2x_1^2 - 27Kx_1^3 - 27x_1^4 + K^4 - 6K^2x_1^2 + 9x_1^4]^{3/2}}{(-4K^3)(K+3x_1)^2}$$

$$R = \frac{[2K^4 + 8K^3x_1 + 12K^2x_1^2 - 18x_1^4]^{3/2}}{(-4K^3)(K+3x_1)^2}$$

$$R = \frac{2\sqrt{2}[K^4 + 4K^3x_1 + 6K^2x_1^2 - 9x_1^4]^{3/2}}{4(-K^3)(K+3x_1)^2}$$

$$R = \frac{[K^4 + 4K^3x_1 + 6K^2x_1^2 - 9x_1^4]^{3/2}}{-\sqrt{2}K^3(K+3x_1)^2}$$

Per $x_1 = 0 \rightarrow R = \frac{K}{\sqrt{2}} = 0,707K$; $R = \frac{5}{2}a$; $R = (1,5)a$

Per $x_1 = \overline{0V} = K \quad R = -\frac{K}{8} = -0,125K$; $R = \frac{3\sqrt{3}}{16}a$; $R = 0,265165a$

Agli estremi della corda massima del coppia $y_1' = 0$;

$$x_1 = \frac{K}{\sqrt{3}} = 0,577350269; R = K \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = (0,847486585)K = a \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= R = (1,497790535)a$$

Calcoliamo ora il raggio di curvatura con le formule parametriche: $y = tx$; $t = y/x$

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad ; \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3a \frac{(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 3a \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$

Se poniamo $y' = 1$ si ottiene l'equazione di 4° grado:

$$t^4 - 2t^3 + 0 - 2t + 1 = 0$$

che risulta soddisfatta per:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 2,29663 \stackrel{0263}{=} t_1(66^\circ 28' 14,52) \\ t_2 &= 0,4354206 = t_2(23^\circ 31' 45,48) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{tangenti degli argomenti} \\ \text{e dei punti estremi della} \\ \text{corda massima.} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} t_3 &= \\ t_4 &= \end{aligned} \right\} = -0,3660254 \pm i(0,9306049) \left\{ \begin{array}{l} \text{radici immaginarie.} \end{array} \right.$$

Verificata la formula, calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3a \frac{(-6t^2)(1+t^3)^2 - (1-2t^3)2(1+t^3)3t^2}{(1+t^3)^4}$$

$$= 18at^2 \frac{(-1)(1+t^3) - (1-2t^3)}{(1+t^3)^3} =$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 18at^2 \frac{(-2+t^3)}{(1+t^3)^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 3a \frac{[(2-t^3) + t(-3t^2)](1+t^3)^2 - t(2-t^3)^2(1+t^3)(3)t^2}{(1+t^3)^4}$$

$$= 3a \frac{(2-4t^3)(1+t^3)^2 - 6t^3(2-t^3)(1+t^3)}{(1+t^3)^3}$$

$$= 3a \frac{2-4t^3+2t^3-4t^6-12t^3+6t^6}{(1+t^3)^3}$$

$$= 3a \frac{2t^6-14t^3+2}{(1+t^3)^3} =$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 6a \frac{t^6-7t^3+1}{(1+t^3)^3}$$

$$R = \frac{(X'(t)^2 + Y'(t)^2)^{3/2}}{(X'(t)Y''(t) - Y'(t)X''(t))}$$

$$R = \frac{\left[\left(3a \frac{4-2t^3}{(1+t^3)^2} \right)^2 + \left(3a \frac{t(2-t^3)^2}{(1+t^3)^2} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(3a \frac{4-2t^3}{(1+t^3)^2} \right) \left(6a \frac{t^6-7t^3+1}{(1+t^3)^3} \right) - \left(3a \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} \right) \left(18at^2 \frac{(-2+t^3)}{(1+t^3)^3} \right)}$$

$$R = \frac{\left(\frac{3a}{(1+t^3)^2} \right)^3 [1-4t^3+t^6+4t^2-4t^5+t^8]^{3/2}}{\frac{18a^2}{(1+t^3)^5} [t^6-7t^3+1-2t^9+14t^6-2t^3+12t^3-12t^6+3t^9]}$$

$$R = \left(\frac{3a}{2(1+t^3)} \right) \frac{[t^8+4t^6-4t^5-4t^3+4t^2+1]^{3/2}}{[t^9+3t^6+3t^3+1]}$$

Per $X=0$; $t=0$; $R = \frac{3}{2}a = (1,5)a$

$X = \frac{3}{2}a$; $t=1$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{16} = (0,265165)a$

(come già trovato)

Calcoliamo ora l'area del cappio,

data la simmetria possiamo calcolare l'area di metà cappio compresa fra l'arco \widehat{OV} e la retta: $y = x$. Utilizziamo le espressioni parametriche $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$; ove: $y = t$.

lungo la retta \overline{OV} , $\frac{y}{x} = 1$ cioè $t = 1$.

Abbiamo visto che l'area espressa da un integrale curvilineo è:

$$A = \int_{\overline{VO}} x^2 dt + \int_{\widehat{OV}} x^2 dt$$

ma: $\int_{\overline{VO}} x^2 dx = 0$ per cui $A = \int_{\widehat{OV}} x^2 dt$; $0 \leq t \leq 1$;

$$A = \int_0^1 \left(\frac{3at}{1+t^3} \right)^2 dt = 3a^2 \int_0^1 \frac{3t^2 dt}{(1+t^3)^2} = 3a^2 \int_0^1 \frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = 3a^2 \left[\frac{-1}{1+t^3} \right]$$

$$A = 3a^2 \left[-\frac{1}{2} - (-1) \right] \quad \boxed{A = \frac{3a^2}{2}}$$

Quindi l'area del cappio del folium di Cartesio è tre volte l'area del triangolo staccato dall'asintoto sugli assi X ed Y .

Correlazioni fra gli elementi del folium di Cartesio

L'equazione ordinaria del folium di Cartesio è l'equazione implicita: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

Mediante una rotazione di $45^\circ = \pi/4$ degli assi X ed Y che abbiamo chiamato x_1 ed y_1 , nella posizione ruotata, si è potuto esplicitare la variabile dipendente ottenendo l'equazione esplicita:

$$y_1 = x_1 \sqrt{(K - x_1) / (K + 3x_1)} \quad ; \quad (K = \frac{3a}{\sqrt{2}})$$

per ogni valore di x_1 , da $-\infty$ a $+\infty$ si ha:

$$-\infty \leq x_1 < \left(-\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) ;$$

$$x_1 = \left(-\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) ; \quad (\text{asintoto}) \quad (y_1 = \pm \infty)$$

$$\left(-\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) < x_1 < 0 \quad ; \quad (\text{valori simmetrici}) \quad \begin{cases} -\infty < y_1 < 0 \\ +\infty > y_1 > 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad y_1 = 0 \quad (\text{punto doppio: nodo ordinario})$$

$$0 < x_1 < \left(\frac{K}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a\right) \quad (\text{valori simmetrici}) \quad \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq \frac{+K}{3} \sqrt{2\sqrt{3}-3} \\ 0 \leq y_1 \leq \frac{-K}{3} \sqrt{2\sqrt{3}-3} \end{cases}$$

$$x_1 = \left(\frac{K}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad ; \quad y_1 = \begin{cases} \frac{+K}{3} \sqrt{2\sqrt{3}-3} & (\text{massimo}) \\ \frac{-K}{3} \sqrt{2\sqrt{3}-3} & (\text{minimo}) \end{cases}$$

$$\left(\frac{K}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}\right) < x_1 < \left(K = \frac{3}{2}a\right) \quad (\text{valori simmetrici}) \quad \begin{cases} \text{max} > y_1 \geq 0 \\ \text{min} > y_1 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \left(K = \frac{3}{2}a\right) \quad y_1 = 0 \quad (\text{limite del coppia})$$

Vogliamo ora correlare x_1 ed y_1 , con X, Y .

Notiamo che per ogni valore di x_1 , cui corrispondono

le due ordinate: $+y_1$ e $-y_1$; indicheremo con A e B

i due estremi di una corda generica: $A \equiv (x_1; +y_1)$;

$B \equiv (x_1; -y_1)$. Avremo:

$$X_A = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad Y_A = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}$$

$$X_B = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad Y_B = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}$$

Dati x_1 ed y_1 si trovano X ed Y .

inversamente:

$$\frac{x_1}{A} = \frac{X_A + Y_A}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{y_1}{A} = \frac{Y_A - X_A}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x_1}{B} = \frac{X_B + Y_B}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{y_1}{B} = \frac{Y_B - X_B}{\sqrt{2}}$$

Esiste un valore limite della X che è maggiore di: $X = \frac{3}{2}a$, e che si ha quando l'ordinata y è tangente il cappio.

Per calcolare questo valore di X limite a destra delle y reali, basta cercare la $y'_1 = 1$

$$\text{cioè: } y'_1 = \frac{(K^2 - 3x_1^2)}{\sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}} = 1 \quad (y'_1 f(x))$$

$$y'_1 = \frac{(\frac{9}{2}a^2 - 3x_1^2)}{\sqrt{(\frac{3}{\sqrt{2}} - x_1)(\frac{3}{\sqrt{2}} + 3x_1)^3}} = 1 \quad (y'_1 f(a))$$

$$y_1' = \frac{\frac{3}{2}(3a^2 - 2x_1^2)}{\sqrt{\left(\frac{3a - \sqrt{2}x_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3a + 3\sqrt{2}x_1}{\sqrt{2}}\right)^3}} = \frac{3(3a^2 - 2x_1^2)}{2\left(\frac{3(a + \sqrt{2}x_1)}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\left(\frac{3a - \sqrt{2}x_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3(a + \sqrt{2}x_1)}{\sqrt{2}}\right)}}$$

$$\boxed{y_1' = \frac{(3a^2 - 2x_1^2)}{\sqrt{3(3a - \sqrt{2}x_1)(a + \sqrt{2}x_1)^3}} = 1}$$

cioè:

$$(3a^2 - 2x_1^2)^2 = 9a^4 + 24\sqrt{2}a^3x_1 + 36a^2x_1^2 - 12x_1^4$$

infine l'equazione:

$$16x_1^4 - 48a^2x_1^2 - 24\sqrt{2}a^3x_1 = 0$$

che semplificata diventa:

$$(x_1)\left(x_1^3 - 3a^2x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}a^3\right) = 0$$

saperemo la risoluzione $x_1 = 0$.

l'equazione di terzo grado ammette una sola ra
dice reale

$$x_1 = \left(\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)a$$

$$\boxed{x_1 = (2,013360766)a}$$

od anche:

$$\boxed{x_0 = \left(\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{3}\right)K}$$

$$\boxed{x_1 = (0,949107369)K}$$

l'espressione di x_1 può scriverci:

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt[3]{2})a; \text{ od anche } \boxed{x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{2}\right)a}$$

$$y_1 = x_1 \sqrt{(K - x_1)/(K + 3x_1)} = x_1 \sqrt{\left(\frac{3a - x_1}{\sqrt{2}}\right)/\left(\frac{3a + 3x_1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\boxed{y_0 = \left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{3}\right)K = (0,10916)K}$$

$$\boxed{y_1 = \left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)a = (0,23156333)a}$$

Quindi il valore limite di X_{lim} sarà:

$$X_{lim} = \left(\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \right) a = \left(\frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) + (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2})} \right) a = \boxed{X = (\sqrt[3]{4}) a = (1,587401052) a}$$

$$Y = \left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} \right) a = \left(\frac{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) - (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2})} \right) a = \boxed{Y = (\sqrt[3]{2}) a = (1,25992105) a}$$

sostituendo il valore della X_{lim} nella equazione:

$$\boxed{X^3 + Y^3 = 3aXY}$$

si ha:

$$Y^3 - 3a\sqrt[3]{4}Y + 4 = 0 = \boxed{Y^3 - \sqrt[3]{(27)(4)} a Y + 4 = 0}$$

equazione di 3° grado già in forma ridotta, (vediamo quante radici reali ha):

$$Y = \sqrt[3]{\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{(4)(27)}{27}}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{0}}$$

quindi si hanno tre radici reali di cui due coincidenti. Se con Y_p ; Y_q ; Y_c indichiamo le tre ordinate per ogni valore della X ; in questo caso limite abbiamo:

$$\boxed{Y_p = Y_q = (\sqrt[3]{2}) a = (1,25992105) a}$$

Dividendo l'equazione generale per $(y - (\sqrt[3]{2})a)(y - (\sqrt[3]{2})a)$, cioè abbiamo:

$$a^3 \left(\begin{array}{r} y^3 + 0 - \frac{6}{\sqrt[3]{2}} y + 4 \\ -y^3 + 2\sqrt[3]{2} y^2 - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} y \end{array} \right) \Bigg/ \frac{(y^2 - (2\sqrt[3]{2})y + \sqrt[3]{4})a^2}{(y + 2\sqrt[3]{2})a}$$

$$\begin{array}{r} // + 2\sqrt[3]{2} y^2 - \frac{8}{\sqrt[3]{2}} y \\ - 2\sqrt[3]{2} y^2 - 4\sqrt[3]{4} y - 4 \\ \hline \text{resto: } // \quad // \quad // \end{array}$$

ricordiamo: $\sqrt[3]{4} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{8}{\sqrt[3]{2}}$

quindi: $\boxed{Y_c = -(2\sqrt[3]{2})a}$ $Y_c = \left(-\sqrt[3]{16} a\right) = (2,5198421a)$

Per simmetria, al punto di tangenza della X_{lim} corrisponde una Y_{max} ove l'ascissa è tangente. Poiché Y_{max} e X_{max} (X_{lim}) sono gli estremi di una corda che indicheremo con T_A e T_B determinata da:

$$\frac{x_1}{T_A} = \frac{x_1}{T_B} = \left(\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \right) a = \left(\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{3} \right) K$$

ove:

$$\frac{y_1}{T_A} = + \left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \right) a = \left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{3} \right) K$$

$$\frac{y_1}{T_B} = - \left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \right) a = - \left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{3} \right) K$$

ed in coordinate $x; y$ avremo:

per $X = (\sqrt[3]{2}) a \rightarrow \boxed{Y_{max} = Y_{lim} = (\sqrt[3]{4})} \quad (Y_P)$

Perciò per $X = (\sqrt[3]{2}) a$ si ha anche un Y_Q ed un Y_C ; sostituendo $X = (\sqrt[3]{2}) a$ nella: $X^3 + Y^3 - 3aXY = 0$; si ha:

$(2 + Y^3 - 3\sqrt[3]{2}Y = 0)$ che divisa per: $(Y - \sqrt[3]{4})$ ci dà l'equazione di 2° grado: $\boxed{Y^2 + (\sqrt[3]{4})Y - \sqrt[3]{2}} = 0$

$$Y = \frac{-\sqrt[3]{4}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{4} + 3\sqrt[3]{2}} = \frac{-\sqrt[3]{4}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{1+2} = \boxed{Y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}}$$

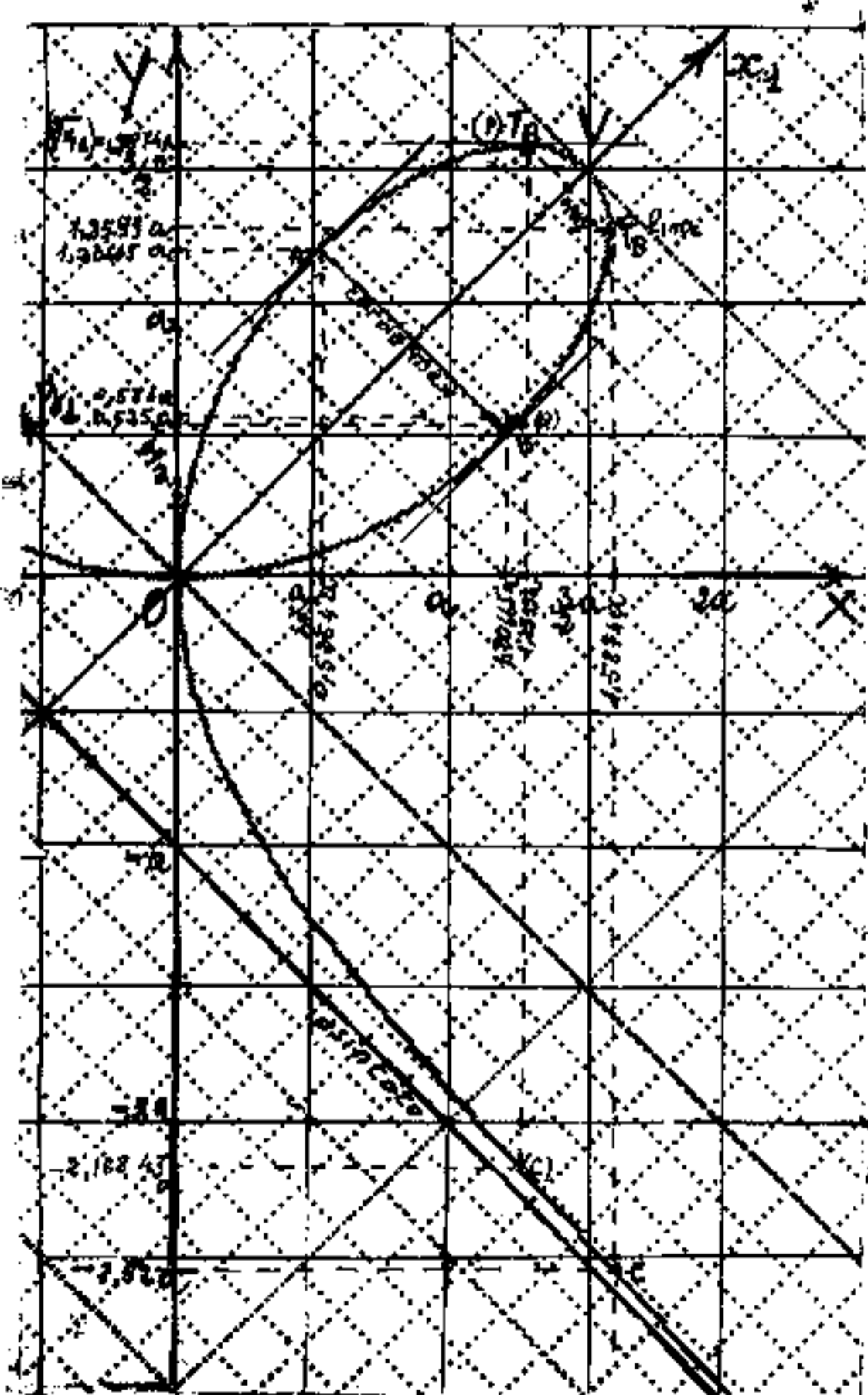
quindi le tre radici sono:

$$Y_{max} = Y_P = (\sqrt[3]{4}) a = +(1,587401052) a$$

$$Y_Q = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \right) a = +(0,581029111) a$$

$$Y_C = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \right) a = -(2,168430163) a$$

Per una visione degli elementi calcolati riproduciamo un grafico del folium di Cartesio ove nelle direzioni X ed Y si è sovrapposta una quadrettatura di lato $a/2$, mentre nelle direzioni x_1 ed y_1 si è sovrapposta una quadrettatura di lato $(K/10)$, in tal modo si possono verificare i valori numerici delle grandezze misurate in modulo " a " ed in modulo K .



Si riporta anche una tabella dei raggi di curvatura (in funzione di

x_1/K) TABELLA

x_1/K	R/K	R/a
0.-	.707106	1.5
.1	.737438	1.564344
.2	.796297	1.689203
.3	.853172	1.809852
.4	.887621	1.882929
.5	.883966	1.875176
.6	.830615	1.762001
.7	.720994	1.52946
.8	.555648	1.178708
.9	.346225	.734455
.91	.323824	.686934
.92	.301315	.639186
.93	.278752	.591323
.94	.256192	.543466
.95	.233699	.495750
.96	.211342	.448324
.97	.189200	.401355
.98	.167361	.355027
.99	.145924	.309551
1.00	.125000	.265165

Costruzione grafica approssimata del foglio di Cartesio.

Tracciati gli assi principali $X; Y$ e gli assi ruotati di 45° : x_1 ed y_1 , dal centro O si prenda su x_1 un segmento $\overline{OV} = K$ che sarà la lunghezza del coppia.

Con apertura di compasso pari a $\frac{4}{9}\overline{OV} = R = \frac{4}{9}K$ si riporta su x_1 il segmento $\overline{OC} = R = \frac{4}{9}K$, quindi centro in C e raggio R si traccia un arco di cerchio che vada dall'ordinata $x_1 \cong -0,2K$ all'ordinata $x_1 \cong 0,92K$.

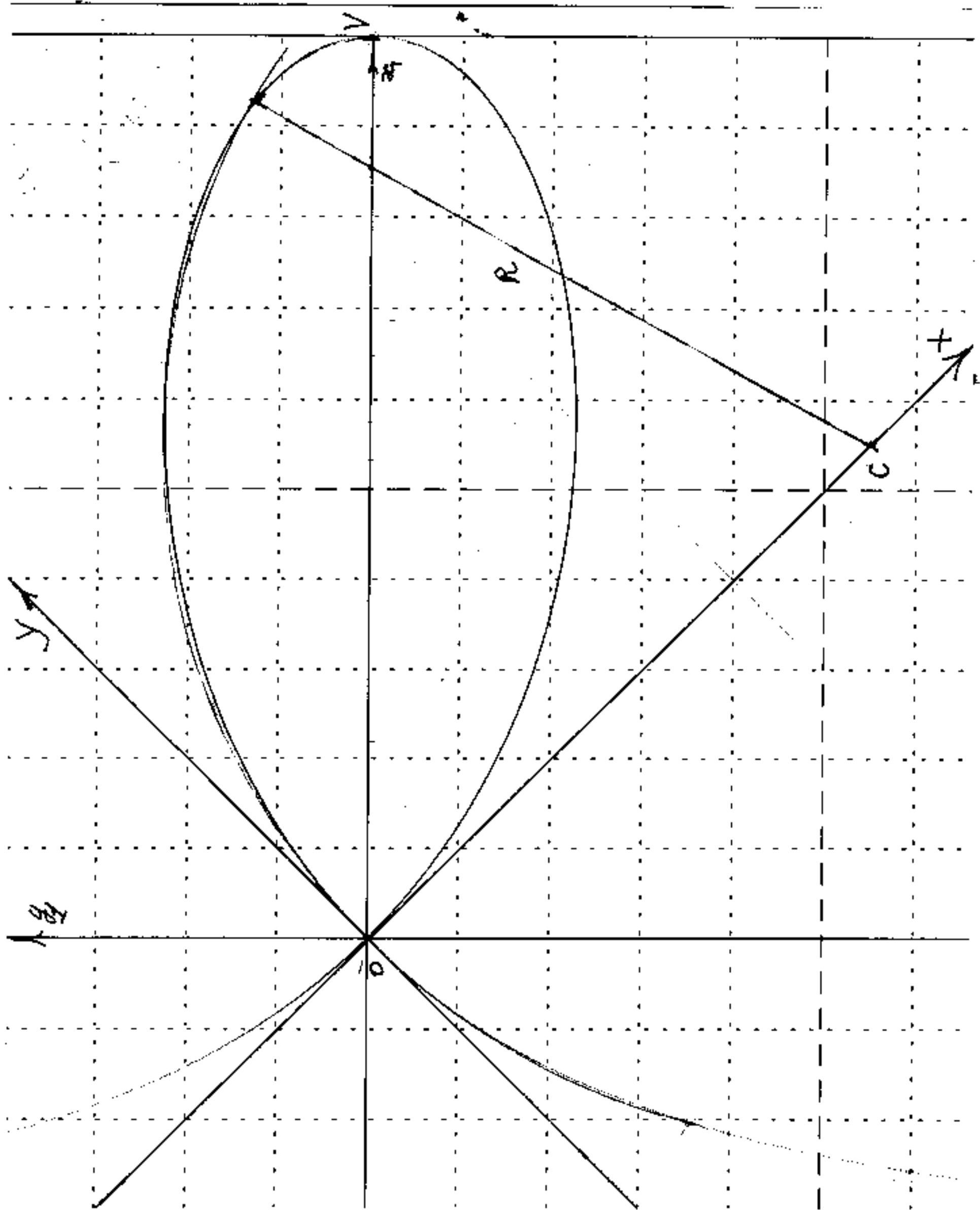
Analogamente con centro C_1 in y_1 ; ($OC_1 = R$) quindi con raggio $\cong 0,16K$ si tracciano i due archi di cerchio facendo centro su x_1 , ove si intersecano i raggi che delimitano gli archi.

Diamo una tabella degli errori ove x_1 ed y_1 sono le coordinate per $K=1$, ed y_c le ordinate del cerchio.

x_1/K	y_1/K	y_c/K	$y_1 - y_c/K$
0.10	0.08321	0.08443	-0.00122
0.20	0.14142	0.14462	-0.00320
0.30	0.18209	0.18654	-0.00445
0.40	0.20889	0.21321	-0.00432
0.50	0.22361	0.22620	-0.00259
0.60	0.22678	0.22620	0.00058
0.70	0.21776	0.21320	0.00456
0.80	0.19403	0.18652	0.00751
0.90	0.14796	0.14459	0.00337

Naturalmente si sono costruzioni più precise. questa è molto semplice.

Su un disegno eseguito col computer si è sovrapposto un arco della costruzione approssimata per evidenziare l'errore.



La simmetria ed i moduli unitari

Abbiamo già data la definizione di simmetria nel I° Vol. ed accennato al concetto di equilibrio, così connesso con la simmetria.

Nel IV Vol abbiamo trattato la simmetria nei cristalli, ed infine nel trattare il folium di Cartesio abbiamo detto: "utilizzando la simmetria..." (sottinteso: equazione o curva simmetrica)

Poiché l'utilizzazione della simmetria consente, in genere, di semplificare e di abbassare il n° delle incognite nei problemi di matematica applicata, in particolare in scienza delle costruzioni. In questa sede, evidenziando l'esperienza del folium di Cartesio, vogliamo trattare della simmetria utilizzata nelle equazioni e nelle curve.

Consideriamo l'equazione del folium di Cartesio riferita agli assi x ed y :

$$\underline{x^3 + y^3 - 3axy = 0}$$

anche se priva del termine noto e già in forma ridotta è pur sempre una equazione di 3° grado, e se tracciamo una retta parallela all'asse y , o all'asse x i punti comuni sono sempre tre, (tutti e tre reali e diversi, tre reali di cui due uguali, uno solo reale)

Se notiamo che una curva qualsiasi ammette un'asse di simmetria, se assumiamo tale asse come ascisse, le ordinate (essendo simmetriche) dipenderanno da una radice quadrata, l'equazione di 3° grado diventa di secondo; nel

caso del folium:
$$y_1 = x_1 \sqrt{\frac{(K - x_1)}{(K + 3x_1)}}$$

e se tracciamo rette parallele ad y_1 , i punti comuni sono sempre due: (due reali, o due immaginari).

(cercheremo di utilizzare la simmetria anche per altre curve). Per quanto concerne i moduli, abbiamo visto (per il folium di Cartesio) che $\overline{OV} = K = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

si noti che il raggio di curvatura nell'origine è $\frac{3}{2}a$, ($= \frac{K}{\sqrt{2}}$); nel vertice è: $K/8$, ($= \frac{3}{16}a\sqrt{2}$), anche la scelta del modulo può semplificare.

Un'altro modo di utilizzare la simmetria per le curve è quello di rappresentarle in coordinate polari, assumendo come origine degli angoli (argomenti), l'asse di simmetria; punti simmetrici avranno lo stesso raggio (modulo) e l'argomento (angolo), dello stesso valore di segno opposto. Ciò può ulteriormente semplificare se consideriamo: $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ per es. la trisettrice di MacLaurin: $\rho = \frac{1}{\cos(\theta/2)}$; che tratteremo.

Evoluta Ξ

Dicesi evoluta di una curva piana Γ il luogo dei centri di curvatura di Γ .

Se Ξ è la curva evoluta di Γ , Γ è la curva evolvente di Ξ .

Perché ogni raggio di curvatura R , in un punto P di Γ , giace su una retta che è normale in P a Γ , ma il centro C di curvatura, che giace su Ξ , è anche il punto di tangenza delle rette $\overline{PC} = R$ sulla curva Ξ ; la curva evoluta Ξ può considerarsi l'involuppo delle rette normali all'evolvente Γ .

L'evoluto Ξ è detta anche sviluppata, l'evolvente Γ è detta anche sviluppante.

Siano: $x(t)$ e $y(t)$ le coordinate parametriche di Γ . L'equazione delle rette normali a Γ nel punto $(x(t); y(t))$ è:

$$f(x, y, t) \equiv (x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0$$

$$f'(x, y, t) \equiv (xx''(t) - x_{(t)}^2 - x(t)x''(t) + yy''(t) - y_{(t)}^2 - y(t)y''(t)) = 0$$

$$f'_{(t)} \equiv (x - x(t))x''(t) + (y - y(t))y''(t) = x_{(t)}^2 + y_{(t)}^2$$

dalla f ricaviamo: $-\frac{(y - y(t))}{x_{(t)}} = (x - x_{(t)})$;

che sostituiamo nella $f'_{(t)}$:

$$(y - y_{(t)}) \left[y''_{(t)} - \frac{y'_{(t)} x''_{(t)}}{x'_{(t)}} \right] = (x_{(t)}^2 + y_{(t)}^2)$$

ed otteniamo:

$$(y - y(t)) = \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)} \right) x'(t)$$

ed analogamente:

$$(x - x(t)) = - \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)} \right) y'(t)$$

ma noi sappiamo che:

$$\left(\frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)} \right) = R(t)$$

è il raggio di curvatura di Γ nel punto $(x(t); y(t))$

perciò:

$$\begin{cases} x = x(t) - \left(\frac{R(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) y'(t) \\ y = y(t) + \left(\frac{R(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) x'(t) \end{cases} \text{ sono le coordinate parametriche della curva } \Xi$$

($\Xi = \text{Evoluta di } \Gamma$)

Possiamo anche scrivere:

(essendo: $\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{dy(t)}{ds(t)} = \sin \alpha$; $\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{dx(t)}{ds(t)} = \cos \alpha$.)

$$\begin{cases} x = x(t) - R(t) \frac{dy(t)}{ds(t)} \\ y = y(t) + R(t) \frac{dx(t)}{ds(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c = R_p \cos(\hat{x}_{(p)} \hat{n}_{(p)}) + x_{(p)} \\ y_c = R_p \sin(\hat{y}_{(p)} \hat{n}_{(p)}) + y_{(p)} \end{cases}$$

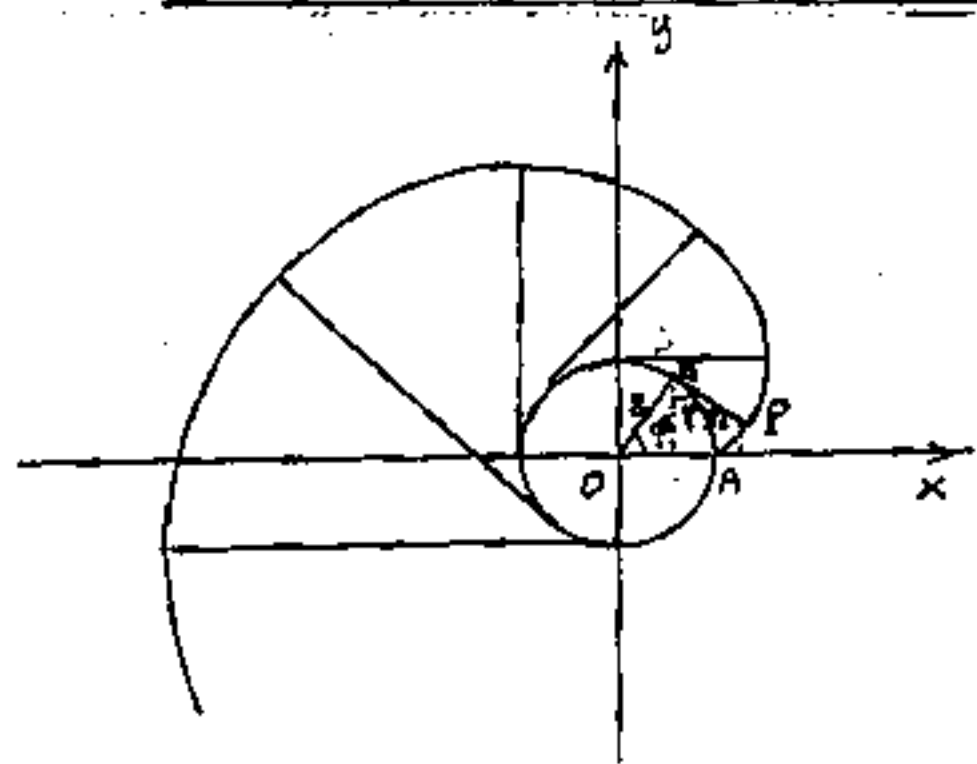
Ove si nota che la distanza fra il punto P di Γ da cui parte la normale ed il punto C di Ξ ove tale normale diventa tangente ad Ξ è appunto il raggio R_p di curvatura in P .

Con ciò resta dimostrato che il luogo geometrico dei centri di curvatura di una linea Γ (evoluta o sviluppata di Γ) è anche l'involuppo delle rette normali a Γ .

Cerchiamo ora il problema inverso: data l'evoluta trovare l'evolvente. Vi sono curve che hanno sia l'evoluta, sia l'evolvente.

Nel cerchio l'evoluta si riduce al suo centro.

L'evolvente di un Cerchio



Sia r il raggio del cerchio, e sia $\overline{OB} = r$, un raggio che ha ruotato dell'angolo φ dalla posizione iniziale \overline{OA} .

Sulla perpendicolare di

\overline{OB} da B riportiamo il segmento \overline{BP} pari all'arco \widehat{BA} ; ($\overline{BP} = \widehat{BA}$); il punto P è un punto dell'evolvente del cerchio. $\overline{BP} = r\varphi$, avremo:

$$\begin{aligned} x &= r [\cos \varphi + \varphi \operatorname{sen} \varphi] \\ y &= r [\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi] \end{aligned}$$

Equazioni parametriche dell'evolvente di un cerchio

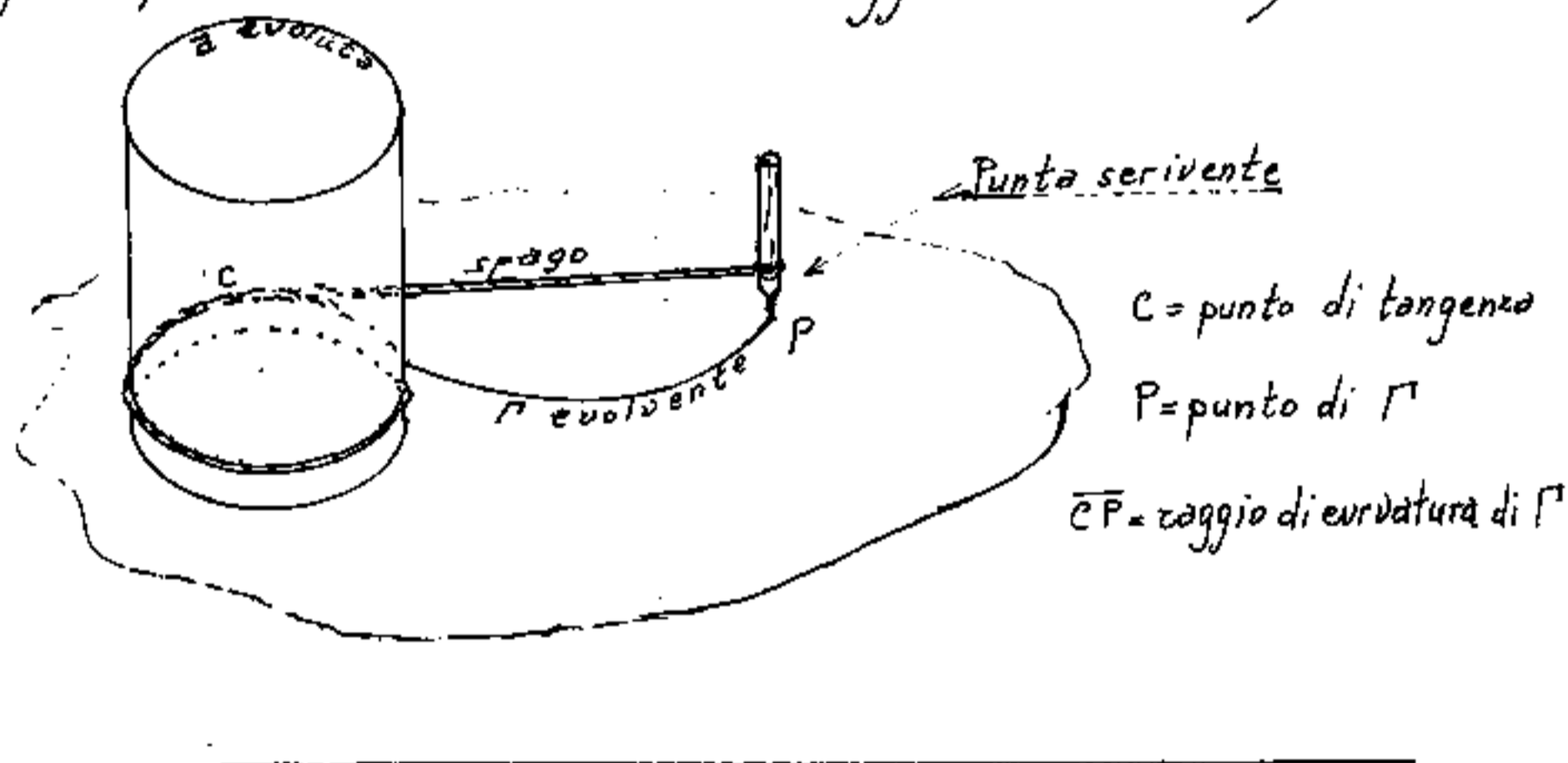
elevando a quadrato e sommando si ha:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = r^2 [1 + \varphi^2]$$

che è la legge pitagorica: $\rho^2 = r^2 + (r\varphi)^2$

Costruzione dell'evolvente di un cerchio

Se avvolgiamo dello spago su un cilindro, ed all'estremo libero dello spago poniamo una punta scrivente, messo il cilindro in verticale su un foglio, svolgiamo, tenendolo teso lo spago e con la punta scrivente sul foglio, si traccia: L'evolvente. (Le spire di spago non debbono sovrapporsi perché varierebbero il raggio del cilindro)



L'evoluta e l'evolvente sono curve importantissime per la costruzione dei denti degli ingranaggi meccanici. (V. Speluzzi Tassarotto - Disegno di Macchine pag. 746 5100 ed Hoepli)

(Per l'evoluta delle coniche Cf. II Vol)

Rettificazione dell'evolvente.

Sia R il raggio di curvatura di una curva Γ e sia \exists la sua evolvente.

Abbiamo già visto che l'equazione dell'evolvente in parametriche può scriversi:

$$\begin{cases} x = x_{(t)} - R_{(t)} \frac{dy_{(t)}}{ds_{(t)}} \\ y = y_{(t)} + R_{(t)} \frac{dx_{(t)}}{ds_{(t)}} \end{cases}$$

ove $(x_{(t)}; y_{(t)})$ è un generico punto di Γ ed R il suo raggio di curvatura. Se cambiamo parametro, (cioè è possibile data la genericità di $(x=x_{(t)}; y=y_{(t)})$) avremo, prendendo come parametro l'arco "s" di curva, che: $\frac{dx_{(t)}}{ds_{(t)}} = x'_s$; $\frac{dy_{(t)}}{ds_{(t)}} = y'_s$;

e le equazioni di \exists diventano:

$$\begin{cases} x = x_{(s)} - R_{(s)} y'_{(s)} \\ y = y_{(s)} + R_{(s)} x'_{(s)} \end{cases}$$

derivando abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = x'_{(s)} - R_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} R'_{(s)} \\ \frac{dy}{ds} = y'_{(s)} + R_{(s)} x''_{(s)} + x'_{(s)} R'_{(s)} \end{cases}$$

quadrando e sommando:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)} + R^2_{(s)}(x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)}) + R'^2_{(s)}(x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)}) - 2R_{(s)}(x'y'' - y'x'') + 2R'_{(s)}R_{(s)}(y'y'' + x'x'')$$

$$\text{ma: } (x'_{(s)} + y'_{(s)})^2 = 1 ; (x'_{(s)} x''_{(s)} + y'_{(s)} y''_{(s)}) = 0 ; R_s = \frac{(x'_{(s)} + y'_{(s)})^{3/2}}{(x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)})} = \frac{1}{(x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)})}$$

$$R_{(s)} (x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)}) = 1 ; (x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)})^2 = \underbrace{(x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)})}_{=1} \underbrace{(x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)})}_{=0} - \underbrace{(x'_{(s)} x''_{(s)} + y'_{(s)} y''_{(s)})}_{=0}$$

$$R_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)}}} ; \boxed{\frac{1}{R^2_{(s)}} = (x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)})}$$

Per cui la nostra espressione ottenuta quadrando e sommando diventa:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 + 1 + R'_{(s)} - 2$$

$$\boxed{R'_{(s)} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

e poiché i simboli x ed y sono dell'evolvente, se poniamo ds_1 l'arco infinitesimo di evolvente:

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 ; \text{avremo: } R'^2_{(s)} = \left(\frac{d(s_1)}{ds}\right)^2$$

$$\boxed{R'_{(s)} = \pm \frac{ds_1}{ds}} ; \int ds_1 = \int R'_{(s)} ds$$

$$\boxed{s_1 = R - R_0}$$

Questa formula esprime una notevolissima proprietà:

L'arco di evolvente (s_1), compreso fra due punti, è uguale alla differenza dei raggi di curvatura dell'evolvente, corrispondenti agli stessi due punti.

(Analiticamente giustifico la costruzione dell'evolvente del cerchio)

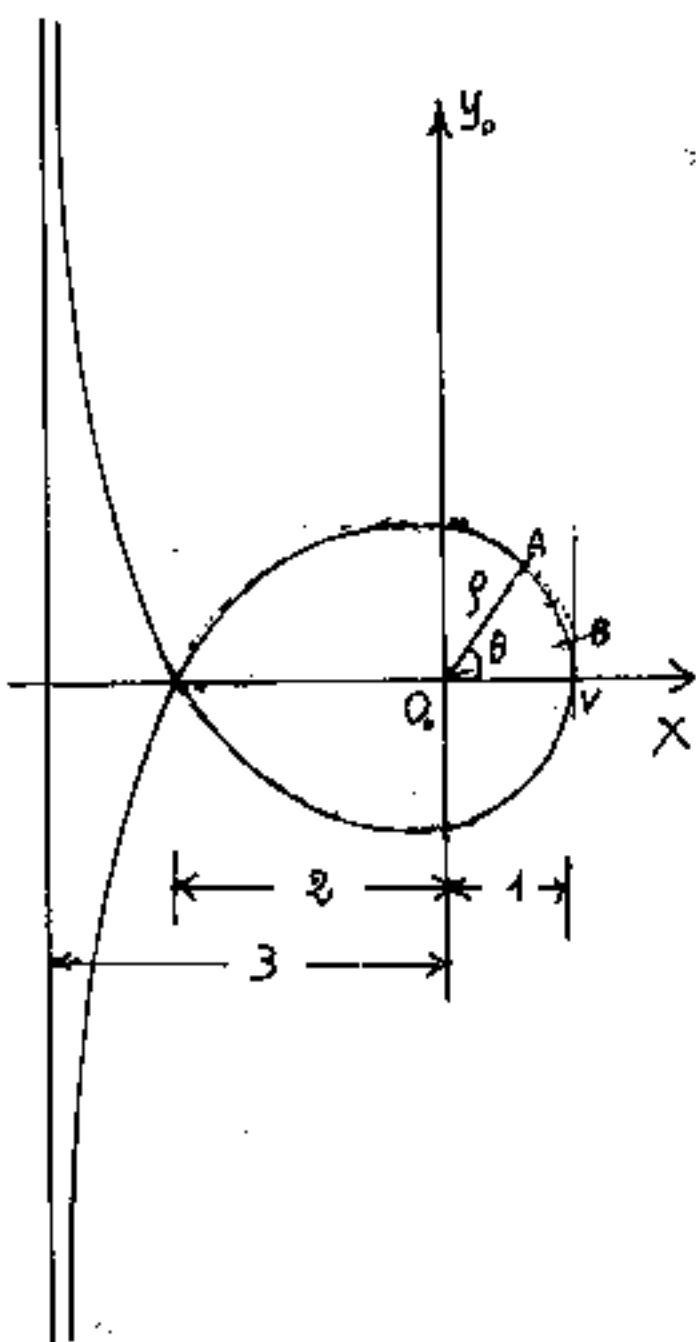
Trisettrice di Maclaurin

Fra le curve esprimibili con polinomi di terzo grado, vi è anche la curva trisettrice di Maclaurin. Il problema della trisezione dell'angolo, problema classico, unitamente al problema di Delo è stato già esposto in più parti dal I° al V° vol. La lumaca di Pascal, (altra curva trisettrice) sarà trattata in seguito.

Il Maclaurin rappresento in coordinate polari la curva:

$$\rho = \frac{1}{\cos(\theta/3)}$$

che poi fu detta trisettrice di Maclaurin.



Per trisezionare l'angolo θ basta tracciare un arco di cerchio di centro O e raggio ρ , che incontrerà la retta parallela ad y ($x=1$) nel punto B
 $\widehat{VOB} = \frac{1}{3} \widehat{VOA}$.

La curva in coordinate parametriche diventa:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) / \cos(\theta/3) \\ y = \sin(\theta) / \cos(\theta/3) \end{cases}$$

derivando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\theta) \cdot \cos(\theta/3) + (\sqrt{3}) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\theta/3)}{(\frac{1}{3}) \sin(\theta/3) \cos(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta/3)}$$

calcoliamo l'asintoto

$$x = \lim_{\theta \rightarrow 270^\circ} \left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta/3)} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{\theta \rightarrow 270^\circ} \frac{-\sin(\theta)}{(-\frac{1}{3}) \sin(\theta/3)} =$$

$$= \boxed{x_0 = -3} \quad (\text{ascissa dell'asintoto})$$

Operiamo una traslazione di assi in modo che l'origine sia nel punto doppio della curva. Occorre eliminare

θ ; poniamo $\varphi = \frac{\theta}{3}$, e ricordiamo che:

$$\sin(3\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3\varphi; \quad \cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

per cui:

$$x_0 = \frac{4\cos^3(\varphi) - 3\cos\varphi}{\cos(\varphi)} = 4\cos^2(\varphi) - 3 \quad \text{e spostando}$$

l'origine e tenendo conto di riferire il disegno ad un modulo lineare (segmento unitario) a abbiamo

$$\frac{x_0}{a} - 2 = 4\cos^2\varphi - 3; \quad \left(\frac{x_0}{a} + 1\right)/4 = \cos^2(\varphi); \quad \sin^2\varphi = (3 - x_0/a);$$

sostituendo:

$$y/a = (4\sin^2 - 3) \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \boxed{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{3 - x/a}{1 + x/a}} = y/a}$$

elevando a quadrato:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 (1 + \frac{x}{a}) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 (3 - \frac{x}{a}); \quad \frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2x}{a^3} + \frac{y^2}{a^2} = 0$$

moltiplicando per a^3 :

$$\boxed{x^3 - 3ax^2 + y^2x + ay^2 = 0}$$

(equazione cartesiana della trisettrice di MacLaurin)

Esplicitiamo la y :

$$y = \sqrt{\frac{(3ax^2 - x^3)}{(a+x)}}$$

Si noti l'analogia con quanto osservato sul folium di Cartesio.

Eseguiamo la derivata:

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+x)}{(3ax^2 - x^3)}} \left(\frac{(6ax - 3x^2)(a+x) - (3ax^2 - x^3)(1)}{(a+x)^2} \right)$$

$$y' = \frac{(6a^2x - 3ax^2 + 6ax^2 - 3x^3 - 3ax^2 + x^3)}{2 \sqrt{(3ax^2 - x^3)(a+x)^3}}$$

$$y' = \frac{2x(3a^2 - x^2)}{2x \sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}$$

$$y' = \frac{(3a^2 - x^2)}{\sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}$$

$$y' = 0 \text{ per } x = a\sqrt{3} \text{ (ascissa di max e di min)}$$

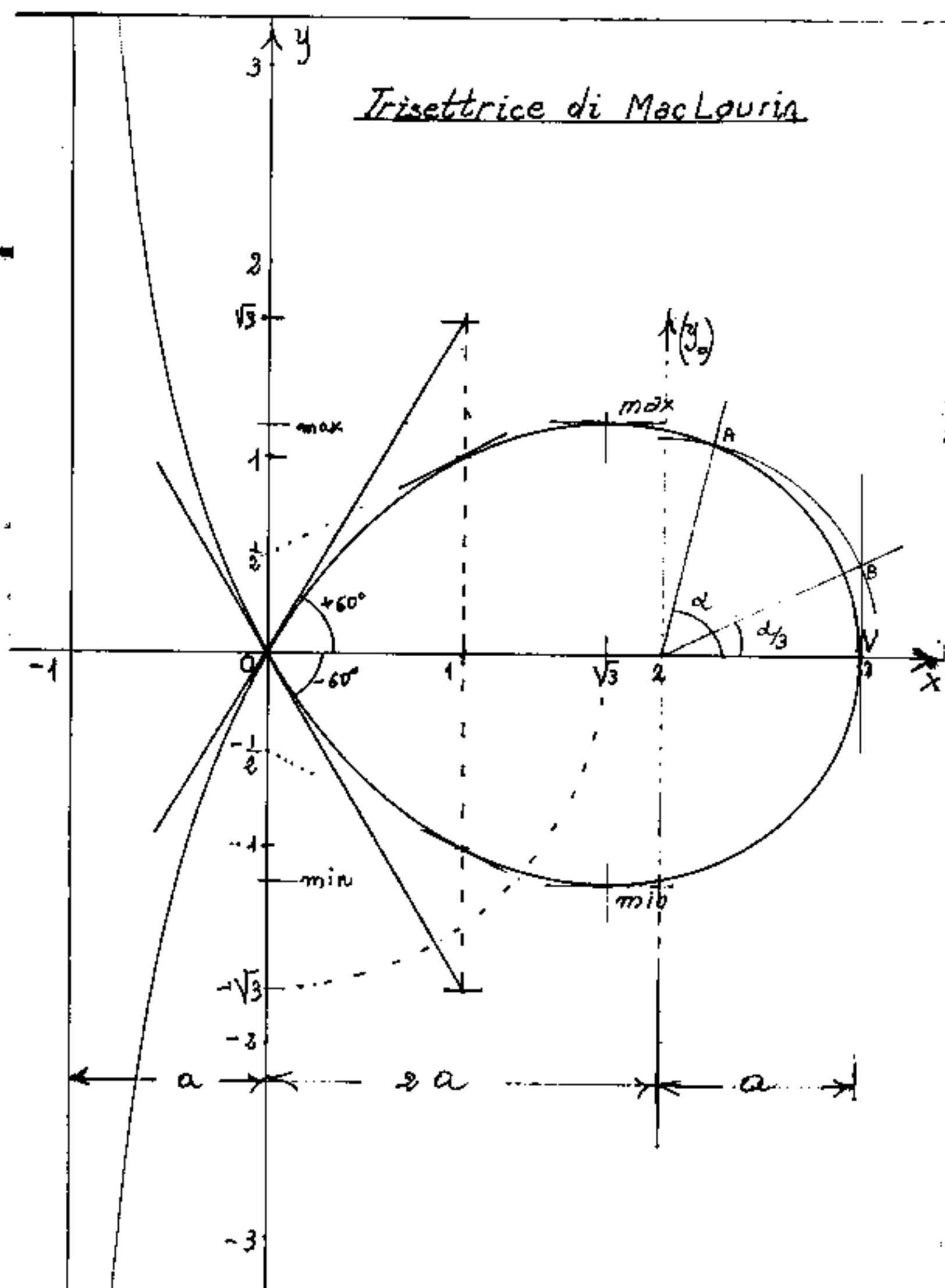
$$y = \sqrt{\frac{3a \cdot 3a^2 - 3a^2 \cdot a\sqrt{3}}{a + a\sqrt{3}}} = a \sqrt{\frac{3 \cdot (3 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})}} =$$

$$y = a \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{3})(5 - 1)}{2}} = a \sqrt{3(2\sqrt{3} - 3)}$$

$$y = a \sqrt{(6\sqrt{3} - 9)} = \pm(1,17995968)a \text{ (ordinata di max e min)}$$

$$\text{per } x=0 \quad y' = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \text{tang } \pm 60^\circ \text{ tangenti all'origine}$$

Trisettrice di MacLaurin



per $x = -a$; $y' = \infty$; $y = \infty$; (asintoto verticale)

per $x = +a$; $y' = \frac{1}{2}$; $y = \pm a$;

per $x = 3a$; $y' = \infty$; $y = 0$; (ascissa limite)

per $x = 2,066075a$ ed $x = 0,452874a$ si ha $y' = \pm 1$.
(radici di: $x^2 - 6a^2x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$)

facciamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{(-2x)\sqrt{(3a-x)(a+x)^3} - (3a^2-x^2)\frac{(-1)(a+x)^3 + (3a-x)3(a+x)^2}{2\sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}}{(3a-x)(a+x)^3}$$

$$y'' = \frac{(-4x)(3a-x)(a+x)^3 + (3a^2-x^2)[(a+x)^3 - (3a-x)3(a+x)^2]}{2(3a-x)(a+x)^3\sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}$$

$$y'' = \frac{2(6ax+2x^2)(a+x) + (3a^2-x^2)[a+x-9a+3x]}{2\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}$$

$$y'' = \frac{\cancel{2}[-6ax+2ax^2-6ax^2+2x^3] + \cancel{2}[-12a^3+4ax^2+6a^2x-2x^3]}{\cancel{2}\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}$$

$$y'' = \frac{-12a^3}{\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}$$

Ora possiamo calcolare i taggi di curvatura

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$R = \left(1 + \frac{(3a^2-x^2)^2}{(3a-x)(a+x)^3}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}{-12a^3}\right)$$

$$R = \frac{\left((3a-x)(a+x)^3 + (9a^4 - 6a^2x^2 + x^4) \right)^{3/2}}{(3a-x)(a+x)^2 \sqrt{(3a-x)(a+x)^3}} \frac{(3a-x)(a+x) \sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}{-12a^3}$$

$$R = \frac{\left((3a-x)(a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3) + (9a^4 - 6a^2x^2 + x^4) \right)^{3/2}}{(a+x)^2 (-12a^3)}$$

$$R = \frac{(3a^4 + 9a^3x + 9a^2x^2 + 3ax^3 - a^3x - 3a^2x^2 - 3ax^3 - x^4 + 9a^4 - 6a^2x^2 + x^4)^{3/2}}{-12a^3(a+x)^2}$$

$$R = \frac{(12a^4 + 8a^3x)^{3/2}}{(-12a(a+x)^2)}$$

può scriversi:

$$R = \frac{2a^3(3a^2 + 2ax)^{3/2}}{-3(a+x)^2}$$

od anche:

$$R = \frac{2 \left(3 + 2\frac{x}{a} \right)^{3/2}}{-3 \left(1 + \frac{x}{a} \right)^2}$$

per $x = 0$; $-R = 2a\sqrt{3}$; $-R = (3,4641016)a$;

per $x = \frac{1}{2}a$; $R = \frac{64}{27}a$; $-R = (2,37037037)a$;

per $x = 1a$; $R = \frac{5\sqrt{5}}{6}a$; $-R = (1,86338998)a$;

per $x = 2a$; $R = \frac{14\sqrt{7}}{27}a$; $-R = (1,37187105)a$;

per $x = 3a$; $R = \frac{9}{8}a$; $-R = (1,125)a$; (limite)

Trasformiamo in parametriche le coordinate x ed y ove: $y = \sqrt{\frac{3ax^2 - x^3}{(a+x)}}$

cioè: posto: $y = tx$

$$t^2 x^2 (a+x) = 3ax^2 - x^3$$

$$(t^2 + 1)x^3 = (3 - t^2)ax^2$$

$$\boxed{x = a \frac{(3 - t^2)}{(1 + t^2)}}; \quad \boxed{y = a \frac{(3t - t^3)}{(1 + t^2)}}$$

per $t = 0$; $x = 3a$; $y = 0$ (coordinate di V)

per $t = 1$; $x = a$; $y = a$

per $t = \sqrt{3}$; $x = 0$; $y = 0$ (origine degli assi)

per $t = 2$; $x = -0,2$; $y = -0,4$

per $t = 3$; $x = -0,6$; $y = -1,8$

 $t = \infty$; $x = -1$; $y = -\infty$ (limite asintotico)

Volendo calcolare l'area del cappio, possiamo molto semplicemente avvalerci della formula per il calcolo delle aree in coordinate polari:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta} \rho^2 d\theta$$

e se consideriamo la espressione di Maclaurin:

$$\rho = \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{3})}$$

ricordando la diversa origine e considerando il

doppio di un solo ramo avremo: $A = 2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{3})} \right)^2 d\theta$

cioè:

$$A = 3 \int_0^{\pi} \frac{d\theta/3}{\cos^2 \theta/3} = 3 \left[\tan \theta/3 \right]_0^{\pi}$$

$$A = 3 \left[\tan(\pi/3) - \tan 0 \right] = 3\sqrt{3}$$

(per l'intero
cappio)

$$\underline{A = 5,196152423 a^2}$$

(per il semicappio)

$$\underline{A = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2,598076211 a^2}$$

Se per il calcolo dell'area del cappio volessimo utilizzare le coordinate cartesiane avremmo:

$$A = \int_{\pi}^3 y dx ; A = 2 \int_0^3 \sqrt{\frac{(3ax^2 - x^3)}{(a+x)}} dx$$

di non comoda risoluzione.

Se per il calcolo dell'area del cappio, volessimo utilizzare un integrale curvilineo

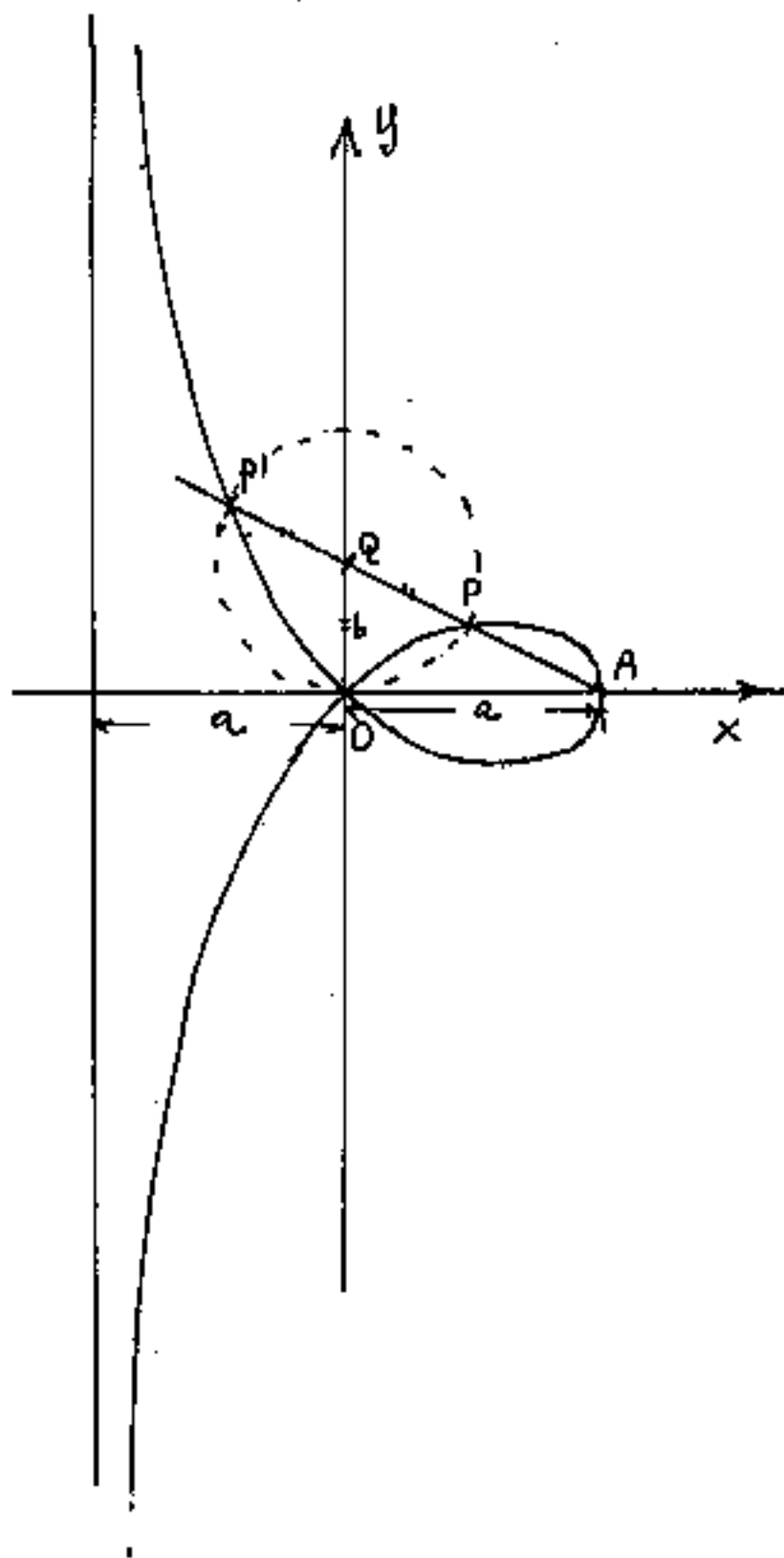
cioè: $A = \frac{1}{2} \oint_{\pi} x^2 dt$ avremmo:

$$A = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} a^2 \left(\frac{3-t^2}{1+t^2} \right)^2 dt$$

anche questo meno comodo di quello da noi utilizzato.

LA STROFOIDE (retta)

La curva che abbiamo ora trattato, cioè la trisettrice di Maclaurin, assomiglia alla strofoide,



Se dal punto A sulle
asseisse tracciamo tutte
le rette di equazione:

$$+ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

e tenendo fisso "a" faccia-
mo variare "b", varierà il
punto Q sulle ordinate essendo:

$\overline{OQ} = b$. Quindi da Q si
staccano due segmenti

sulla retta: $\overline{PQ} = \overline{QP'} = b = \overline{OQ}$
i punti P e P' sono i
punti della strofoide.

Quindi i punti della strofoide sarebbero deter-
minati dall'intersezioni di tali rette con cerchi

di equazione: $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ cioè: $x^2 + y^2 = 2by$; da

cui: $b = \left(\frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2} \right)$ che, sostituito nell'equazione delle

rette: $bx + ay = ab$ cioè: $\frac{x^3}{2y} + \frac{xy}{2} + ay = \frac{ax^2}{2y} + \frac{ay}{2}$; e

moltiplicando per $2y$ otteniamo:

$$x^3 - ax^2 + xy^2 + ay^2 = 0$$

equazione cartesiana della
strofoide

Possiamo esplicitare y^2 e l'equazione diventa:

$$y^2 = x^2 \frac{(a-x)}{(a+x)}$$

oppure si può scrivere:

$$a(x^2 - y^2) = x(x^2 + y^2)$$

sostituiamo: $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$:

$$a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \rho^2 = \rho \cos \theta (\rho^2)$$

$$\rho = \frac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}$$

equazione polare
della strofoide

se scriviamo:

$$y = x \sqrt{\frac{(a-x)}{(a+x)}}$$

si nota che per $x=a \rightarrow y=0$, mentre per $x=-a$
si ha $y=\infty$ (asintoto verticale).

Area della Strofoide:

$$A = \int y dx; \quad A = 2 \int_0^a x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx =$$
$$A = 2 \int_0^a (a-x) d\sqrt{a^2-x^2} = -2a \left[\sqrt{a^2-x^2} \right]_0^a + 2 \int_0^a x d\sqrt{a^2-x^2} = \text{(per parti)}$$
$$A = +2a^2 + 2 \left[x \sqrt{a^2-x^2} \right]_0^a - 2 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = -2a^2 + 0 - 2a^2 \frac{\frac{x}{a} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2}$$

$$A = +2a^2 - \frac{\pi}{2} a^2$$

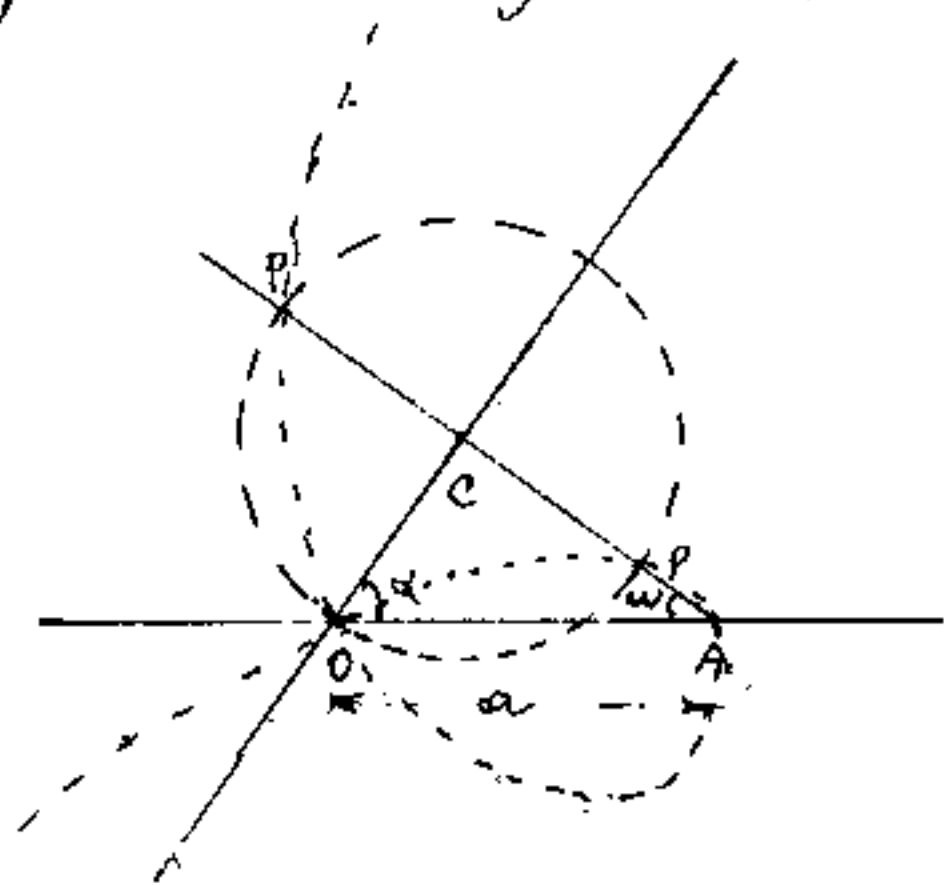
$$A = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2 = \text{area del cappio}$$

$$A = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2 = \text{area compresa tra la curva e l'asintoto}$$

Le strofoidi oblique e generali

La strofoide che abbiamo trattato è più propriamente detta strofoide retta,

Consideriamo ora due rette che in O formano l'angolo α , ed $\overline{OA} = a = \text{costante}$ (come per la strofoide retta ove α era $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$).



Per A tracciamo una retta qualsiasi che incontrerà in C la retta inclinata di d nel vertice

O ; centro in C e raggio \overline{CO} tracciamo una circonferenza che incontrerà in P e P' la retta uscente da A , il luogo dei punti P e P' è una curva detta strofoide obliqua, (se α non è retto),

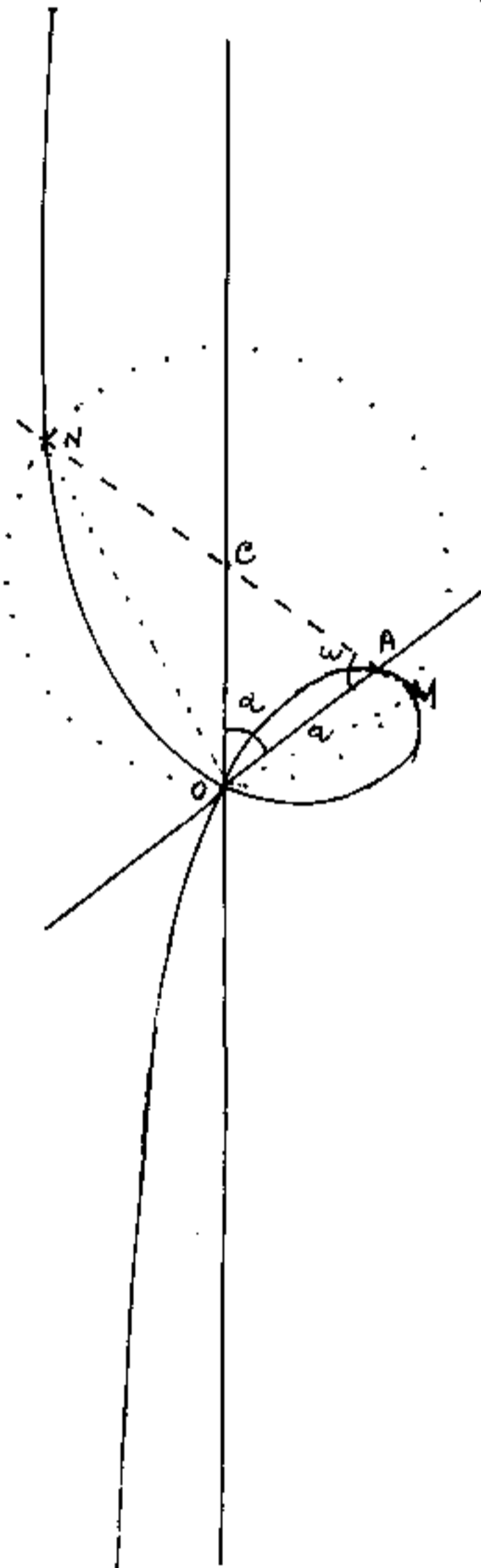
presi A come polo e la retta per $\overline{OA} = a$ come asse polare, detto w l'angolo variabile in A avremo: $r = \overline{OC} = \frac{a}{\sin(\alpha + w)}$; ed il

lato $\overline{AC} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + w)}$ quindi detto $r_p = AP = \overline{AC} - r$

ed $r_{p'} = AP' = \overline{AC} + r$ sarà:

$$r = a \frac{\sin \alpha \pm \sin w}{\sin(\alpha + w)}$$

Come si vede dal disegno, la strofoide inclinata non presenta particolari assi di simmetria per i quali far passare gli assi cartesiani di riferimento, quindi non riteniamo opportuno trasformare in cartesiane la relazione data in coordinate polari con origine in A e direzione iniziale $\theta = \alpha$.



Il nome strofoide deriva dal greco: στρόφος = cordone, cinghia; forse meglio: στρόφαις = che si rivolge in giro, roteante.

Il nome di strofoidi generali fu dato alle curve aventi la seguente proprietà:

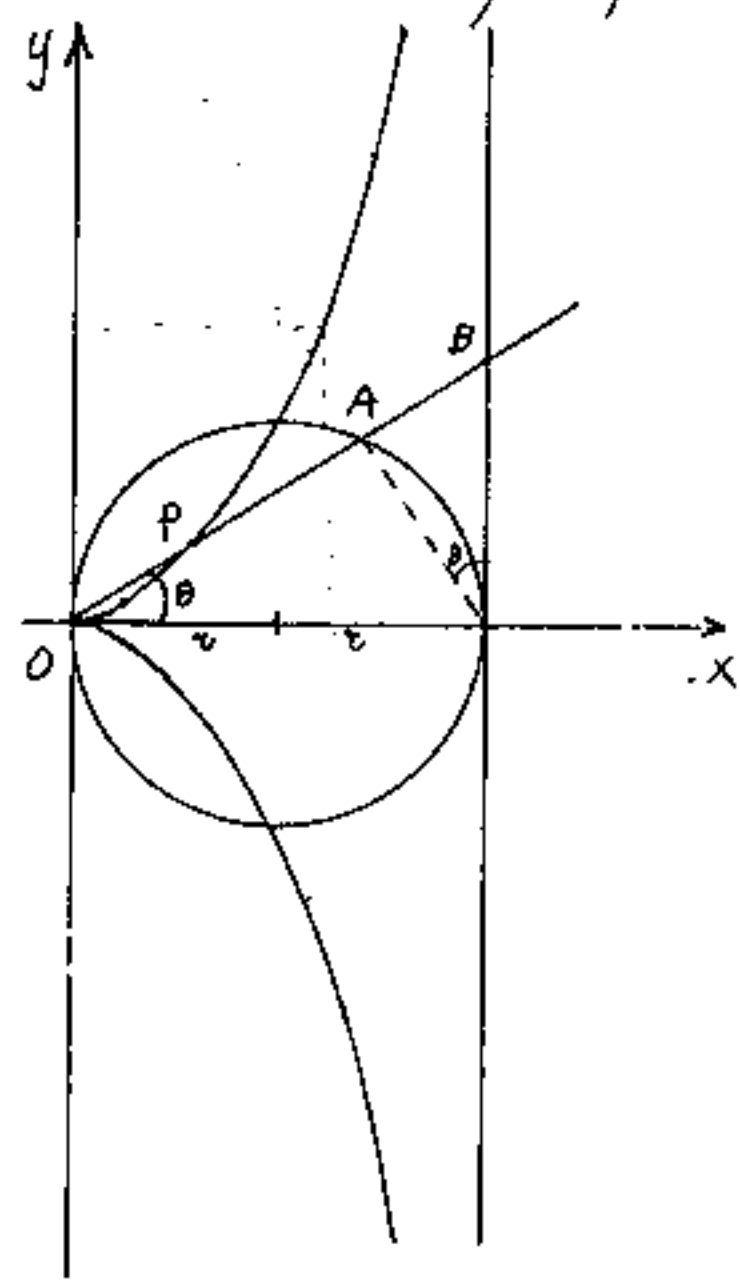
Dati due punti fissi estremi di una base ed un angolo dato α si abbia che gli angoli alla base φ e ψ , dati due numeri m ed n , che: $m\varphi \pm n\psi = \alpha$.

Nella strofoide inclinata, i triangoli isosceli NEO ed OCM , essendo \widehat{NOM} retto, posti: $\overline{ON} = r_1$; $\overline{OM} = r_2$; abbiamo: $\boxed{r_1^2 + r_2^2 = (2c)^2}$

La cissoide e la duplicazione del cubo

La cissoide, detta anche Curva di Diocle, perché fu studiata da Diocle per risolvere l'antico problema della duplicazione del cubo (Problema di Delo)

Il problema consisteva nel trovare lo spigolo l_2 di un cubo di volume doppio di un cubo di noto spigolo l_1 , cioè: $l_2^3 = 2l_1^3$; $l_2 = l_1 \sqrt[3]{2}$; ma, come sappiamo, i problemi in cui ricorre la radice cubica non possono essere risolti col solo ausilio della squadra e del compasso, (come già abbiamo visto a proposito della trisezione dell'angolo).



Consideriamo il cerchio: $x^2 - 2rx + y^2 = 0$
e la retta: $x = 2r$ ad esso tangente;
dall'origine O degli assi tracciamo
una retta qualsiasi: $y = (\tan \theta)x$
essa incontrerà in A il cerchio ed
in B la retta ad esso tangente,
riportando $\overline{OP} = \overline{AB}$, il punto
 P è un punto della cissoide.

$$\overline{OB} = 2r / \cos \theta ; \quad \overline{OA} = 2r \cdot \cos \theta$$

$$\overline{OP} = \overline{BA} = 2r \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) = 2r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

si ha così l'equazione della cissoide in coordinate polari:

$$\rho = 2r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

l'equazione in coordinate polari può anche scriversi:

$$\rho = 2r \operatorname{tang}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

possiamo anche scrivere: $\rho \cos \theta = 2r \operatorname{sen}^2 \theta$

che in cartesiane diventa:

$$\left(x = (2r) \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right)^2$$

$$x(x^2 + y^2) = (2r)^2 y^2 \quad \text{equazione in cartesiane.}$$

ponendo $2r = a$ si usa scrivere:

$$x^3 = y^2(a - x) \quad \text{altra forma della stessa equazione}$$

se poniamo $\overline{OL} = 2a$ avremo:

$$(a - x) : y = a : 2a$$

$$\text{cioè: } (a - x) = \frac{y}{2} : \text{ sostituendo } \left[x^3 = \frac{y^2}{2} \right]$$

$$\text{D'altra parte } \overline{TL} : a = \frac{y}{x}$$

$$\text{cioè: } \left(\frac{\overline{TL}}{a} \right)^3 = \left(\frac{y}{x} \right)^3 = 2$$

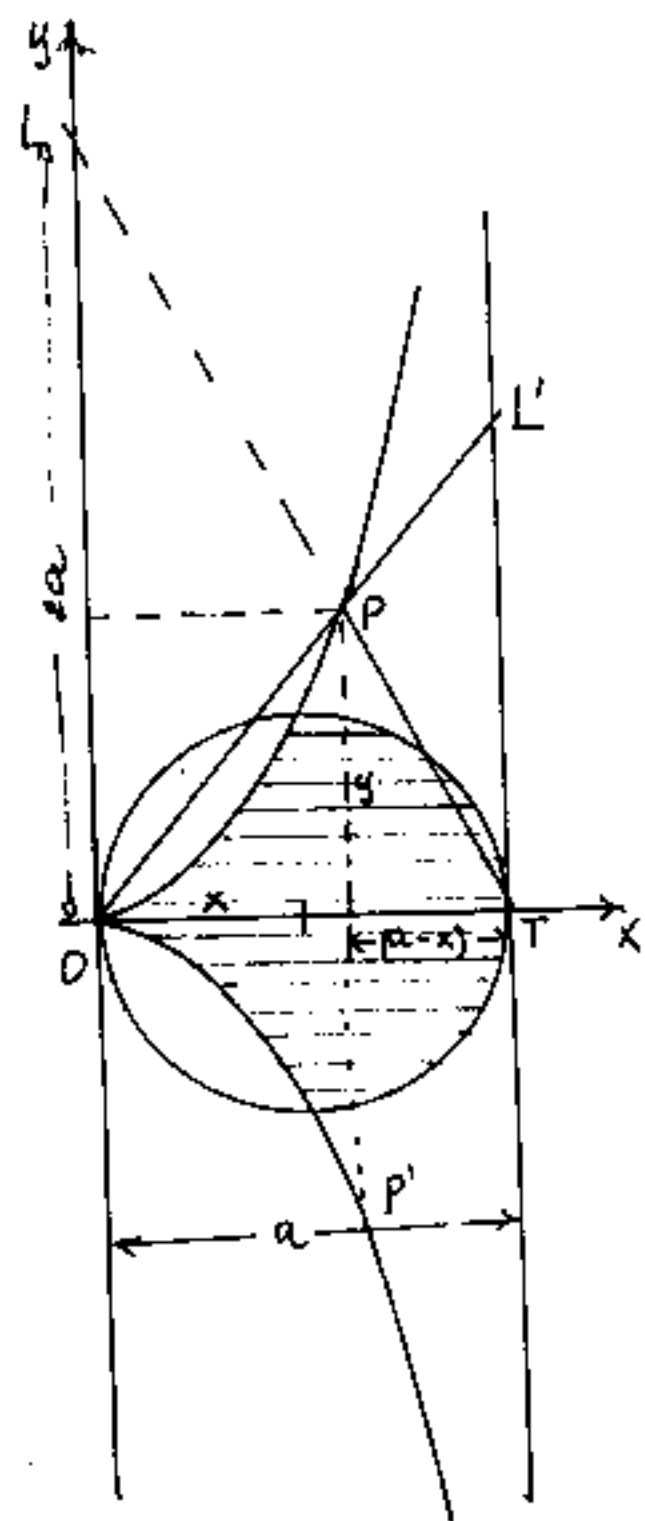
$$\text{ossia: } \overline{TL}^3 = 2a^3$$

$$\overline{TL} = a \sqrt[3]{2}$$

che risolve il problema della duplicazione del cubo.

L'area della cissoide: $A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$
compresa fra due raggi divergenti ad

infinito per $\theta_2 = \pi/2$, noi vogliamo l'area: $A = 2 \int_0^a y dx$, invece è convergente ed è: $3\pi r^2$ (tre volte l'area del cerchio)



Per risolvere l'integrale $A = \int_0^a y dx$, è opportuno trasformare le coordinate in parametriche ponendo: $[y = t \cdot x]$ sostituendo nella: $x^3 = y^2(a-x)$ si ha

$$x^3 = at^2x^2 - t^2x^3; \quad x = at^2 - t^2x; \quad \boxed{x = \frac{at^3}{1+t^2}} \quad \boxed{y = \frac{at^3}{1+t^2}}$$

Utilizziamo la notevolissima formula degli integrali curvilinei: $A = \frac{1}{2} \int x^2 dt$. avremo, considerando l'area compresa fra la corda $P'P$ ed i due rami di cissoide: e siano $+t$ e $-t$ i parametri che determinano P e P'

$$A = \frac{1}{2} \int_{OP} x^2 dt + \frac{1}{2} \int_{P'P} x^2 dt + \frac{1}{2} \int_{PO} x^2 dt \quad \text{conciò abbiamo circuitato l'area.}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{-t} x^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-t}^{+t} x^2 dt + \frac{1}{2} \int_t^0 x^2 dt \quad \text{abbiamo posto i limiti di integrazione}$$

$$A = - \int_0^t x^2 dt + x^2 t = 4a^2 \frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4a^2 \int_0^t \frac{t^4}{(1+t^2)^2} dt$$

$$A = 4a^2 \frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4a^2 \int_0^t \frac{(t^2+1)(t^2-1)+1}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$A = 4a^2 \frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4a^2 \int_0^t \left(\frac{t^2-1}{1+t^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2} \right) dt =$$

$$A = 4a^2 \frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4a^2 \int_0^t \left(1 - \frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2} \right) dt$$

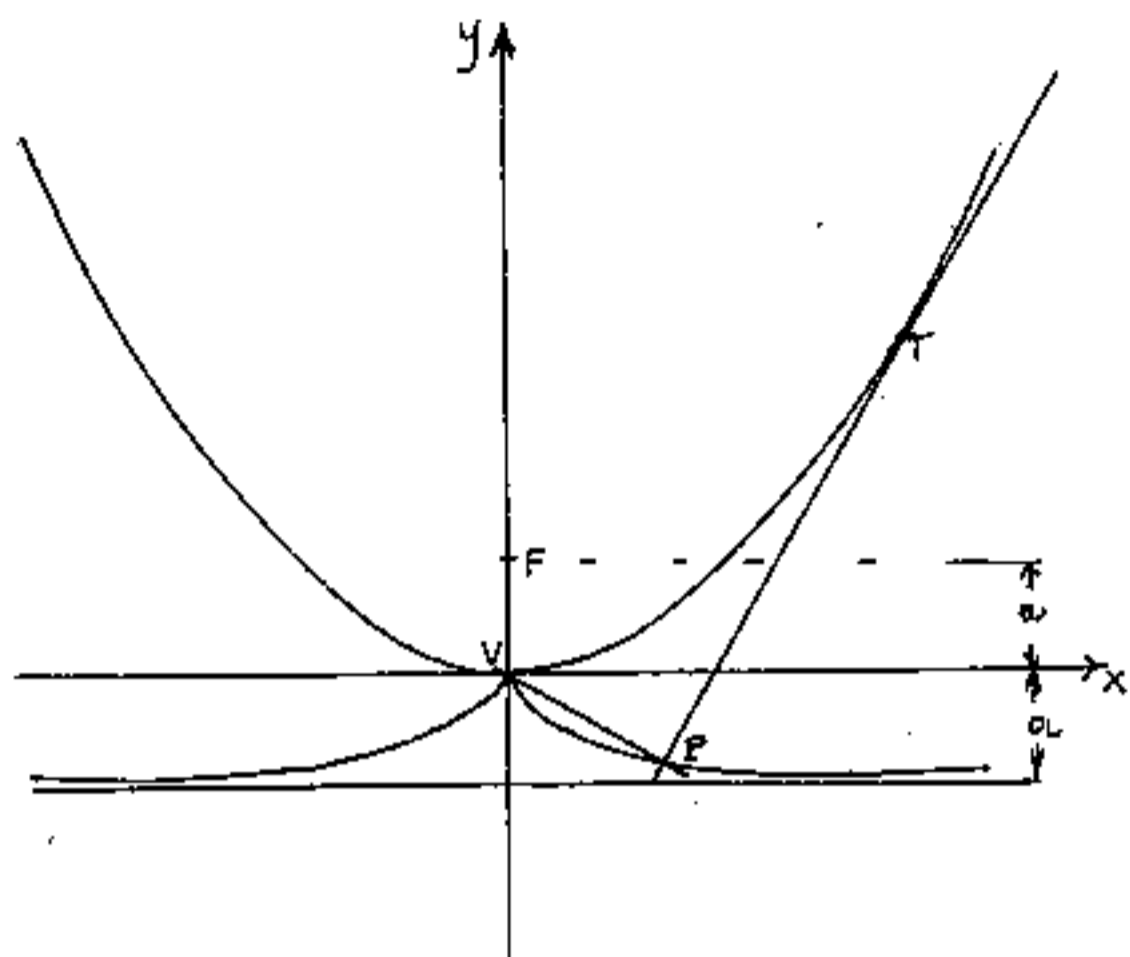
$$A = \frac{4a^2 t^5}{(1+t^2)^2} - 4a^2 \left[t - 2 \operatorname{arctg}[t] + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \right] = 6a^2 \operatorname{arctg} t + 2a^2 t$$

$$A = 6a^2 \operatorname{arctg}(t) + \frac{2a^2 t}{(1+t^2)^2} [2t^4 - 2 - 4t^2 - 2t^4 - 1 - t^2]$$

$$\boxed{A = 6a^2 \operatorname{arctang}(t) - \frac{2a^2 t(3+5t^2)}{(1+t^2)^2}} \quad \text{area del triangolo curvilineo } P'OP$$

se $t \rightarrow \infty \quad A = 6a^2 \frac{\pi}{2} - 0 \quad \boxed{A = 3a^2 \pi}$ come già detto.

La cissoide come podaria di una parabola rispetto al vertice v.



Sia: $y = \frac{x^2}{4a}$ l'equazione della parabola,
 $y' = \tan \alpha = \frac{x_T}{2a}$, perciò l'equazione della normale, per l'origine, alla retta tangente in T sarà: $y = -\frac{2a}{x_T} x$, che può scriversi:

$x_T = -2a \frac{x}{y}$. poiché l'equazione della retta tangente in T può scriversi: $\frac{y - y_T}{x - x_T} = \left(\frac{x_T}{2a}\right)$ ed $y_T = \frac{x_T^2}{4a}$,

sostituendo x_T abbiamo: $y - \frac{4a^2 x^2}{y^2 4a} = \frac{-x}{y} \left(x - \frac{2ax}{y}\right)$.

$$y^3 - x^2 a = y(x^2) - 2ax^2 \Rightarrow \boxed{y^3 = -x^2(y+a)}$$

che è l'equazione di una cissoide ove la retta asymptoto sia $y = -a$ ed il cerchio: $x^2 + (y+a)^2 = a^2$ cioè l'ordinata negativa in y cambia i segni.

Perciò la cissoide può essere definita come la podaria di una parabola con polo nel vertice.

La parola "cissoide" deriva dal greco:

κισσο-εὐδής = simile all'edera = cissoide.

(vedi la porzione tratteggiata nella precedente figura.)

Cissoidi oblique e curve cissoidali

Anche per la cissoide si può considerare il caso: cissoide obliqua quando i punti O e T non sono diametralmente opposti in questo caso l'equazione diventa:

$$(x^2 + y^2)(x \cos \alpha - y \sin \alpha) = 2xy^2$$

Polinomio di 3° grado non simmetrico se sostituiamo: $x = \rho \cos \omega$; $y = \rho \sin \omega$; otteniamo:

$$\rho^2 (\rho \cos \omega \cos \alpha - \rho \sin \omega \sin \alpha) = 2\rho^3 \sin^2 \omega$$

da cui:

$$\rho = 2x \frac{\sin^2 \omega}{\cos(\alpha + \omega)}$$

che per $\alpha = 0$ torna la cissoide di Diocle che abbiamo trattato

Le cissoidi generali possono ottenersi quando siano date due curve arbitrarie ed un punto O fisso dal quale tracciamo rette che seguono le due curve nei punti M ed N , si riporta da O il segmento $\overline{PO} = \overline{MN}$ (nella stessa direzione di \overline{MN}) per tracciare la curva.

La curva di Jerabek

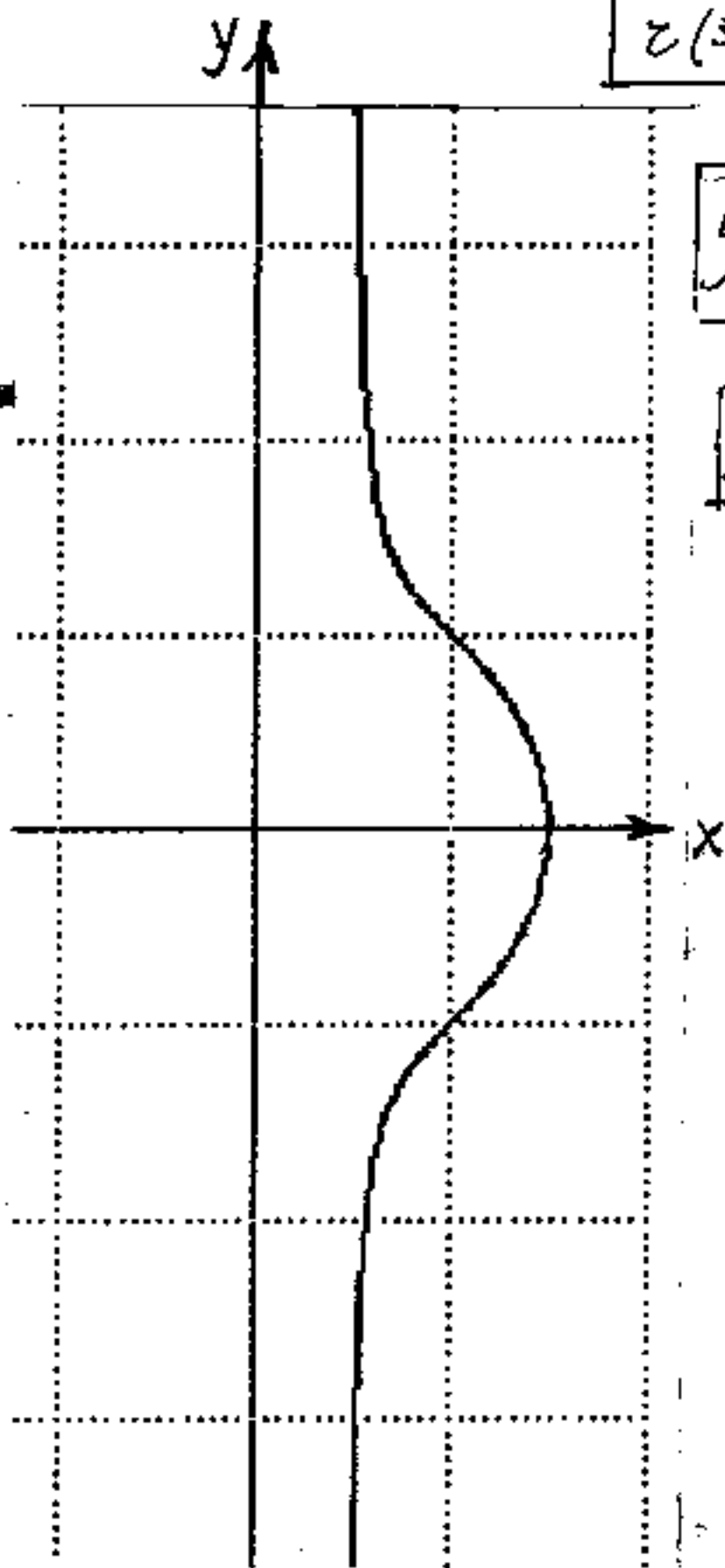
Consideriamo un cerchio di raggio r e centro C e la retta tangente in A . Sia O il punto medio di $\overline{AC} = r$; $\overline{AO} = \overline{OC} = \frac{r}{2}$; si tracci per O una retta che incontra in E il cerchio di centro O e raggio $\frac{r}{2}$ ed in F la tangente per A al cerchio di raggio r . Preso $\overline{OM} = \overline{FE}$ (equiversi), il luogo dei punti M è una cissoide di equazione polare: $\overline{OM} = \rho$; $\widehat{COM} = \theta$; $\rho = r \cos \theta + \frac{r}{2 \cos \theta}$ e di equazione cartesiana:

$$r(3x^2 + y^2) = 2x(x^2 + y^2)$$

$$y = \sqrt{\frac{(2x^3 - 3rx^2)}{(r - 2x)}}$$

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{(2x - 3r)}{(r - 2x)}}$$

questa è la curva di
JERABEK ed è una
cissoide.



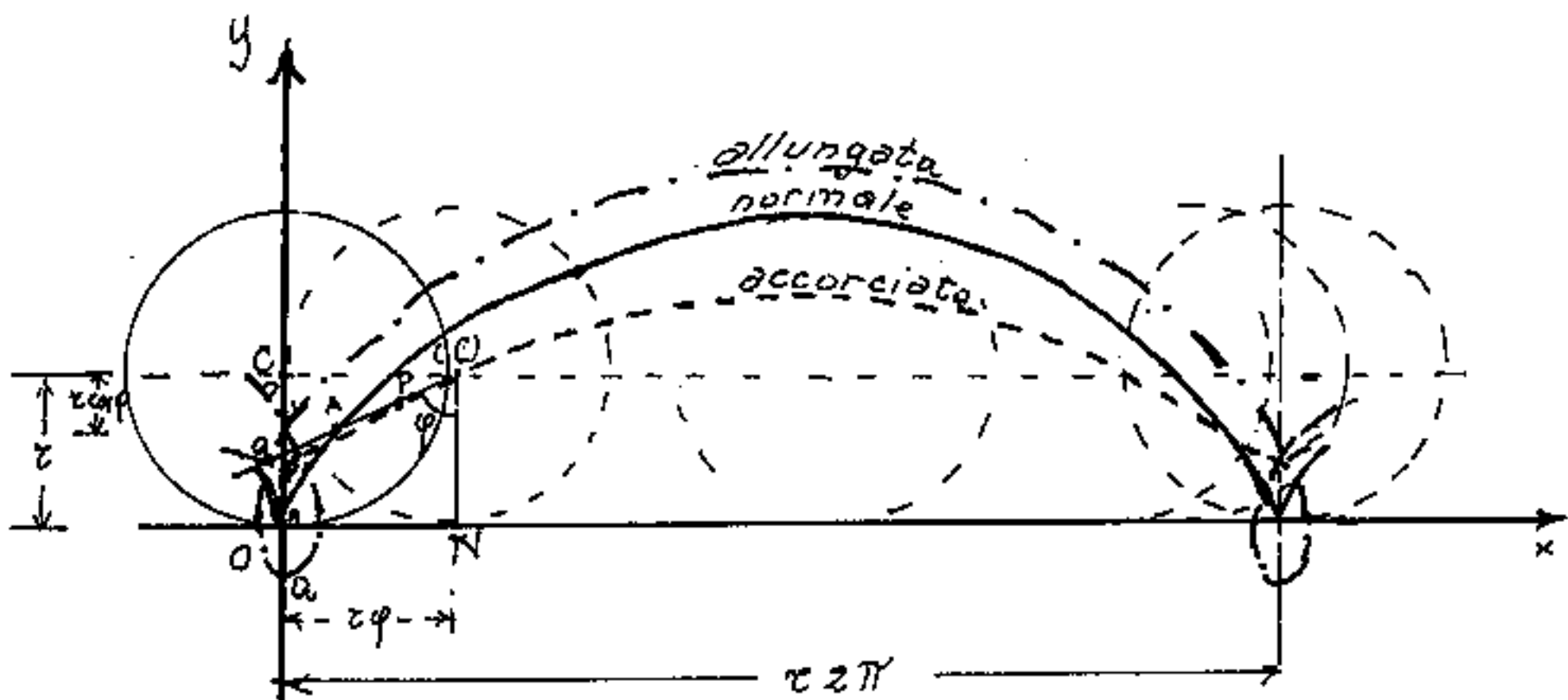
La cicloide ed il problema della tautócrona.

La cicloide è il luogo geometrico (traettoria)
di un punto connesso ad una circonferenza che
rotola, senza strisciare, su una zetta, mante-
nendosi sempre sullo stesso piano.

Se il punto è sulla circonferenza la cicloide è
detta normale.

Se il punto è esterno alla circonferenza la ci-
cloide è detta allungata.

Se il punto è interno alla circonferenza la ci-
cloide è detta accorciata.



Supponiamo, per semplicità, che quando la circonferenza è tangente alle asisse nell'origine O degli assi, i punti di cui si cerca le traiettorie siano sull'asse delle y al disotto del centro C della circonferenza. La circonferenza abbia raggio r .

A coincide con l'origine O degli assi e cioè giace sulla circonferenza, quindi descriverà la cicloide normale sia " a " la distanza dal centro C dei punti Q e P e precisamente con $a > r$ si abbia Q che descriverà una cicloide allungata. Con $a < r$ si abbia P che descriverà una cicloide accorciata

Facciamo rotolare la circonferenza nel verso delle asisse di un angolo φ , se non c'è slittamento, l'ascissa del centro C e l'ascissa del nuovo punto N di tangenza cioè $\overline{ON} = x_N = x_C = r\varphi$.

Per la cicloide normale (punto A) avremo:

$$\begin{cases} x_A = r(\varphi - \sin(\varphi)) \\ y_A = r(1 - \cos(\varphi)) \end{cases} \quad \text{cicloide normale}$$

Per la cicloide allungata o accorciata (Punto Q con $a > r$
" P " $a < r$)

avremo:

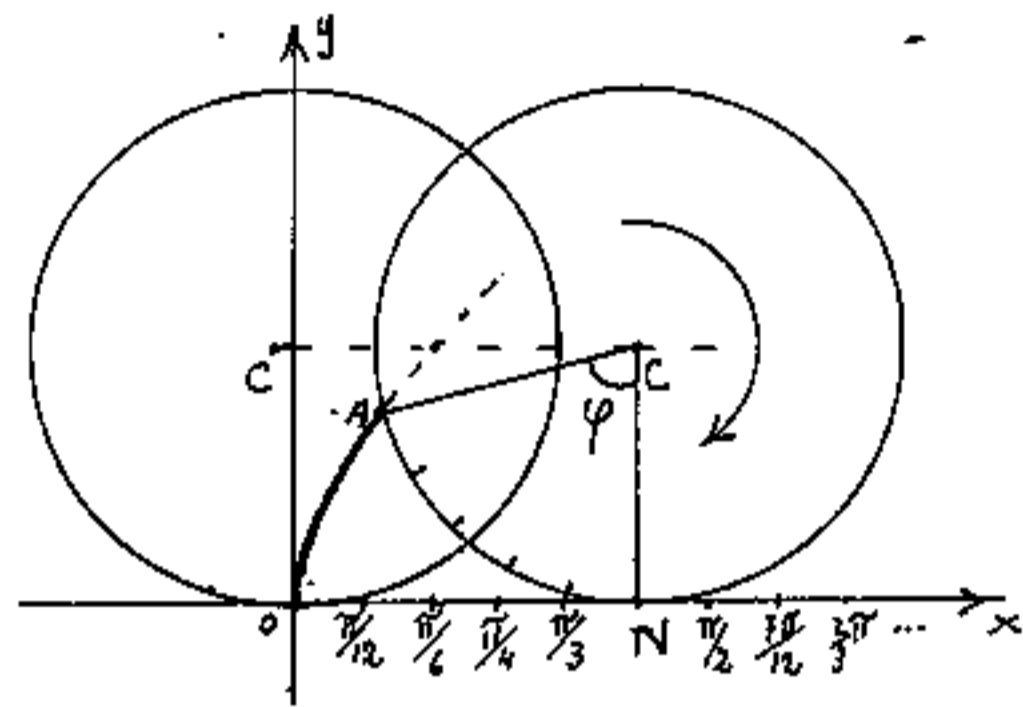
$$\begin{cases} x = r\varphi - a \sin(\varphi) \\ y = r - a \cos(\varphi) \end{cases}$$

Dividendo per r e ponendo $K = \frac{a}{r}$ si ottiene la generalizzazione della formula della cicloide

$$\begin{cases} x = r(\varphi - K \sin \varphi) \\ y = r(1 - K \cos \varphi) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{normale} \rightarrow K=1 \\ \text{accorciata} \rightarrow K < 1 \\ \text{allungata} \rightarrow K > 1 \end{cases}$$

Si noti che per $K = 0$ si ha il moto (traettoria) del centro C della circonferenza, cioè la retta $y = z$.

Allo scopo di apprezzare meglio la generazione della cicloide normale, riportiamo una



tabellina ove figurano l'angolo φ di quanto ha ruotato la circonferenza; $X_N = z\varphi = X_C =$ sviluppo della circonferenza sulle ascisse; x ed y

TABELLA
cicloide normale $z = 1$

φ	X_N	cartesiane		polari	
		x	y	ρ	θ
0	0	0	0	0	90
15	0.26180	0.00298	0.03407	0.03420	85.00129
30	0.52360	0.02360	0.13397	0.13604	80.01018
45	0.78540	0.07829	0.29289	0.30318	75.03451
60	1.04720	0.18117	0.50000	0.53181	70.08229
75	1.30900	0.34307	0.74118	0.81673	65.16195
90	1.57080	0.57080	1.00000	1.15144	60.28243
105	1.83260	0.86667	1.25882	1.52831	55.45342
120	2.09440	1.22837	1.50000	1.93879	50.68550
135	2.35619	1.64909	1.70711	2.37354	45.99037
150	2.61799	2.11799	1.86603	2.82276	41.38116
165	2.87979	2.62098	1.96593	3.27634	36.87261
180	3.14159	3.14159	2.00000	3.72419	32.48163
195	3.40339	3.66221	1.96593	4.15652	28.22752
210	3.66519	4.16519	1.86603	4.56409	24.13260
225	3.92699	4.63410	1.70711	4.93853	20.22276
240	4.18879	5.05482	1.50000	5.27268	16.52808
255	4.45059	5.41652	1.25882	5.56087	13.08350
270	4.71239	5.71239	1.00000	5.79926	9.92947
285	4.97419	5.94011	0.74118	5.98618	7.11235
300	5.23599	6.10201	0.50000	6.12246	4.68436
315	5.49779	6.20489	0.29289	6.21180	2.70255
330	5.75959	6.25959	0.13397	6.26102	1.22612
345	6.02139	6.28021	0.03407	6.28030	0.31086
360	6.28319	6.28319	-0.00000	6.28319	-0.00000

coordinate cartesiane dello cicloide; $\rho, \theta =$ coordinate polari della cicloide. Rag- gio della circonferenza genera- trice: ($z = 1$)

Per diverso z moltiplicare X_N, y, x, ρ per z .

L'area della cicloide

Si racconta che Galileo (Pisa-1564/Arcetri 1642), (uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi), dedicò anche particolari studi alla cicloide, ma non disponendo del calcolo infinitesimale, (che nasce alla sua scuola, ma sarà perfezionato oltre un secolo dopo) e volendo calcolare l'area della cicloide, disegnò su cartoncino parecchie cicloidi con circonferenze generatrici di diverso raggio, e tagliò, con cura, la figura delle cicloidi, le circonferenze generatrici, e quadrati di area precalcolata, quindi pesò, con la bilancia di precisione, le varie figure, (circa 2000 pesate) quindi comparati i valori e l'errore probabile espresse la legge che:

"l'area della cicloide è tre volte l'area del.

cerchio generatore." Legge, poi confermata esatta.

Calcoliamo l'area:

differenziando le equazioni trovate si ha:

$$\begin{cases} dx = r(1 - k \cos \varphi) d\varphi \\ dy = r(k + \sin \varphi) d\varphi \end{cases}$$

l'area: $A = \int y \cdot dx$

$$A = \int_0^{2\pi} r(1 - k \cos \varphi) \cdot r(k + \sin \varphi) d\varphi$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2k \cos \varphi + k^2 \cos^2 \varphi) d\varphi$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} \left[\varphi - 2K \sin \varphi + K^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi + \varphi}{2} \right] d\varphi$$

$$A = r^2 \left[2\pi - 0 + K^2 \pi \right]$$

$$A = r^2 \pi (2 + K^2)$$

e per $K=1$ = cicloide normale:

$$A = 3r^2 \pi \quad (\text{Legge di Galileo})$$

per $K=0$ si ha:

$$A = r \cdot 2r\pi = 2r^2 \pi$$

che è l'area del rettangolo della traiettoria del centro C della circonferenza, quindi la formula trovata è da ritenere valida per: $(0 \leq K \leq 1)$ cioè per cicloidi normali e per cicloidi accorciate, per cicloidi allungate, occorre definire a quale area si riferisce la formula.

A tal fine calcoliamo l'area del cappio: occorre fissare quali valori di φ soddisfano $x' = 0 = \varphi - K \sin \varphi \Rightarrow \frac{1}{K} = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ e ponendolo, (come vedremo) $\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \text{sarsen}(\varphi)$ avremo: $\varphi = \text{arsarsen}\left[\frac{1}{K}\right]$ notiamo che φ è reale se e solo se $K > 1$; un valore di $\varphi = \text{zero}$, l'altro valore può desumersi dalle tavole che riportano $\text{sarsen} \varphi$. — per esempio per $K=1,20$ $\varphi = 58^\circ, 8277707 = 1,026738292 \text{ rad.}$; $\frac{1}{K} = 0,833335$.

per $x' = 2\pi$; $\varphi = 2\pi$ e $\varphi = 301^\circ, 1722293 = 5,256447016 \text{ rad.}$

ma, nel caso di cicloide allungata, la curva si estende anche ad un tratto negativo di ascisse perciò: dalla $\frac{y}{r} = 1 - K \cos \varphi = 0$ quindi $\cos \varphi = \frac{1}{K}$.
 per $K = 1,20 \rightarrow \varphi = 33,55730976 = 0,5856855435$ rad.

Questo φ è il limite delle ordinate negative; quando $\varphi = 0$ l'ordinata della curva è $(1-K) \cdot r$ ed essendo: $K > 1$, è, $y < 0$.

Se sostituiamo il φ che dà $y=0$ nella formula dell'area, troviamo l'area del semicappio che si estende alle ordinate negative:

$$A_{0-} = r^2 \left[\arccos\left(\frac{1}{K}\right) - 2K \sqrt{1 - \left(\frac{1}{K}\right)^2} + \frac{K^2}{2} \left(\frac{1}{K} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{K}\right)^2} + \arccos\left(\frac{1}{K}\right) \right) \right]$$

$$A_{0-} = r^2 \left[\arccos\left(\frac{1}{K}\right) \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) - 2 \sqrt{K^2 - 1} + \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - 1} \right]$$

$$A_{0-} = r^2 \left[\arccos\left(\frac{1}{K}\right) \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) - \frac{3}{2} \sqrt{K^2 - 1} \right] \quad \text{area del semicappio di ordinate } < 0$$

Nel caso di $K = 1,20$

$$A_{0-} = r^2 \left[(0,5856855435) (1,72) - \frac{3}{2} \sqrt{0,44} \right]$$

$$= r^2 [1,007379135 - 0,9949874371]$$

$$A_{0-} = r^2 [0,0123916977] \quad \text{Area } > 0 \text{ perché in zona ove: } (x < 0) \text{ ed } (y < 0) : (-x) = (+).$$

Calcoliamo ora l'area per φ che dà $(x=0)$

avremo per $K = 1,20$; $\varphi = 1,026738293$ rad. avremo $A_{\varphi=0} = 0,0313847372 > 0$

se a questa togliamo $0,0123916977$ si ha: $0,0189930395$, anche questa area > 0 , perché: $y > 0$ e $dx > 0$, perché le x crescono nel verso delle ascisse. Quindi l'area della cicloide non può mai essere < 0 .

L'area di un tratto di cicloide compresa fra le ordinate $y(\varphi_1)$ ed $y(\varphi_2)$ è:

$$A_{\varphi_1-\varphi_2} = r^2 \left[\varphi - 2k \operatorname{sen} \varphi + k^2 \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \varphi}{2} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Tratti di cicloide per $k=1,20$

φ	X	y	Areae dei tratti $r^2=1$
0	0	$-(0,20)r$	0
$33^\circ 33' 26'' = 0,5856855435 \text{ rad}$	$-(0,077639414)r$	0	$+0,0123916976$ <u>$=+0,0123916976$</u> (I)
$58^\circ 49' 40'' = 1,026738292 \text{ rad}$	0	$(0,378865167)r$	$+0,031384847372$ <u>$=+0,0189930395$</u> (II)
$301^\circ 10' 20'' = 5,256447016 \text{ rad}$	$2\pi r$	$(0,378865167)r$	$+10,77569399$ <u>$=+10,74430925$</u> (III)
$326^\circ 26' 34'' = 5,69749976 \text{ rad}$	$(6,360824722)r$	0	$10,79468703$ <u>$=+0,0189930394$</u> (IV)
360 $2\pi \text{ rad}$	$2\pi r$	$-(0,20)r$	$10,80707873$ <u>$=+0,0123916976$</u> (V)

I numeri sottolineati sono le aree progressive, i numeri non sottolineati sono le aree dei singoli tratti

Si noti che le aree dei tratti sono tutte positive:

nel I tratto perché $y < 0$ e $dx < 0$ cioè $(-)(-) = (+)$

nel II tratto perché $y > 0$ e dx crescente nel verso + cioè $dx > 0$

nel III tratto $y > 0$; $dx > 0$

nel IV. tratto $y > 0$; $dx > 0$

nel V tratto $y < 0$; $dx < 0$ perché nel verso negativo $(-)(-) = (+)$.

Cioè vale ancora $A = r^2 \pi (2 + k^2) = r^2 (\pi) (2 + 1,2^2) = r^2 (10,80707873)$

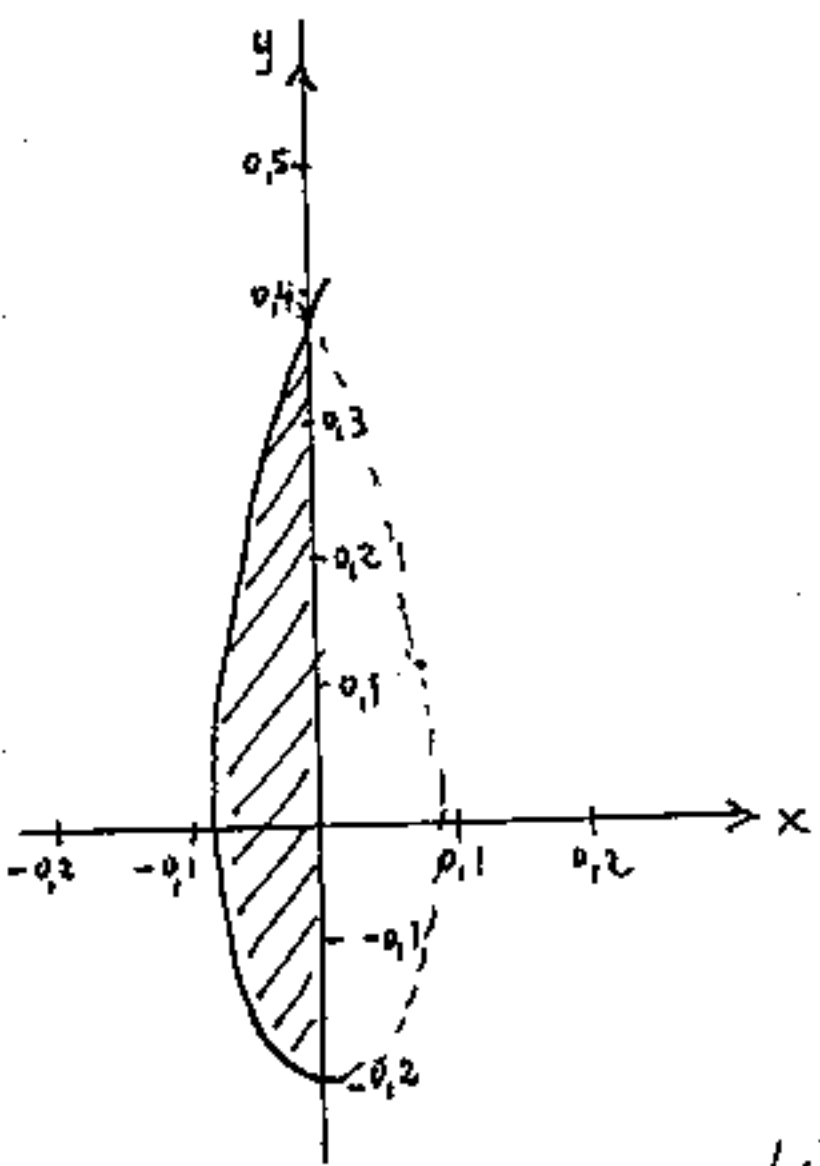
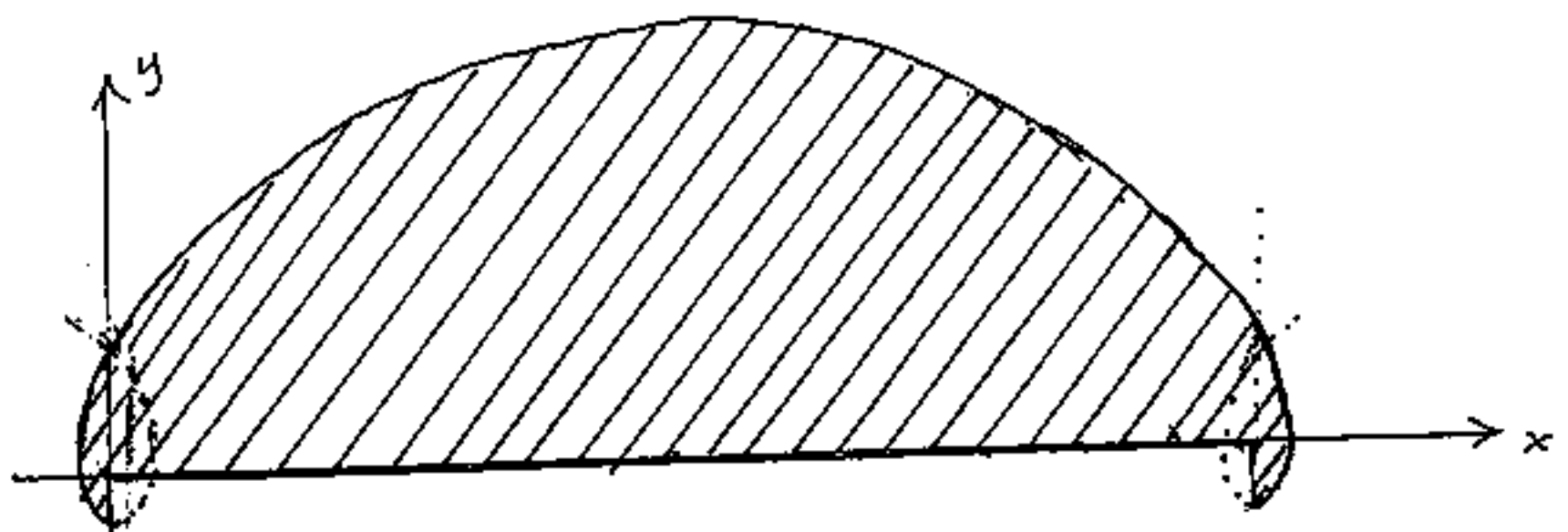
Quindi la formula:

$$A = r^2 \left[\varphi + 2K \operatorname{sen} \varphi + K^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \varphi}{2} \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$A = r^2 \left[(2 + K^2) \pi \right]$$

è valida in generale
 $K < 1$ = cicloide accorciata
 $K = 1$ = cicloide normale
 $K > 1$ = cicloide allungata

Nel caso della cicloide allungata; l'area calcolata è quella tratteggiata in figura.



Per $K = 1, 2$ abbiamo disegnato a fianco il semicappio che si estende al ciclo precedente della circonferenza, a cui corrisponde il simmetrico che invade il ciclo successivo della circonferenza.

Se, nel calcolo delle aree

limitiamo la formula a $\varphi < 2\pi$

L'area calcolata sarà delimitata dalla $y = r(1 - K \cos \varphi)$.

Lunghezza della cicloide

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{sostituendo:}$$

$$ds = r \left(\sqrt{(1 - \kappa \cos \varphi)^2 + (\kappa \sin \varphi)^2} \right) d\varphi$$

$$ds = r \left(\sqrt{1 - 2\kappa \cos \varphi + \kappa^2} \right) d\varphi$$

$$s = r \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos \varphi} \right) d\varphi$$

ore per $\kappa=0$ si ha: $s=2r\pi$ che è la lunghezza del tratto percorso dal centro della circonferenza generatrice, (cioè: caso limite di cicloide accorciata)

Per $\kappa=1$

$$s = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} d\varphi = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(2\sin^2 \frac{\varphi}{2})} d\varphi$$

$$s = 4r \int_0^{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} = -4r \left[\cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = -4r(-1 - 1)$$

$$s = 8r$$

La lunghezza della cicloide normale
è otto volte il raggio della circonferenza
generatrice

Nel caso generale $d \neq 0$ e $k \neq 1$ si ha:

$$J = \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2k \left(\frac{1+k^2}{2k} - \cos \varphi \right)} \right) d\varphi$$

$$J = \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2k \left(\frac{1+k^2}{2k} - \left(1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \right)} \right) d\varphi$$

$$J = \varepsilon \int_0^{2\pi} \sqrt{2k \left(\frac{1+k^2-2k}{2k} + 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi$$

$$J = \varepsilon \int_0^{2\pi} 2 \sqrt{k \left(\frac{(1-k)^2}{4k} + 1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)} d\varphi$$

$$J = 2\varepsilon \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{(1-k)^2 + 4k}{4} \right) - k \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi$$

$$J = 4\varepsilon \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{(1-k)^2 + 4k}{4} \right) \left(1 - \frac{4k}{4k + (1-k)^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)} d\frac{\varphi}{2}$$

$$J = 2\varepsilon \sqrt{4k + (1-k)^2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{4k}{4k + (1-k)^2} \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

e cambiando variabile: $\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; $t = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$

$0 \leq \frac{\varphi}{2} \leq \pi$; $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ per: $dt = -d\frac{\varphi}{2}$ cambieremo i

limiti di integrazione: $\theta = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{4k}{4k + (1-k)^2}}$

$$J = 4\varepsilon \left(\sqrt{4k + (1-k)^2} \right) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 t} dt$$

classico integrale ellittico di 2^a specie.

Controlliamo se la formula è valida nei casi limite.

$$\text{per } k=0 : s = 4r(1) \int_0^{\pi/2} (1-0) dt = \underline{2r\pi} \quad (\text{torna})$$

$$\text{per } k=1 : s = 8r \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} dt = 8r \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt =$$

$$s = 8r [\sin(t)]_0^{\pi/2} = \underline{s = 8r} \quad (\text{torna})$$

Calcoliamo ora la lunghezza della cicloide

con $k=1,2$

$$s = 4r \sqrt{4(1,2)^2 + (0,2)^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{4(1,2)}{4(1,2)^2 + (0,2)^2} \sin^2(t)} dt$$

$$\theta = \arcsin \left(\sqrt{\frac{4(1,2)}{4(1,2)^2 + (0,2)^2}} \right) = 84,78409149$$

$$\left(4 \sqrt{4(1,2)^2 + (0,2)^2} \right) = (8,8)$$

$$s = r(8,8) \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \sin^2(\theta) \sin^2(t)} \right) dt$$

dalle tavole degli integrali ellittici abbiamo:

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 84^\circ \rightarrow 1,0172 \\ \theta = 85^\circ \rightarrow 1,0127 \end{array} \right\} \text{interpolando: } \theta = 84,78409149 \rightarrow \underline{1,0137}$$

$$\underline{s = 8,92 r} \quad \underline{\text{allungata rispetto alla normale}}$$

per $k=0,8$

$$s = r(7,2) \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - 0,98765 \sin^2 t} \right) dt$$

$$\underline{\theta = 83,62062983} \left\{ \begin{array}{l} \theta = 83^\circ \rightarrow 1,0223 \\ \theta = 84^\circ \rightarrow 1,0172 \end{array} \right. \text{interpolando} \rightarrow \underline{1,0191}$$

$$s = r(7,2) 1,0191 = \underline{s = (7,33752)r} \quad \underline{\text{accorciata rispetto alla normale}}$$

Se cerchiamo l'equazione cartesiana della cicloide, riusciamo solo ad esplicitare la x .

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)$$

$$\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \left(\arccos\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right) - \sqrt{\kappa^2 - \left(1 - \frac{y}{\epsilon}\right)^2}\right)$$

$$\frac{1}{\epsilon} = \int_0^{\varphi} \left(\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos \varphi}\right) d\varphi \quad \begin{array}{l} (\kappa \cos \varphi = 1 - y/\epsilon) \\ d\varphi = d\left(\arccos\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)\right) \end{array}$$

derivando φ rispetto a $d\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)$ si ha:

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)^2}}$$

sostituendo:

$$\frac{1}{\epsilon} = \int_0^{\arccos\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)} \left(\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\left(1 - \frac{y}{\epsilon}\right)}\right) \left(\frac{-d\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)^2}}\right)$$

$$\frac{1}{\epsilon} = \int_0^{\arccos\left(\frac{1 - y/\epsilon}{\kappa}\right)} \sqrt{\frac{1 + \kappa^2 - 2\left(1 - \frac{y}{\epsilon}\right)}{\kappa^2 - \left(1 - \frac{y}{\epsilon}\right)^2}} \left(-d\left(1 - \frac{y}{\epsilon}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{ds} = + \sqrt{\frac{\kappa^2 - \left(1 - \frac{y}{\epsilon}\right)^2}{\kappa^2 - 1 + 2\frac{y}{\epsilon}}} = + \sqrt{\frac{\kappa^2 - 1 + 2\frac{y}{\epsilon} - \left(\frac{y}{\epsilon}\right)^2}{\kappa^2 - 1 + 2\frac{y}{\epsilon}}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{dy}{ds} = + \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{y}{\epsilon}\right)^2}{\kappa - 1 + 2\frac{y}{\epsilon}}}$$

(ove α è l'inclinazione della retta tangente)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(y/\epsilon)^2}{(K^2 - 1 + 2y/\epsilon)}}}{\sqrt{\frac{(y/\epsilon)^2}{(K^2 - 1 + 2y/\epsilon)}}}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = y' = \frac{+1}{y/\epsilon} \sqrt{K^2 - 1 + 2y/\epsilon - (y/\epsilon)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{\epsilon}{y} \sqrt{K^2 - (1 - y/\epsilon)^2}}$$

controlliamo:

$$\frac{d(x/\epsilon)}{d(y/\epsilon)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - (y/\epsilon)}{K}\right)^2}} \left(-\frac{1}{K}\right) - \frac{-2(1 - y/\epsilon)(-1)}{2\sqrt{K^2 - (1 - y/\epsilon)^2}} \quad \left(\text{la derivata è in } (d/y)\right)$$

$$\frac{d(x/\epsilon)}{d(y/\epsilon)} = \frac{1}{\sqrt{K^2 - (1 - y/\epsilon)^2}} + \frac{(-1 + y/\epsilon)}{\sqrt{K^2 - (1 - y/\epsilon)^2}}$$

$$\frac{d(y/\epsilon)}{d(x/\epsilon)} = \boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\epsilon}{y} \sqrt{K^2 - (1 - y/\epsilon)^2}} \quad \text{(torna)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1 - K \operatorname{eos}(\varphi)}{K \operatorname{sen}(\varphi)}}$$

Possiamo calcolare le tangenti alla cicloide.

TANGENTE, NORMALE, SOTTOTANGENTE, SOTTONORMALE

retta tangente in un punto T della cicloide

$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y = y'(x) + (y_T - y'x_T)$$

$$y = \left(\frac{1}{y_T/c} \sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{c})^2} \right) x + y_T - \left(\frac{c^2}{y_T} \sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{c})^2} \right) \left(\arccos\left(\frac{1 + \frac{y_T}{c}}{K}\right) - \sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{c})^2} \right)$$

$$y = y_T + \left(\frac{c}{y_T} \sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{c})^2} \right) \left(x - c \left(\arccos\left(\frac{1 + \frac{y_T}{c}}{K}\right) - \sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{c})^2} \right) \right)$$

(equazione della retta tangente in T (in funzione di y_T))

$$y = \left(\frac{1 - K \cos(\varphi_T)}{K \sin(\varphi_T)} \right) x + c \left(1 - K \cos(\varphi_T) \right) - \left(\frac{1 - K \cos(\varphi_T)}{K \sin(\varphi_T)} \right) c \left(\varphi_T - K \sin(\varphi_T) \right)$$

$$y/c = (1 - K \cos(\varphi_T)) \left(\frac{x/c}{K \sin(\varphi_T)} + 1 - \frac{\varphi_T}{K \sin(\varphi_T)} - 1 \right)$$

$$y = \left(\frac{1 - K \cos(\varphi_T)}{K \sin(\varphi_T)} \right) (x - c)$$

Equazione della retta tangente alla cicloide nel punto T determinato dalla rotazione φ_T della circonferenza generatrice.

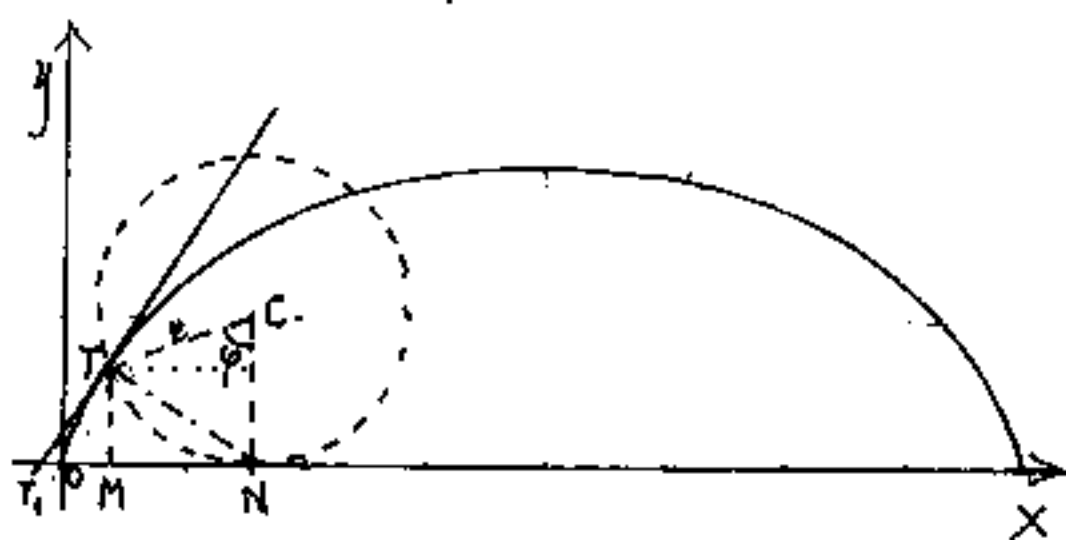
Equazione della normale per T alla cicloide.

$$y = \frac{-x}{f'(x_T)} + y_T + \frac{x_T}{f''(x_T)}$$

$$y = -x \left(\frac{\kappa \operatorname{sen}(\varphi_T)}{1 - \kappa \cos(\varphi_T)} \right) + \tau \left((1 - \kappa \cos(\varphi_T)) + \frac{(\varphi_T - \kappa \operatorname{sen}(\varphi_T))}{(1 - \kappa \cos(\varphi_T))} (\kappa \operatorname{sen}(\varphi_T)) \right)$$

Sottotangente e sottonormale

Ricordando che dicesi: "sottotangente" e "sottonormale", rispettivamente i segmenti: \overline{TM} ed \overline{MN} ,



cioè le proiezioni su x dei segmenti di tangente e di normale delimitati dal punto T di tangenza e dall'incontro con le

ascisse e che: $S_t = -\frac{y x'}{y'}$; ed $S_N = \frac{y y'}{x'}$, in particolare per la sottonormale alla cicloide si

ha:
$$\boxed{S_N} = \frac{y y'}{x'} = \frac{\tau^2 (1 - \cos(\varphi)) (\operatorname{sen}(\varphi))}{\tau (1 - \cos(\varphi))} = \boxed{\tau \operatorname{sen}(\varphi)}$$

$$\boxed{S_N = \tau \operatorname{sen}(\varphi)}$$

È la proiezione sull'asse delle ascisse del raggio ruotato di φ .

Il rapporto fra la lunghezza dell'arco di cicloide normale e l'ordinata.

$$s = -4r \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]_0^{\varphi} = 4r(1 - \cos(\frac{\varphi}{2}))$$

$$y = r(1 - \cos \varphi) = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = 2r(1 - \cos(\frac{\varphi}{2})) = 2r(1 - \cos(\frac{\varphi}{2})) \left(\frac{1 + \cos(\frac{\varphi}{2})}{1 + \cos(\frac{\varphi}{2})} \right)$$

$$\frac{s}{y} = \frac{2}{1 + \cos(\frac{\varphi}{2})}$$

$$\cos(\frac{\varphi}{2}) = \left(1 - \frac{y}{4r}\right) = \sqrt{1 - \frac{y}{2r}} \quad ;$$

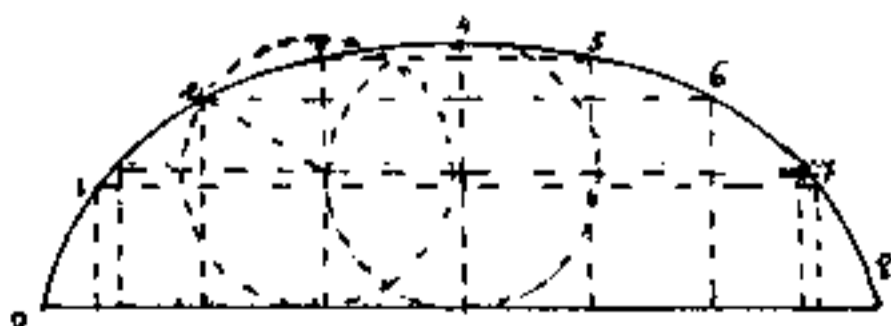
$$s = 4r \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{2r}}\right) \quad ;$$

$$y = \left(s - \frac{s^2}{8r}\right)$$

s/r	y/r	$\cos(\varphi)$	$\varphi(\text{rad}) \frac{2r}{r}$	X
0	0	1	0	0
1	7/8	1/8	(0,4601) π	($\pi - 2,688$)
4-2 $\sqrt{2}$	1	0	$\pi/2$	($\frac{\pi}{2} - 1$)
2	3/2	-1/2	$\frac{2}{3}\pi$	($\pi - 1,9132$)
3	15/8	-7/8	(0,8391) π	($\pi - 0,9895$)
4	2	-1	π	π
5	15/8	-7/8	(1,16086) π	($\pi + 0,9895$)
6	3/2	-1/2	$\frac{4}{3}\pi$	($\pi + 1,9132$)
4+2 $\sqrt{2}$	1	0	$\frac{3}{2}\pi$	($\frac{3}{2}\pi + 1$)
7	7/8	1/8	(1,539893) π	($\pi + 2,688$)
8	0	1	2π	2π

La tabella a fianco consente una facile costruzione di punti caratteristici della cicloide normale, ove la cicloide viene divisa in archi lunghi r , (salvo i punti $y=1$).

(la cicloide rettificata è: $8r$)



Il Baricentro della Linea Cicloide.

$$ds = r \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(\varphi)} d\varphi.$$

Sappiamo che, per simmetria, l'ascissa del baricentro:

$$\boxed{x_G = \pi r}$$

Dobbiamo trovare l'ordinata: $\boxed{y_G = \frac{S_x}{8r}}$

Il momento statico rispetto ad x :

$$S_x = \int y \cdot ds = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - k \cos(\varphi)) \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(\varphi)} d\varphi$$

Per la cicloide normale $k=1$; ricordando che: $(1 - \cos(\varphi)) = 2 \sin^2(\frac{\varphi}{2})$

$$S_x = r^2 \int_0^{2\pi} (2 \sin^2(\frac{\varphi}{2}) \sqrt{2 (2 \sin^2(\frac{\varphi}{2}))}) d\varphi = 8r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{\varphi}{2}) d(\frac{\varphi}{2})$$

$$S_x = -8r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2}) d(\cos \frac{\varphi}{2}) = -8r^2 \left[\cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$S_x = -8r^2 \left[(-1 - (-\frac{1}{3})) - (1 - \frac{1}{3}) \right] = -8r^2 \left(-2 + \frac{2}{3} \right) = 8r^2 \left(2 - \frac{2}{3} \right)$$

$$\boxed{S_x = 8r^2 \left(\frac{4}{3} \right)} = \left(\frac{32}{3} r^2 \right)$$

$$y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{8r^2 \left(\frac{4}{3} \right)}{8r}; \quad \boxed{y_G = \frac{4}{3} r}$$

Se vogliamo l'area della superficie del solido generato dalla cicloide per una rotazione intorno le ascisse, basta moltiplicare S_x per l'angolo di rotazione. Per un giro completo: $\boxed{A = \left(\frac{32}{3} r^2 \right) 2\pi = \frac{64}{3} r^2 \pi}$

Baricentro dell'area della cicloide normale

$$\boxed{X_G = 2\pi} \quad (\text{per simmetria}); \quad \boxed{y_G = \frac{S_x}{Area}}$$

$$S_x = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2(1-\cos\varphi)^2}{2} \right) r(1-\cos\varphi) d\varphi = \frac{r^3}{2} \int_0^{2\pi} (1-\cos\varphi)^3 d\varphi;$$

$$S_x = \frac{r^3}{2} \int_0^{2\pi} (1-3\cos\varphi+3\cos^2\varphi-\cos^3\varphi) d\varphi = \frac{r^3}{2} \left[\varphi - 3\sin\varphi + \frac{3}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi) - \sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{3} \right]_0^{2\pi}$$

$$S_x = \frac{r^3}{2} \left[\frac{5}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{3}{2}(\sin\varphi\cos\varphi) + \frac{\sin^3\varphi}{3} \right]_0^{2\pi}$$

$$S_x = \frac{r^3}{2} ((5\pi - 0 + 0 + 0) - (0))$$

$$\boxed{S_x = \frac{5}{2} r^3 \pi}$$

quindi:

$$y_G = \frac{(\frac{5}{2} r^3 \pi)}{3r^2 \pi}$$

$$\boxed{y_G = \frac{5}{6} r}$$

Se vogliamo il volume del solido generato dall'area della cicloide normale, che ruota intorno all'asse delle ascisse, basta moltiplicare S_x per l'angolo. (nel caso di un giro completo)

avremo:

$$V = S_x \cdot 2\pi = \left(\frac{5}{2} r^3 \pi \right) \cdot (2\pi)$$

$$\boxed{V = 5 r^3 \pi^2}$$

I raggi di curvatura della Cicloide

Le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = r(\varphi - K \operatorname{sen} \varphi) \\ y = r(1 - K \cos \varphi) \end{cases}$$

consentono il calcolo del raggio di curvatura applicando la formula:

$$R = \frac{(x'_{(\varphi)}^2 + y'_{(\varphi)}^2)^{3/2}}{y''_{(\varphi)} x'_{(\varphi)} - y'_{(\varphi)} x''_{(\varphi)}} \quad (\varphi = \text{parametro})$$

$$x'_{(\varphi)} = \frac{dx_{(\varphi)}}{d\varphi} = r(1 - K \cos \varphi) \rightarrow x'_{(\varphi)}^2 = r^2(1 + K^2 \cos^2 \varphi - 2K \cos \varphi)$$

$$y'_{(\varphi)} = \frac{dy_{(\varphi)}}{d\varphi} = r(+K \operatorname{sen} \varphi) \rightarrow y'_{(\varphi)}^2 = r^2(+K^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

$$x'_{(\varphi)}^2 + y'_{(\varphi)}^2 = r^2(1 + K^2 - 2K \cos \varphi)$$

$$x''_{(\varphi)} = r(+K \operatorname{sen} \varphi) \rightarrow \begin{cases} y''_{(\varphi)} x'_{(\varphi)} = r^2(K \cos \varphi - K^2 \cos^2 \varphi) \\ y'_{(\varphi)} x''_{(\varphi)} = r^2(+K^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \end{cases}$$

$$y''_{(\varphi)} = r(+K \cos \varphi) \rightarrow \begin{cases} y''_{(\varphi)} x'_{(\varphi)} = r^2(K \cos \varphi - K^2 \cos^2 \varphi) \\ y'_{(\varphi)} x''_{(\varphi)} = r^2(+K^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \end{cases}$$

$$(y''_{(\varphi)} x'_{(\varphi)} - y'_{(\varphi)} x''_{(\varphi)}) = r^2(K \cos \varphi - K^2)$$

$$R = r \frac{(1 + K^2 - 2K \cos \varphi)^{3/2}}{(K \cos \varphi - K^2)}$$

Se la cicloide è normale: $K = 1$

$$R = r \frac{2\sqrt{2}(1 - \cos \varphi) \sqrt{1 - \cos \varphi}}{-(1 - \cos \varphi)}$$

$$R = r(2\sqrt{2})\sqrt{1 - \cos \varphi}$$

$$R = (r)2\sqrt{2}(2\operatorname{sen}^2(\varphi/2)) ; R = r(4 \operatorname{sen} \varphi/2)$$

per $\varphi = 0 \rightarrow R = 0$; nel vertice $\varphi = \pi \rightarrow R = 4r$

Abbiamo visto che le equazioni parametriche, sono state trasformate in cartesiane esplicitando x :

$$x = \tau \left(\arccos\left(\frac{1-y/\tau}{\kappa}\right) - \sqrt{\kappa^2 - \left(1 - \frac{y}{\tau}\right)^2} \right)$$

e che difficilmente è esplicitabile in y . (posto $\tau=1$)

Consideriamo gli assi scambiati e deriviamo in x

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-y}{\kappa}\right)^2}} \left(\frac{-1}{\kappa}\right) - \frac{-2(1-y)(-1)}{2\sqrt{\kappa^2 - (1-y)^2}} \right) = \frac{\kappa - \kappa + y}{\kappa \sqrt{1 - \left(\frac{1-y}{\kappa}\right)^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{\kappa^2 - (1-y)^2}}$$

facciamo la derivata seconda:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\kappa^2 - (1-y)^2 - y(1-y)}{[\kappa^2 - (1-y)^2]^{3/2}} = \frac{\kappa^2 - 1 + 2y - y^2 - y + y^2}{[\kappa^2 - (1-y)^2]^{3/2}} = \frac{(\kappa^2 - (1-y))}{(\kappa^2 - (1-y)^2)^{3/2}}$$

$$-R = \frac{(1+x'^2)^{3/2}}{x''} = \frac{\left(1 + \frac{y^2}{\kappa^2 - (1-y)^2}\right)^{3/2}}{\frac{\kappa^2 - (1-y)}{(\kappa^2 - (1-y)^2)^{3/2}}} = \frac{(\kappa^2 - (1-y)^2 + y^2)^{3/2}}{(\kappa^2 - (1-y))}$$

$$R = \frac{(\kappa^2 - 1 + 2y - y^2 + y^2)^{3/2}}{(\kappa^2 - 1 + y)} \quad \text{e reintroducendo } \tau \text{ abbiamo}$$

R funzione di y

$$-R = \tau \frac{(\kappa^2 - 1 + 2y/\tau)^{3/2}}{(\kappa^2 - 1 + y/\tau)}$$

posto $\frac{y}{\tau} = (1 - \kappa \cos \varphi)$ sostituendo si ha:

$$-R = \tau \frac{(\kappa^2 - 1 + 2(1 - \kappa \cos \varphi))^{3/2}}{\kappa^2 - 1 + 1 - \kappa \cos \varphi} = \frac{(\kappa^2 + 1 - 2\kappa \cos \varphi)^{3/2}}{\kappa(\kappa - \cos \varphi)}$$

$$-R = \tau \frac{(1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos \varphi)^{3/2}}{(\kappa^2 - \kappa \cos \varphi)}$$

(già trovata)

Quando $K=1$ (cicloide normale)

$$R = \frac{(1-1+2y)^{3/2}}{(1-1+y)} = R = \frac{2y\sqrt{2y}}{y}$$

$$\boxed{R = \tau \cdot 2\sqrt{\frac{2y}{\tau}}} \quad \begin{array}{l} \text{(espresso in } y \text{ per la)} \\ \text{(cicloide normale)} \end{array}$$

od anche:

$$R = (2\sqrt{2})\left(\sqrt{\frac{y}{\tau}}\right)\tau = \boxed{R = 2\sqrt{2}\sqrt{\tau y}}$$

da cui: $\left(\frac{R^2}{8}\right) = (\tau y)$ oppure: $R^2 = (8\tau)y$

cioè:

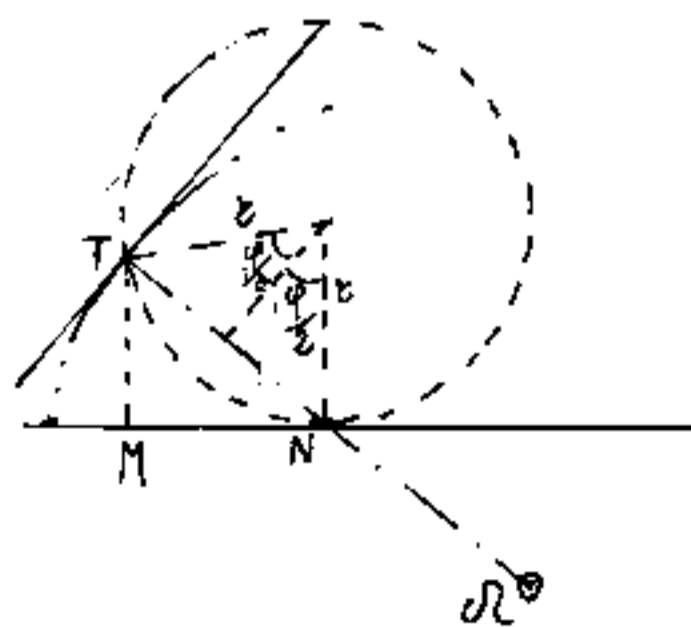
$$\boxed{y : R = R : 8(\tau)} \quad (y : R = R : 4\tau)$$

Nella cicloide ordinaria il raggio di curvatura è medio proporzionale fra l'ordinata corrente ed il quadruplo del diametro della circonferenza generatrice.

quando $y=2\tau \Rightarrow R = \sqrt{(2\tau)(8\tau)} = 4\tau$ (come già trovato)

quindi nel vertice $R=2y$

La formula: $\boxed{R = \tau(4\sin\frac{\varphi}{2})}$ consente importanti osservazioni. Si noti infatti che se T è un punto della cicloide, il segmento \overline{TN} della sua normale e corda della circonferenza generatrice è dato



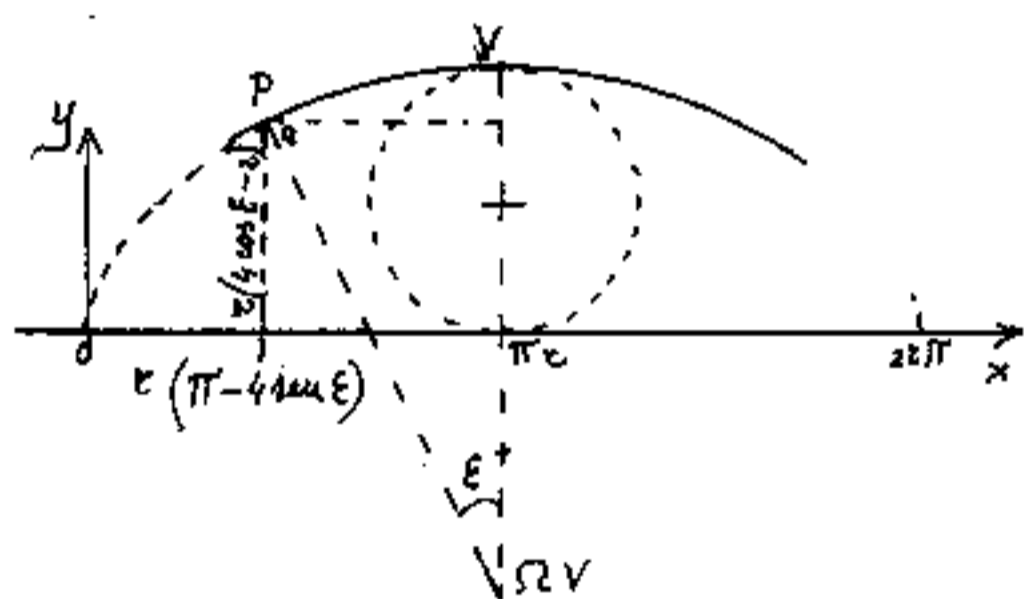
$(\overline{TN} = 2\tau\sin\frac{\varphi}{2}) = R/2$. Quindi raddoppiando \overline{TN} si ha il centro O_2 di R : $\boxed{\overline{O_2T} = 4\tau\sin\frac{\varphi}{2}}$ per ciascun punto della cicloide.

La costruzione grafica della cicloide utilizzando i raggi di curvatura

Si nota che il raggio $R = 4r \operatorname{sen}(\frac{\varphi}{2})$, varia proporzionalmente a $\operatorname{sen}(\frac{\varphi}{2})$, che la variazione di $\operatorname{sen}(\frac{\varphi}{2})$, cioè: $d(\operatorname{sen}(\frac{\varphi}{2})) = \frac{1}{2} \cos(\frac{\varphi}{2}) d\varphi$; che tale variazione è minima per $\varphi = \pi$; ($\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$). Ciò vuol dire

Ciò vuol dire che il cerchio osculatore, nel vertice della cicloide, di raggio pari a $4r$, copre sensibilmente la cicloide per un tratto abbastanza grande.

Calcoliamo l'errore:



Sia V il vertice della cicloide a cui corrisponde il centro ΩV del cerchio osculatore nel vertice il cui raggio $R = 4r$.

Un punto P della circonferenza che stia su un raggio inclinato di ε rispetto alla normale in V , (cioè: $\overline{\Omega V}$), avrà per coordinate: $x_p = (\pi - 4r\mu\varepsilon)r$; $y_p = (4 \cos \varepsilon - 2)r$;

Un punto Q della cicloide abbia la stessa ascissa $x_p = x_q = (\pi \pm 4r\mu\varepsilon)r = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi) = -r(\delta \operatorname{sen} \varphi)$ da cui mediante l'operatore $\delta \operatorname{sen} \varphi = (\operatorname{sen} \varphi - \varphi)$ è possibile esplicitare

$\varphi_q = \operatorname{arg} \delta \operatorname{sen}[4r\mu\varepsilon \pm \pi]$. Se Q ha la stessa ordinata y_q ,

$y_q = r(4 \cos \varepsilon - 2) = r(1 - \cos \varphi) = y_p$; $\cos \varphi = (3 - 4 \cos \varepsilon)$ da cui

$\varphi_q = \arccos(3 - 4 \cos \varepsilon)$ (valore di φ_q affinché: $y_p = y_q$).

da cui $\text{sen}(\varphi_Q) = \text{sen}(\arccos(3-4\cos \varepsilon)) = \sqrt{1-(3-4\cos \varepsilon)^2}$

Sostituendo:

$$x_Q = \left(\arccos(3-4\cos \varepsilon) - \sqrt{1-(3-4\cos \varepsilon)^2} \right) r$$

Per $\varepsilon = 5^\circ$ ove: $y_{\text{cerchio}} = r(1,984778792)$; $x_{\text{cerchio}} = r(2,793080688)$

per la cicloide avente la stessa r ; $x_{\text{cicloide}} = (2,792969683)r$

con un errore di $\Delta x = (0,00011005)r$ (in ascisse)

cioè se la circonferenza generatrice ha per raggio:

$r = 1 \text{ cm}$ l'errore è $\approx \frac{1}{1000}$ di millimetro

$r = 10 \text{ cm}$ " " $\approx \frac{1}{100}$ " "

$r = 1 \text{ m}$ " " $\approx \frac{1}{10}$ " "

Con $r = 1$ metro la cicloide è lunga 8 metri (grande per un disegno e l'errore grafico di $\approx \frac{1}{10}$ di millimetro è quasi tollerabile.

Per $\varepsilon = 10^\circ$ ed $r = 1$ metro; $\Delta x = 0,000893945$ cioè $\approx \frac{9}{10}$ di millimetro

Infine con $\varepsilon = 20^\circ$ l'errore $\Delta x = (0,0073495)r$, che per una cicloide lunga 24 cm, cioè $r = 3 \text{ cm}$, l'errore Δx è $\approx \frac{2}{10}$ di mm. non più accettabile per un buon disegnatore.

Questi errori sono calcolati solo sulla diversità in ascissa fra P e Q di pari ordinata $y_P = y_Q$, ma in effetti il metodo non è ortodoso, perché se noi calcolassimo l'errore nelle ordinate $\Delta y = y_P - y_Q$ a parità di ascisse se $x_P = x_Q$, troveremmo valori diversi.

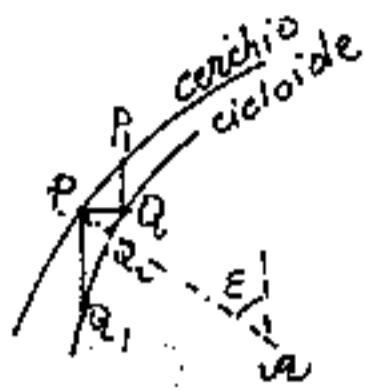
Consideriamo un punto Q della cicloide, le cui coordinate sono definite dalle equazioni parametriche in funzione di r e di φ ;

Per $\varepsilon = 20^\circ$ abbiamo:

$$x_Q = (1,780861656)\tau; \quad x_P = (1,77351208)\tau; \quad \Delta x = (0,007349576)\tau = \overline{PQ}$$

$$y_P = y_Q = (1,758770483)\tau; \quad y_{P_1} = (1,761437378)\tau; \quad \Delta y = (0,002666895)\tau = \overline{P_1Q}$$

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = (0,007818478)\tau = \overline{PP_1} \text{ (errore)}$$



Abbiamo schematizzato la posizione dei punti: P, P_1, Q, Q_1 per poter meglio apprezzare gli scostamenti.

Per calcolare $y_{Q_1} = \tau (1 - \cos \arccos \sin[1 \sin \varepsilon - \pi])$ ci avvaliamo delle tavole, ove interpolando abbiamo:

$$\varphi^\circ = 139,1163116; \quad \varphi_{\text{rad.}} = 2,428037682; \quad \sin = \underline{1,773512080} \text{ e}$$

$$\cos \varphi = -0,756039838 \text{ per cui } y_{Q_1} = \underline{(1,756039838)\tau}$$

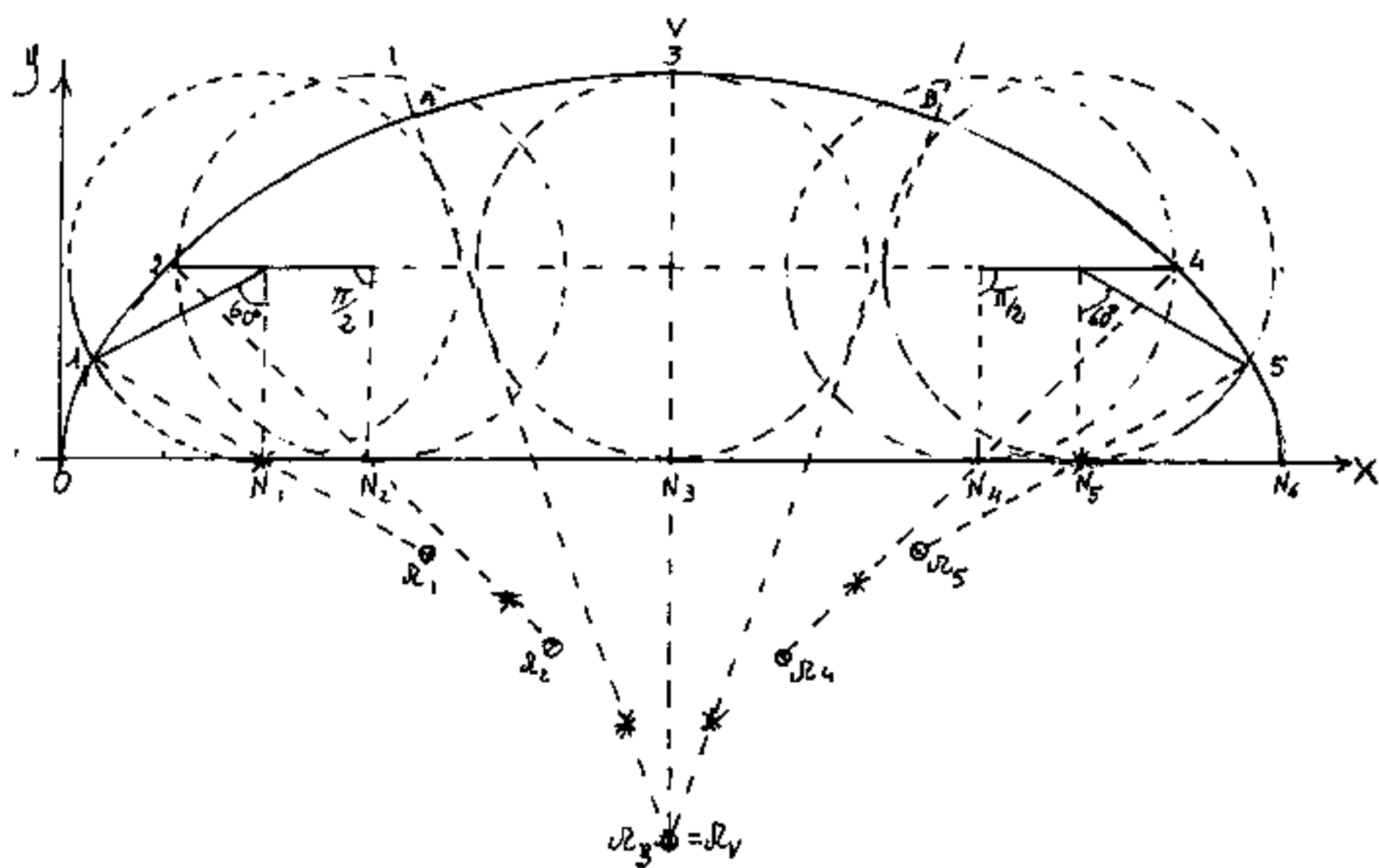
$$\Delta y_1 = \underline{(0,002730645)\tau} = \overline{PQ_1}; \quad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_1^2} = \underline{(0,007840452)\tau} = \overline{QQ_1}$$

Sul raggio di tracciamento OP la cicloide si scosta dal cerchio di $\overline{PQ_2} = \overline{PQ} \sin \varepsilon$ e nel nostro caso $\overline{PQ_2} = (0,007349576) \sin 20^\circ = (0,00251375)\tau$ cioè per cicloidi con $\tau = 2 \text{ cm}$ (lunghe 32 cm) lo scostamento è 0,005 cm. cioè $\frac{5}{100}$ di millimetro $\frac{0,5}{10}$ di millimetro è difficile lavorare con punte di $0,5/10 \text{ mm}$. solo con certe punte e pennini speciali. (lo scostamento di mezzo decimo).

Occorre però tener presente che via via che ci allontaniamo dal vertice la curvatura della cicloide aumenta, per cui i tratti di arco debbono essere più brevi.

Modo di procedere

Si segna in ascisse un segmento pari alla lunghezza della circonferenza generatrice: $(2\pi)r$.
Si tracciano perpendicolari in $X_{N_1} = \frac{\pi}{3}r$; $X_{N_2} = \frac{\pi}{2}r$;
 $X_{N_3} = r\pi$; $X_{N_4} = \frac{3}{2}\pi r$; $X_{N_5} = \frac{5}{3}\pi r$; in questi punti si tracciano le tangenti circonferenze generatrici, e si trovano facilmente i punti della corrispondente cicloide:
1, 2, 3, 4, 5, 6; rispettivamente: $\varphi_1 = 60^\circ$; $\varphi_2 = 90^\circ$; $\varphi_3 = 180^\circ$; $\varphi_4 = 270^\circ$; $\varphi_5 = 300^\circ$.



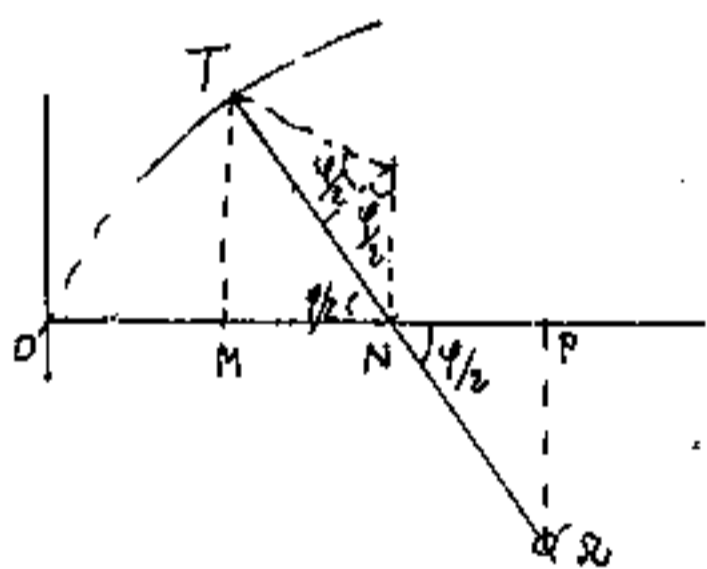
Trovato il centro $R_3 = R_v$ sulla normale da N_3 alla x ; $\overline{N_3 R_v} = 2r$;
si tracciano le tangenti al cerchio di N_3 per delimitare l'arco \widehat{AB} di centro R_v e raggio $4r$. Si unisce 2 con N_2 e si raddoppia il segmento: $(2-N_2)2 = 2R_2$ per trovare il centro del cerchio osculatore in 2 , analogamente in $1, 4, 5$ si tracciano i cerchi e si raccordano in 0 e 6 con centri in N_1 ed N_5 . Si notino * i centri per ricordare.

L'evoluta della cicloide

Abbiamo già visto che il raggio di curvatura in un punto T della cicloide è dato da $R = 2\overline{TN}$ cioè dal doppio del segmento di normale che va da T al punto N d'incontro con le ascisse (ed N è anche il punto di tangenza del cerchio generatore).

Il luogo geometrico di tutti i punti π centro dei cerchi osculatori della cicloide si chiama Evoluta della cicloide mentre la cicloide è la Evovente di quella evoluta.

Cerchiamo l'equazione dell'evoluta:



$$x_{\pi} = x_P = \overline{ON} + \overline{NP}$$

$$x_{\pi} = \tau\varphi + \overline{TN} \cos \varphi/2 =$$

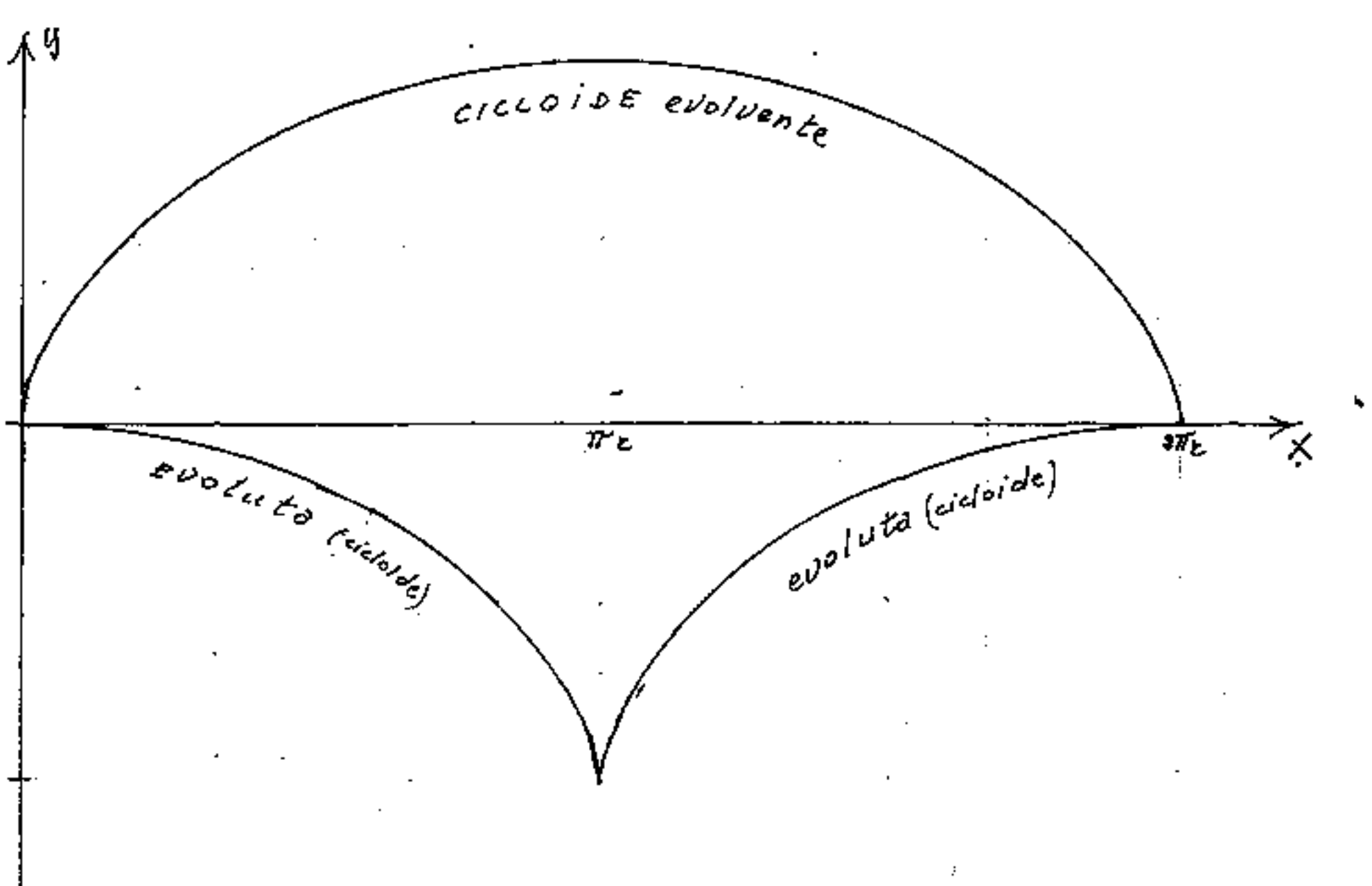
$$x_{\pi} = \tau\varphi + \frac{R}{2} \cos \varphi/2$$

$$x_{\pi} = \tau\varphi + \left(2\tau \sin \frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\boxed{x_{\pi} = \tau(\varphi + \sin \varphi)}$$

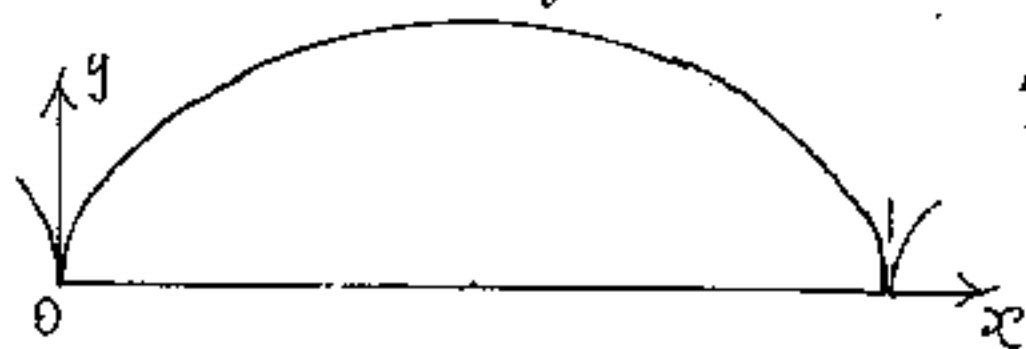
$$y_{\pi} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = -\left(2\tau \sin \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin \varphi}{2} = -\left(2\tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) = \boxed{y_{\pi} = -\tau(1 - \cos \varphi)}$$

ma i valori trovati per x_{π} ed y_{π} sono ancora le coordinate parametriche di una cicloide ad $y < 0$ avente la circonferenza generatrice con lo stesso raggio e che rotola su una retta $y = -2\tau$ ed inizia col centro O dell'arco che corrisponde al vertice, mentre la cuspidè si trova per $x_{\pi} = \pi \cdot \tau$.



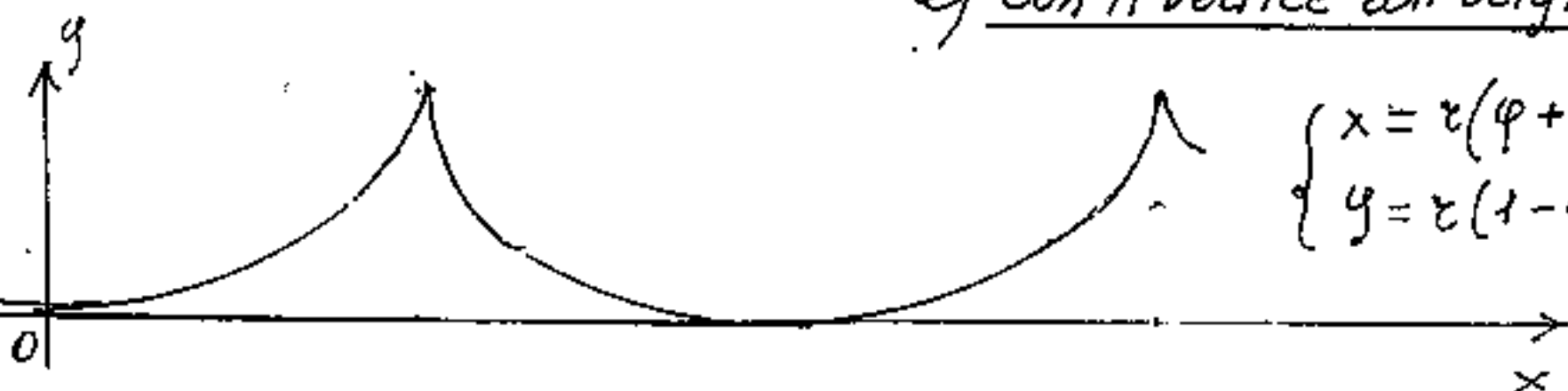
L'evoluto di una cicloide è ancora composta da due rami della stessa cicloide ad assi spostati:

Si distinguono due tipi di cicloide:



1) con la cuspidi all'origine

$$\begin{cases} x = r(\varphi - r \sin \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$



2) con il vertice all'origine

$$\begin{cases} x = r(\varphi + r \sin \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

L'evoluto della cicloide con cuspidi all'origine è una cicloide con vertice all'origine, ma con ordinate di segno opposto.

Una costruzione grafica, con la quale possiamo tenerci conto della precisione con la quale riusciamo a disegnare è la seguente.

Tracciato un segmento divisibile in 24 parti (per es. 24 cm.), sul suo asse si fissano due punti da banda opposta pari a due raggi r (ove: $r = \frac{24}{2\pi}$, è il raggio della circonferenza generatrice.) Con centro sull'asse si traccia questa circonferenza in modo che sia tangente al segmento (e lo sarà nel suo punto di mezzo). Si divide la circonferenza in 24 parti facendo centro sugli estremi dei due diametri: orizzontale e verticale e dei due diametri a 45° .

Si numerano i punti sulla circonferenza a partire con 0 nel punto di tangenza, ove si sovrapporrà 24.

Si numerano le divisioni del segmento da 0 a 24 con 12 nel punto di tangenza con la circonferenza che porta i n° 0 e 24.

Si numerano con gli stessi numeri la retta $y = r$, luogo delle posizioni del centro della circonferenza generatrice.

Si uniscono con rette orizzontali i punti di divisione della circonferenza (la somma dei due è sempre 24). Si tracciano archetti di raggio r e centro sulla retta dei centri nei punti 1, 2, 3, .. ora numerati fino ad incontrare l'omonima retta orizzontale: 1, 2, 3... i punti di incontro sono punti della cicloide che si uniscono con gli omonimi sulle ascisse e raddoppiando i segmenti si trovano i corrispondenti centri Ω dei cerchi osculatori.

Il disegno, sia per la simmetria, sia per le particolari caratteristiche della cicloide ammette una molteplicità di controlli per verificare la curatezza del disegno.

Le rette orizzontali distano come le differenze dei coseni di φ moltiplicate per r .

Nel disegno si è evidenziata la costruzione del punto 8 della cicloide come intersezione della retta 8 con l'archetto di raggio r e centro 8.

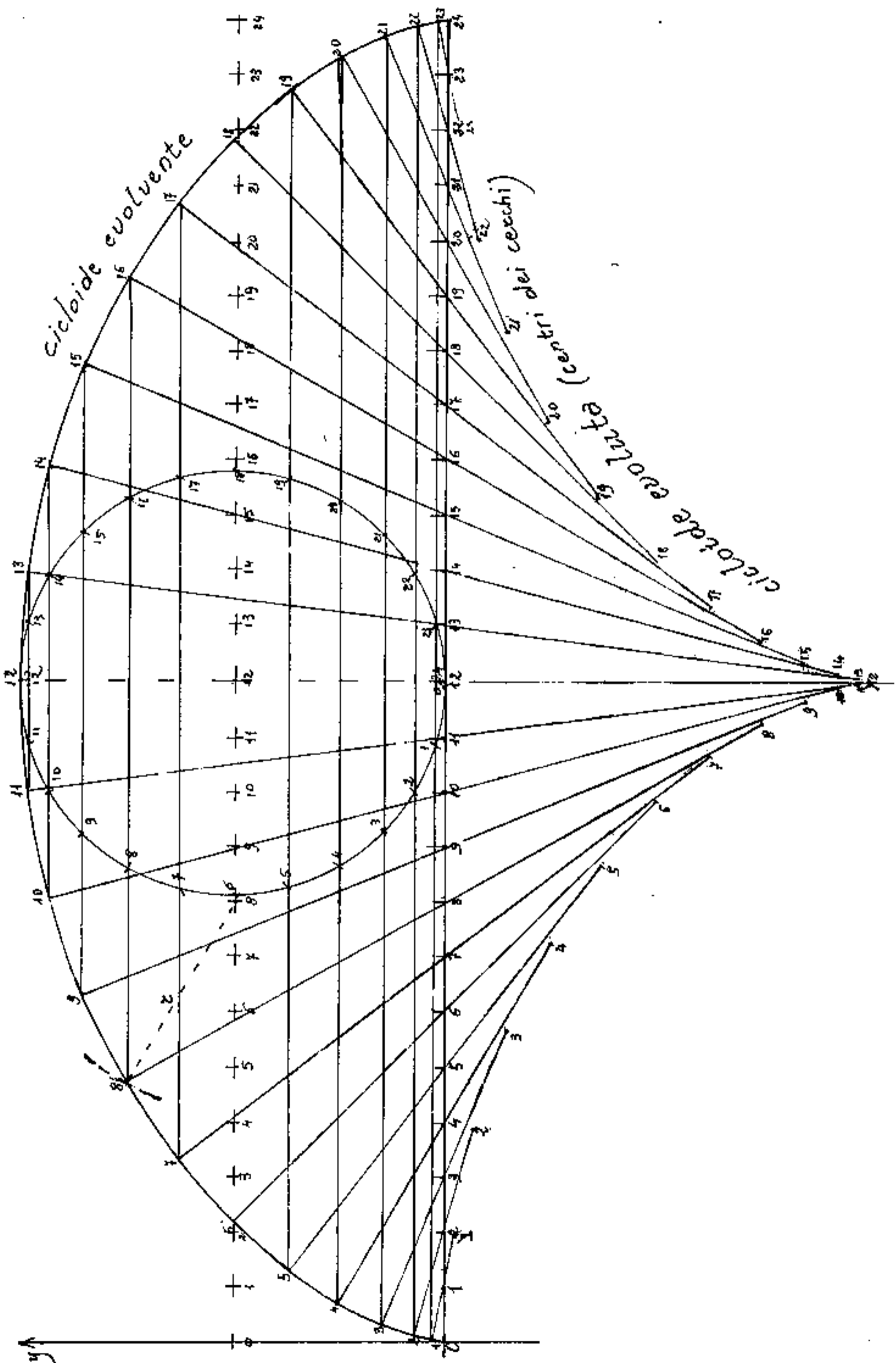
Per i punti 1, 2, 3 ed anche 23, 22, 21 l'errore grafico può essere alto.

È anche importante confrontare i punti della cicloide evolvente coi punti della cicloide evoluta. (Cioè ponendo i corrispondenti in verticale)

punti evoluta : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 : : (evolvente)
punti evolvente : 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 : : (evoluta)

(Basta prendere un foglio di carta trasparente per reiterare la corrispondenza.)

Nel disegno si è utilizzata la frazione $\frac{22}{7} = 3,141592653589793$ arrotondando a 7 (come facevano gli antichi ore: $\pi \approx \frac{22}{7}$)



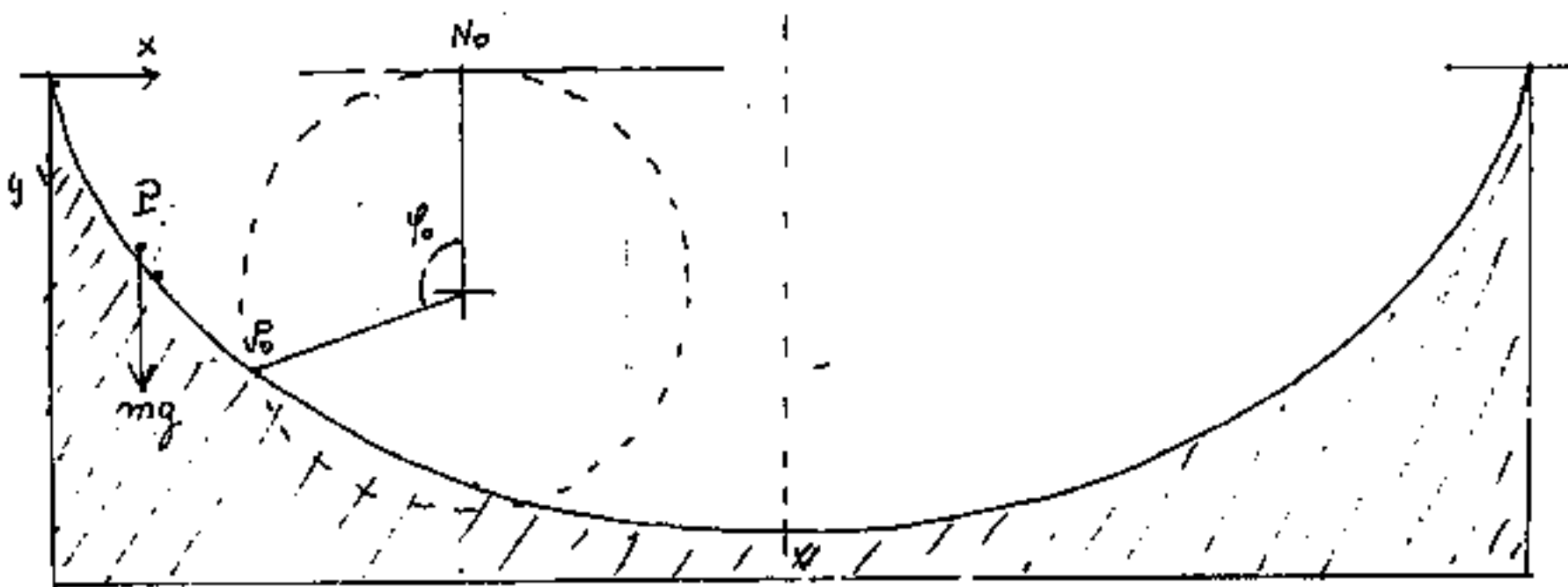
Cicloide evolvente

Cicloide evoluta (centri dei cerchi)

Ciclografia approssimativa dei cerchi

y

Il problema della tautócrona



Consideriamo, in campo gravitazionale, una vaschetta a profilo cicloidale priva di attriti:

Un punto P di massa m e quindi di peso " mg " venga abbandonato in un punto qualsiasi della cicloide. esso tenderà a scivolare verso il basso cioè secondo la direzione della gravità, nel cui verso abbiamo posto l'asse delle y .

Calcoliamo il tempo impiegato dal punto per passare da P_0 a P_1 .

La differenza ΔE di energia potenziale per passare da P_0 a P_1 sarà:

$$\Delta E = mg(y_1 - y_0)$$

D'altra parte la perdita di energia potenziale si sarà trasformata in energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

cioè: $\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_1 - y_0)$

per cui:

$$v^2 = 2g(y_1 - y_0)$$

(nota formula della fisica)

sostituendo y si ha:

$$v^2 = 2g \left((1 - \cos \varphi_1) - (1 - \cos \varphi_0) \right) r$$

$$v^2 = 2g (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) r$$

Sia N il punto di contatto del cerchio generatore della cicloide con l'asse x e sia φ l'angolo che il raggio passante per N forma col raggio passante per il punto P della cicloide, generato dal cerchio in N .

Le coordinate di P sono:

$$\begin{aligned} x &= r (\varphi - r \sin \varphi) \\ y &= r (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

derivando rispetto al tempo avremo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r (1 - \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= r (\sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

essendo la velocità: $v = \frac{ds}{dt}$ da cui: $v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$

$$\text{cioè: } v^2 = \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{(dy)^2 + (dx)^2}{(dt)^2}$$

$$v^2 = r^2 (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r^2 (\sin^2 \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 =$$

$$v^2 = r^2 (2 - 2 \cos \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$v^2 = 2\tau^2(1 - \cos\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

confrontando con la:

$$v^2 = 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\tau \quad (\text{ovv} \varphi_1 = \varphi) \\ (\text{generico})$$

si ha:

$$2\tau^2(1 - \cos\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\tau$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{\tau} \left(\frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi} \right)}$$

$$dt = \sqrt{\frac{\tau}{g}} \sqrt{\frac{(1 - \cos\varphi)}{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}} d\varphi$$

Integrando fra 0 e t, avremo:

$$t_1 = \sqrt{\frac{\tau}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\sqrt{\frac{(1 - \cos\varphi)}{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}} \right) d\varphi$$

Poichè t_1 è essenzialmente positivo, assumeremo positivo il segno delle radici.

tenuto conto che: $(1 - \cos\varphi) = 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{\tau}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(2\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - 2\cos^2 \frac{\varphi}{2})}} \right) d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{\tau}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\frac{-d\cos(\varphi/2)}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \right)$$

$$t_1 = -2\sqrt{\frac{z}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\left(\frac{\cos(\varphi/2)}{\cos(\varphi_0/2)}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi/2}{\cos^2 \varphi_0/2}\right)}} =$$

$$t_1 = -2\sqrt{\frac{z}{g}} \left[\arccos \left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2} \right) \right]_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$t_1 = +2\sqrt{\frac{z}{g}} \left[\arccos \left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2} \right) - \arccos \frac{\cos \varphi_0/2}{\cos \varphi_0/2} \right]$$

$$(\arccos 1 = 0)$$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{z}{g}} \left(\arccos \left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2} \right) \right)$$

ed anche:

$$t_1 = -2\sqrt{\frac{z}{g}} \left[\arcsin \left(\frac{|\cos \varphi/2|}{\cos \varphi_0/2} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Per giungere al punto piú basso (V) ore: $\varphi_1 = \pi$

$\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\cos \frac{\varphi_1}{2} = 0$: ($\varphi_1 = \varphi$) sostituendo abbiamo:

che il tempo T per raggiungere il punto piú basso è:

$$T = \pi \sqrt{\frac{z}{g}}$$

Indipendente dal punto di partenza (φ_0)

Cioè qualunque sia il punto di partenza impiega lo stesso tempo a raggiungere il vertice.

Cioè, se disponiamo di una vaschetta a profilo cicloidale, e da due punti qualsiasi lasciamo liberi due corpi, essi si incontreranno in V.

Il problema inverso è quello di cercare la curva, in un piano verticale, tale che, abbandonando su di essa un punto pesante, qualunque sia dove abbandoniamo il punto, esso impiega sempre lo stesso tempo per giungere al vertice.

La risposta a tale problema è che la curva richiesta è una cicloide; perciò la cicloide si chiama anche: curva tautocrona.

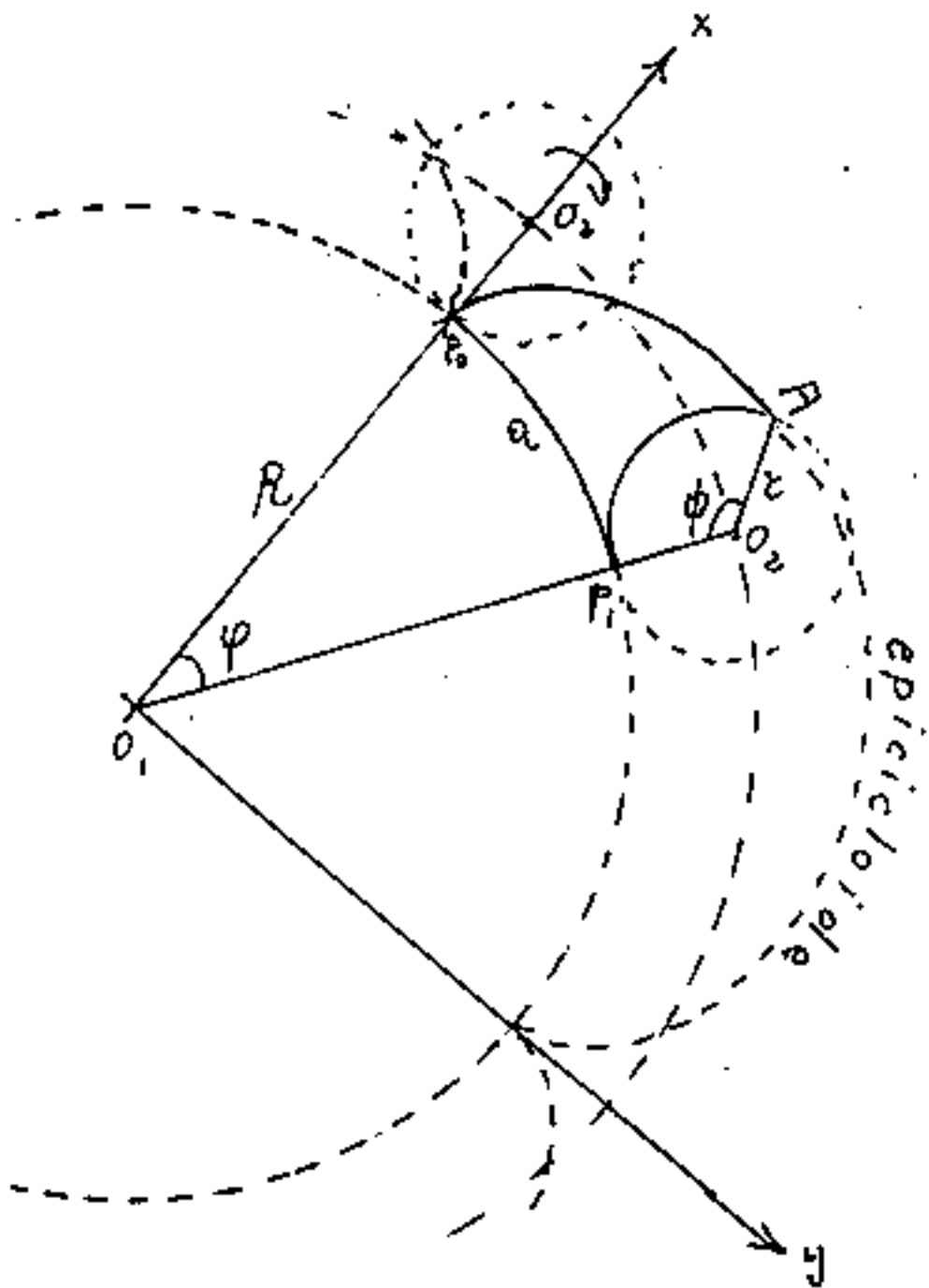
Così il pendolo di Huygens dove, in assenza di attriti, la massa puntiforme, per l'energia cinetica acquisita, risale ad una quota pari a quella di partenza. Generalizzazione del principio Galileiano dell'isocronismo delle piccole oscillazioni. -

Qui infatti (sulla vasca a profilo cicloidale) sono isocrone le oscillazioni qualunque sia il punto di partenza.

La formula del pendolo è solo approssimata, quella della cicloide è esatta. Tuttavia a causa dell'attrito ha trovato scarse applicazioni pratiche. Invece sarebbe fondamentale proprio per lo studio dell'attrito.

Epicycloide, ipocicloide, pericycloide

Epicycloide



L'epicycloide è la traiettoria di un punto A di una circonferenza di raggio r , che rotola senza strisciare su un'altra circonferenza fissa di raggio R , esternamente ad essa.

Questo movimento è condizionato dall'uguaglianza degli archi che sono venuti a contatto:

$$R\psi = r\phi$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\phi}{\psi}$$

Quando la circonferenza mobile ha compiuto un intero giro, il suo arco $r\phi = 2\pi r$; sulla circonferenza fissa sarà stato percorso l'arco $R\psi = 2\pi R$.

Inversamente quando sulla circonferenza fissa è stato compiuto il giro $R\psi = 2\pi R$ si verificano casi diversi a seconda che $R \geq r$ e che: $R = m \cdot r$ abbia n intero. In figura abbiamo posto $R = 4r$

in modo che in un giro completo intorno al cerchio fisso, si generino quattro epicloidi intere.

Con "n" tendente all'infinito, "ε" tende a zero per cui una circonferenza può riguardarsi come costituita da infinite epicloidi di raggio nullo.

Se n non è intero avverrà che al primo giro avremo una frazione di epicloide (eventualmente oltre un numero intero di epicloidi)

se $n = \frac{l}{m}$ dopo "m" giri, il punto che traccia le epicloidi, sarà tornato al punto di partenza ed avrà tracciato l epicloidi che mutuamente si sovrappongono in parte su parte. Se n è intero qualunque sia il numero di giri si producono sempre le stesse epicloidi.

Se i numeri R e r sono incommensurabili (come il lato e la diagonale di un quadrato) per quanti giri compia la circonferenza mobile intorno alla fissa non si verificherà mai che il punto tracciante torni al punto di partenza, cioè che ad un numero intero di giri corrisponda un numero intero di archi di epicloide. (Il fenomeno non ammette frequenze è aperiodico)

Assumiamo un sistema di assi cartesiani con l'origine al centro della circonferenza fissa, con la retta delle asse coincidente coi raggi iniziali: $\overline{O_1 P_0}$ e $\overline{O_2 A_0}$ ed ($P_0 \equiv A_0$) e diretta nel verso $\overline{O_1 P_0}$. Per axe y , una retta per O_1 normale ad x e con verso tale da essere concorde al moto di O_2 . (coppia oraria o antioraria) (nel disegno il moto è orario)

Abbiamo:

$$\begin{cases} x_{O_2} = (R+r) \cos(\varphi) \\ y_{O_2} = (R+r) \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\alpha = \phi - (90^\circ - \varphi)$$

$$\alpha = ((\phi + \varphi) - 90^\circ)$$

$$\begin{cases} X_A = x_{O_2} + r \sin \alpha \\ Y_A = y_{O_2} - r \cos \alpha \end{cases}$$

Sostituendo si ha:

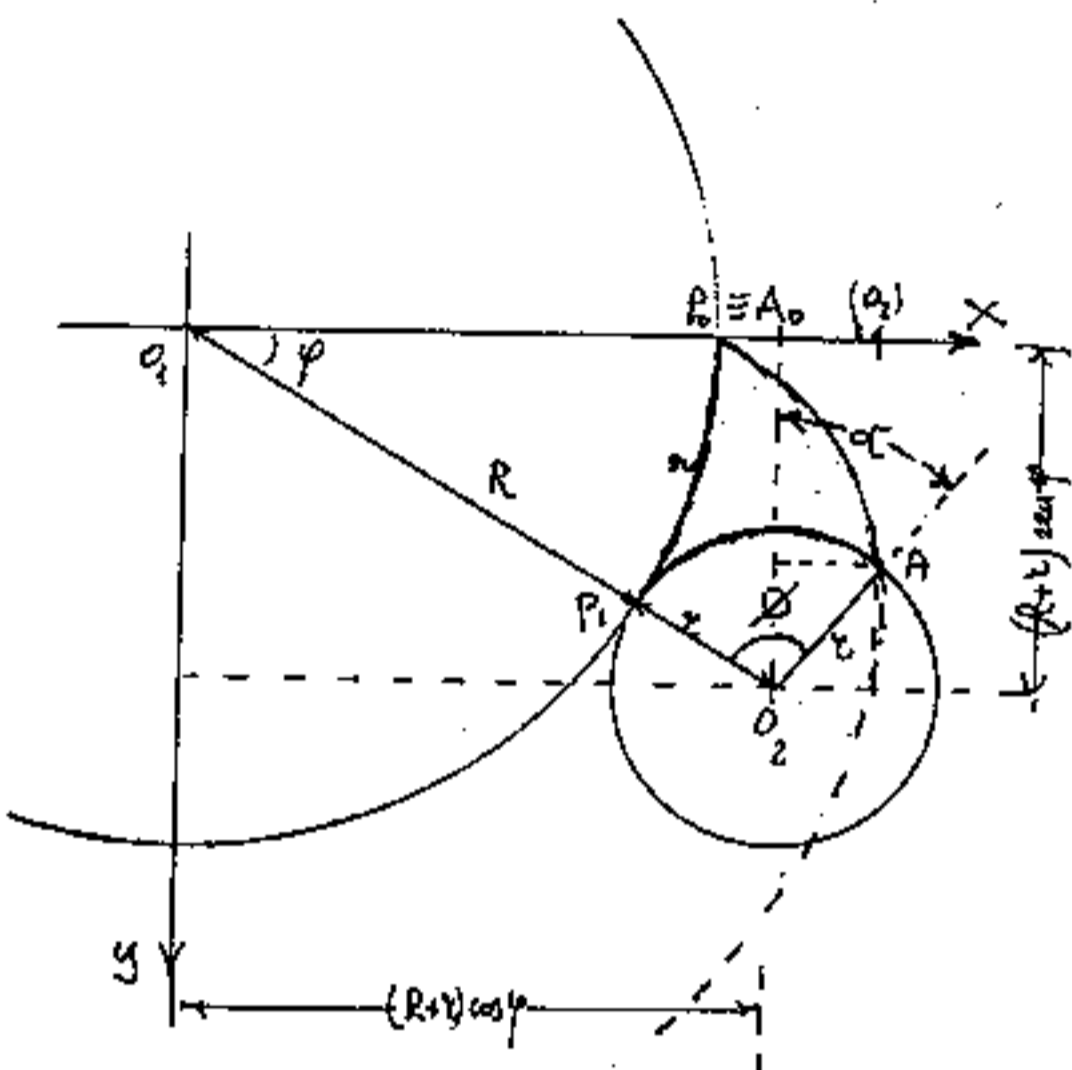
$$\begin{cases} = (R+r) \cos \varphi - r \cos(\phi + \varphi) \\ = (R+r) \sin \varphi - r \sin(\phi + \varphi) \end{cases}$$

ma: $\phi = \left(\frac{R}{r}\right) \varphi$

sostituendo si ha:

$$\begin{cases} X = (R+r) \cos \varphi - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right) \varphi\right) \\ Y = (R+r) \sin \varphi - r \sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right) \varphi\right) \end{cases}$$

Equazione generale dell'epicicloide in coordinate parametriche.



L'equazione può anche scriversi, ponendo ($R = n\tau$)

$$\begin{aligned} X &= \tau \left((n+1) \cos \varphi - \cos((n+1)\varphi) \right) \\ Y &= \tau \left((n+1) \sin \varphi - \sin((n+1)\varphi) \right) \end{aligned}$$

ed anche ($\tau = \text{modulo}$)

$$\begin{aligned} X/\tau &= (n+1) \cos \varphi - \cos[(n+1)\varphi] \\ Y/\tau &= (n+1) \sin \varphi - \sin[(n+1)\varphi] \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(Epicicloidi)} \\ \text{nei parametri} \\ \varphi \text{ ed } n \end{array}$$

ove: $n = \frac{R}{\tau}$ è sempre > 0 , per cui: $(n+1) > 1$.

Per ogni diverso "n" si ha una diversa epicicloide; talvolta chiamata con nomi diversi. Come vedremo, alcune curve che nascono da diversa impostazione di luogo geometrico, sono un caso particolare di epicicloide.

Prima di trattare i casi particolari, completiamo i calcoli.

• Differenziando si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= (n+1) (\sin((n+1)\varphi) - \sin \varphi) \tau \\ \frac{dy}{d\varphi} &= (n+1) (\cos \varphi - \cos((n+1)\varphi)) \tau \end{aligned}$$

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) = \tau^2 (n+1)^2 \left[(\sin((n+1)\varphi) - \sin \varphi)^2 + (\cos \varphi - \cos((n+1)\varphi))^2 \right] (d\varphi)^2$$

$$ds^2 = (n+1)^2 \left[\sin^2((n+1)\varphi) + \sin^2\varphi - 2\sin\varphi\sin((n+1)\varphi) + \cos^2((n+1)\varphi) + \cos^2\varphi - 2\cos\varphi\cos((n+1)\varphi) \right] r^2$$

$$ds^2 = r^2 (n+1)^2 \left[2 - 2\cos\{(n+1)\varphi - \varphi\} \right] d\varphi^2 = ds^2 = (n+1)^2 r^2 \cdot 2(1 - \cos(n\varphi)) d\varphi^2$$

$$ds^2 = (n+1)^2 \cdot 2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{n\varphi}{2}\right) d\varphi^2 r$$

$$ds = 2(n+1) \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) r d\varphi$$

Lunghezza dell'epicicloide

$$L = \int_0^{2\pi} 2(n+1) \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) r d\varphi$$

$$L = \left[-2(n+1) \left(\frac{2}{n}\right) \cos\left(\frac{n\varphi}{2}\right) \right]_0^{2\pi} \cdot r$$

$$L = -4 \left(\frac{n+1}{n}\right) [\cos(n\pi) - 1] r$$

$$L = 4 \left(\frac{n+1}{n}\right) [1 - \cos(n\pi)] r$$

Formula che calcola la lunghezza di tutti gli archi (o frazione di archi) di epicicloide quando la circonferenza mobile, compie un giro completo intorno alla circonferenza fissa.

Qualora si voglia la lunghezza di un solo arco completo di epicicloide: $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$$L = 4 \left(\frac{n+1}{n}\right) (1 - \cos(\pi)) r$$

$$L = 8 \left(\frac{n+1}{n}\right) r$$

(valida in generale anche per $n = \infty$)

L'Area dell'epicicloide

$$\left(A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta \right)$$

$$r^2 = (x^2 + y^2); \quad \theta = \arctang\left[\frac{y}{x}\right],$$

$$d\theta = d\arctang\left[\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$d\theta = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right) \left(\frac{x dy - y dx}{x^2}\right) =$$

$$d\theta = \frac{1}{r^2} (xy' - yx') d\varphi$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') d\varphi$$

$$(xy') = r^2(n+1) \left[(n+1)\cos(\varphi) - \cos((n+1)\varphi) \right] \left[\cos(\varphi) - \cos((n+1)\varphi) \right]$$

$$(xy') = r^2(n+1) \left[(n+1)\cos^2\varphi + \cos^2((n+1)\varphi) - (n+2)\cos\varphi\cos((n+1)\varphi) \right]$$

$$yx' = r^2(n+1) \left[(n+1)\sin(\varphi) - \sin((n+1)\varphi) \right] \left[\sin((n+1)\varphi) - \sin(\varphi) \right]$$

$$yx' = r^2(n+1) \left[-(n+1)\sin^2\varphi - \sin^2((n+1)\varphi) + (n+2)\sin(\varphi)\sin((n+1)\varphi) \right]$$

$$(xy' - yx') = r^2(n+1) \left[(n+1) + 1 - (n+2)\cos((n+1)\varphi - \varphi) \right]$$

$$(xy' - yx') = r^2(n+1)(n+2)(1 - \cos(n\varphi))$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2(n+1)(n+2)}{n} \right) \int_0^{2\pi} (1 - \cos(n\varphi)) d(n\varphi) =$$

$$= \frac{r^2(n+1)(n+2)}{2n} \left[n\varphi - \sin(n\varphi) \right]_0^{2\pi}$$

$$A = r^2(n+1)(n+2)\pi$$

L'equazione generale delle curve Epicicloidi,
 espressa parametricamente nel parametro φ
 per determinare le coordinate di un punto
 di una singola curva; e nel parametro n , per
 determinare il tipo di curva; è data da:

$$\begin{aligned} x/\tau &= [(m+1)\cos\varphi - \cos(m+1)\varphi] \\ y/\tau &= [(m+1)\sin\varphi - \sin(m+1)\varphi] \end{aligned}$$

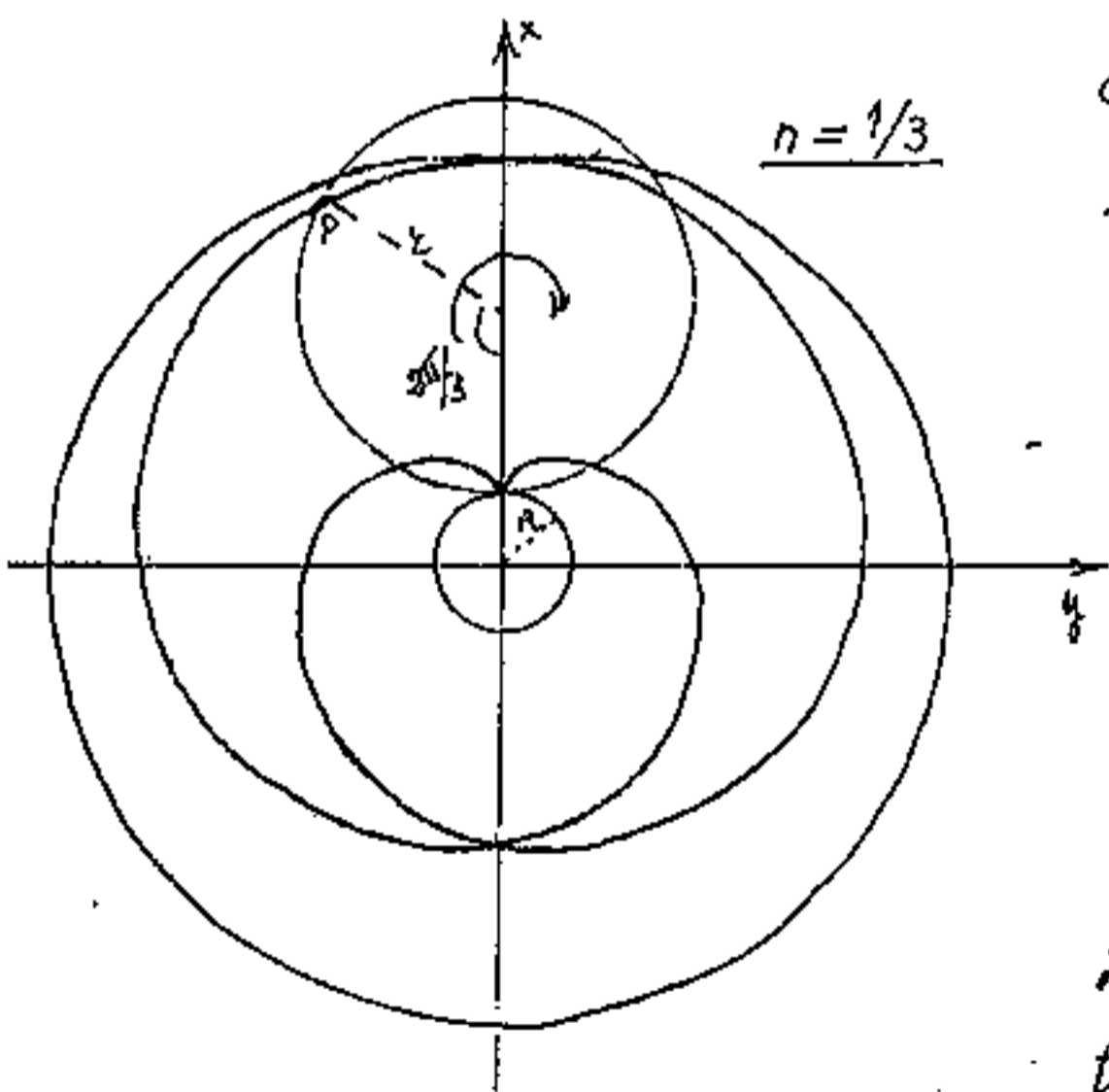
Vediamo cosa succede al variare di
 $m = R/\tau$ ove $R =$ raggio circonferenza fissa ed $\tau =$
 $\tau =$ raggio circonferenza mobile.

Per $n=0$ si ha il punto origine degli assi

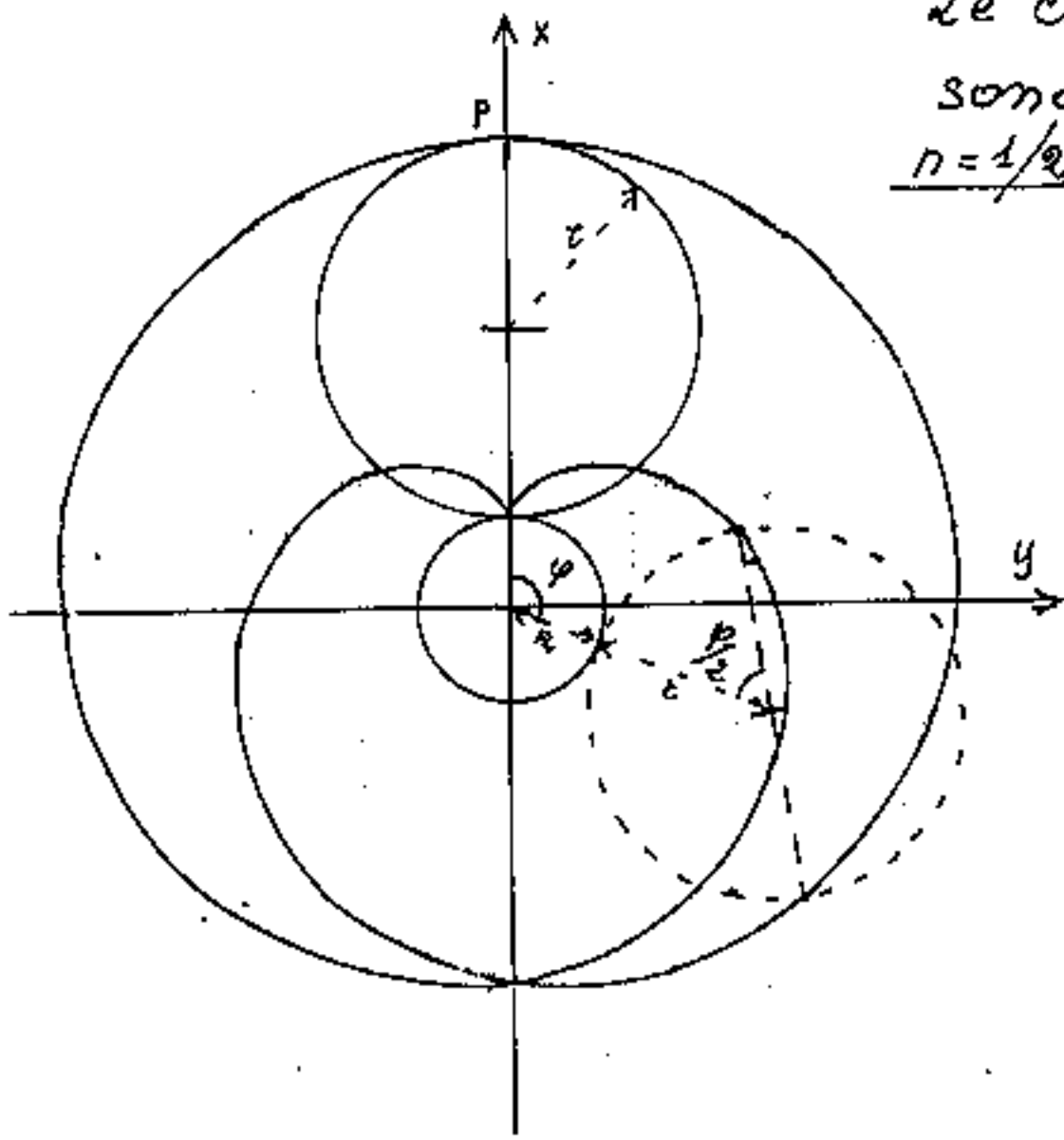
Per $0 < n < 1$ si ha $R < \tau$, il punto di τ

descrive $n/2$ spirali ac-
 scendenti ed $n/2$ spirali
 decrescenti, tornando
 all'origine dopo n giri

Nella figura a
 fianco abbiamo posto
 $m = 1/3$ quando la circon-
 ferenza mobile ha compiu-
 to un giro il punto è in P.



Le curve con $R < r$ cioè $m < 1$
sono dette Pericicloidi
 $n = 1/2$

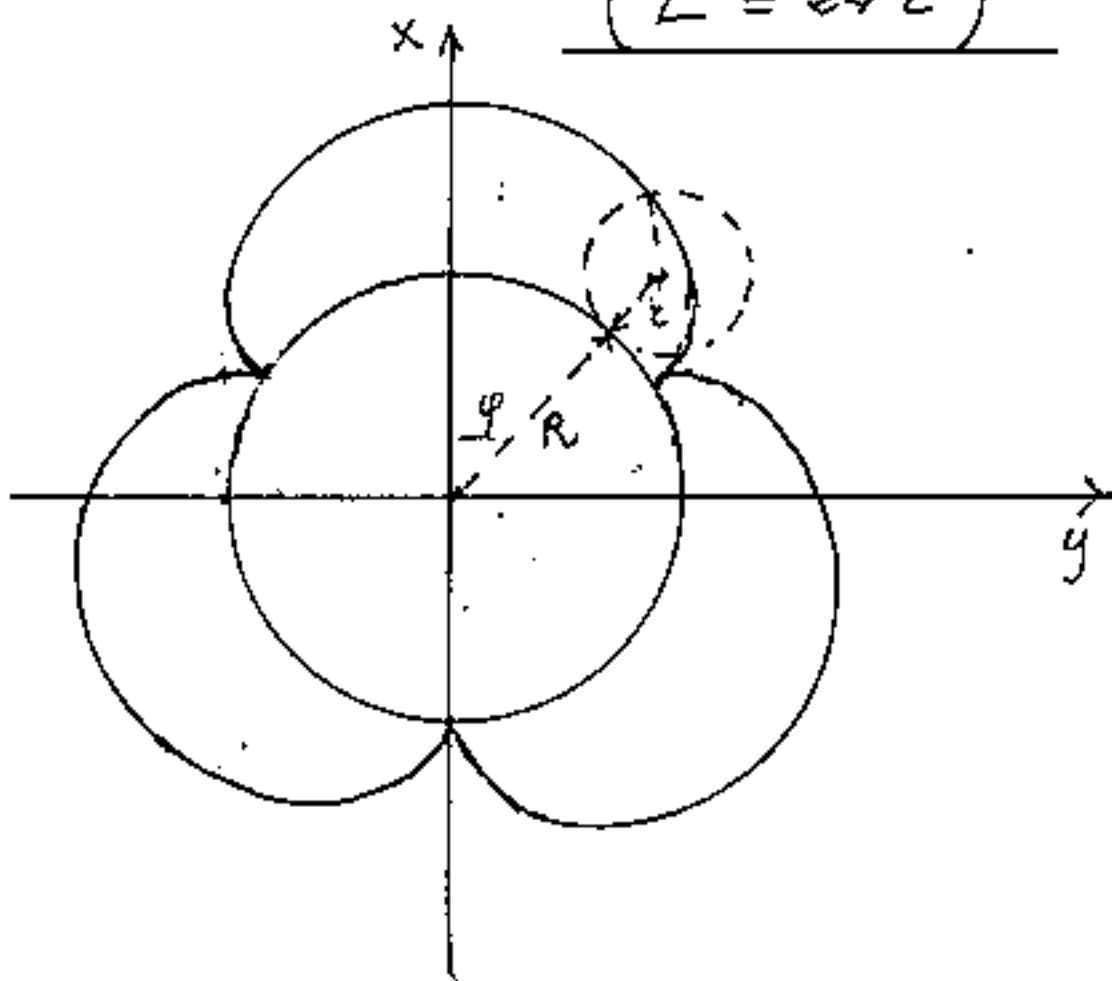


Per $n = 1/2$ si ha la
figura disegnata
a fianco, ove si
nota che P, dopo
un giro si trova dia-
metralmente op-
posto alla posizione
di origine per cui

Mentre l'estremo di un diametro descrive la spirale
crescente, l'altro estremo descrive la spirale decres-
cente. Le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = r \left(\frac{3}{2} \cos \varphi - \cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \right) \\ y = r \left(\frac{3}{2} \sin \varphi - \sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \right) \end{cases}$$

La lunghezza dell'intera linea: $\left[L = 8 \frac{m+1}{m} r \right]$
 $(L = 24 r)$



Nella figura a
fianco si è posto
 $n = 3$ (se $n > 1$
è intero, si hanno
tante ipocicloidi
quant'è m .)

Area delle lunule epicycloidali

Affinchè si abbiano lunule complete, poniamo: $\frac{R}{r} = n = \text{intero}$ in tal modo, in un giro completo dell'epicloide vi saranno n lunule complete.

Abbiamo visto che l'area dell'epicloide che abbia fatto un giro completo è:

$$A = r^2 (n+1)(n+2)\pi = R^2 \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} \pi$$

Se a questa area togliamo l'area del cerchio fisso: $R^2\pi$, otteniamo l'area fra la linea epicycloidale e la circonferenza fissa.

$$A_E = R^2\pi \frac{(n+1)(n+2) + m^2}{m^2} = \frac{R^2\pi}{m^2} (n^2 + 3n + 2 - m^2)$$

$$A_E = r^2\pi (3n+2)$$

quindi l'area di una lunula A_L

$$A_L = r^2\pi \left(3 + \frac{2}{n}\right)$$

Questa formula può scriversi:

$$A_L = 3r^2\pi + \frac{2r^2\pi}{n}$$

ove per n tendente all'∞ anche R tende all'infinito, cioè la circonferenza fissa diventa una retta, il termine $+\frac{2r^2\pi}{n}$, per $n \rightarrow \infty$ è nullo e ritorna l'area della cicloide

$$\boxed{A = 3r^2\pi} \quad (\text{Galileo})$$

Per $n=1$ si ha la cardioidale:

$$\boxed{A = 5r^2\pi}$$

e rappresenta l'area fra la circonferenza fissa e la cardioidale se aggiungiamo l'area del cerchio fino abbiamo: $A_c = 5r^2\pi + r^2\pi = \underline{6r^2\pi}$.

Per $n=2 \rightarrow A = 4r^2\pi$; per $n=3 \rightarrow A = \underline{\frac{14}{3}r^2\pi}$

$n=4 \rightarrow A = \underline{\frac{7}{2}r^2\pi}$; $n=5 \rightarrow A = \underline{\frac{16}{5}r^2\pi}$

Si noti che la lunghezza dell'arco di epicicloide che delimita una lunula è (vedi pag 157) $L = 8r \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (indipendente da π) che per $n \rightarrow \infty$ è la lunghezza della cicloide: $L = 8r$. L'arco di circonferenza fissa che delimita una lunula è $\frac{1}{n} 2\pi r = \underline{2r\pi}$ (indipendente da n). Il rapporto fra l'arco di epicicloide e l'arco di circonferenza (o meglio il suo inverso è):

$\frac{L}{L_c} = \frac{2\pi r}{2r\pi \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ (indipendente da r) che per $n \rightarrow \infty$, nella cicloide, si ha: $\underline{\frac{L}{L_c} = \frac{\pi}{4} = 0,785398\dots}$

$\frac{4}{\pi} = 1,273239545$ = rapporto fra raggio ed arco di circonferenza 45°. —

La cardiode

Una importante epicycloide si ha quando:

$R=r$ cioè quando

$m=1$ si ha un

unico arco di epicycloide che

si richiude su se stesso e si ripete ad ogni giro.

Questa curva è chiamata:

Cardioides.

a causa della sua forma ed ha caratteristiche particolari: per esempio $\overline{PA} = \overline{AP_1} = 2r = a$.

Le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x/r = 2 \cos \varphi - \cos(2\varphi) \\ y/r = 2 \sin \varphi - \sin(2\varphi) \end{cases}$$

equazioni della cardiode (come epicycloide con $m=1$)

desunte dalle equazione generale delle epicycloidi:

$$\begin{cases} x/r = [(m+1)(\cos \varphi) - \cos((m+1)\varphi)] \\ y/r = [(m+1)(\sin \varphi) - \sin((m+1)\varphi)] \end{cases}$$

Dovranno essere modificate per trovare le equazioni ordinarie della cardiode.

cominciamo col riferirsi al sistema di assi in figura,

le equazioni parametriche dell'epicicloide con $n=1$

diventano: posto: $(a=2r)$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \cos(2\varphi) - a \cos\varphi + a/2 \\ y = a \sin\varphi - \frac{a}{2} \sin(2\varphi) \end{cases}$$

ed essendo: $(\cos(2\varphi)+1) = 2\cos^2\varphi$

$$\begin{cases} x = a \cos^2\varphi - a \cos\varphi \\ y = a \sin\varphi - a(\sin\varphi \cos\varphi) \end{cases}$$

equaz.
della Cardioid
riferita agli assi
in figura.

$$\begin{cases} y = a \sin\varphi (1 - \cos\varphi) \\ x = -a \cos\varphi (1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

dividendo membro a membro $\frac{y}{x} = \tan\varphi = -\tan\theta$

elevando a quadrato e sommando:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 (1 - \cos\varphi)^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = a^2 (1 - \cos\varphi)^2$$

avremo quindi $\boxed{\theta = -\varphi; \rho = a(1 - \cos\varphi)}$

$$\sin\varphi = -\sin\theta; \cos\varphi = \cos\theta; x = \rho \cos\theta; y = \rho \sin\theta$$

$$(1 - \cos\varphi)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \text{ da cui: } \cos\varphi = 1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} \text{ ed anche:}$$

$$\frac{x}{a} = -\left(1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}\right) \left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}\right)$$

$$\frac{x}{a} = -\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} + \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right)$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \frac{x}{a}\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} \text{ da cui}$$

$$\boxed{(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)}$$

equazione: della
cardioid
in
cartesiane.

Equazioni della cardioidi
in coordinate polari:

$$\rho = \begin{cases} a(1 + \cos\theta) = \overline{OP} \\ a(1 - \cos\theta) = \overline{OP_1} \end{cases}$$

La lunghezza della cardioidi:

$$L = 8 \left(\frac{n+1}{n} \right) r \quad \text{ove } n=1$$

$$L = 16r$$

La cardioidi può anche essere definita come il luogo geometrico dei punti equidistanti dall'estremo di tutte le corde di un cerchio che hanno in comune l'altro estremo; e l'equidistancia è pari al diametro del cerchio. ($\overline{AP} = \overline{AP_1} = a = 2r$).

Concoide

Dieci concoide di una curva piana, la linea ottenuta dall'estremo di un segmento di lunghezza costante (intervallo) posto sulle rette uscenti da un punto (Polo), di cui l'altro estremo è nel punto di intersezione di queste rette con la curva data (direttrice).

Per quanto sopra la cardioidi è quindi la concoide di una circonferenza (direttrice) il cui "polo" è sul cerchio, nell'origine degli assi, e l'intervallo è pari al diametro "a" del cerchio.

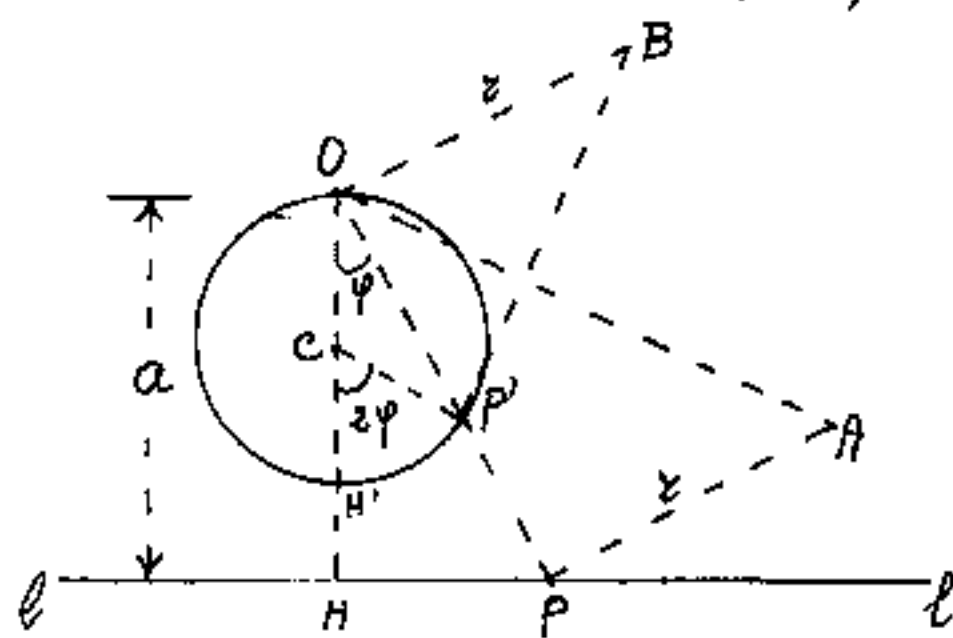
Inversione

Dicesi inversione di un insieme di punti P del piano (per esempio i punti di una linea), un altro insieme di punti P' tali che, detti: " O " il polo d'inversione, ed il segmento " r " - raggio d'inversione, si abbia:

$$(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2$$

(con \overline{OP} ed $\overline{OP'}$ misurati sulla stessa retta)

La costruzione grafica di P' , quando sono noti: O, r, P ; può farsi ricordando il secondo teorema di Euclide; per esempio: supponiamo di volere l'inversione della retta " l " e sia " O " il polo distante " a " da " l ", uniamo " O " con " P " (generico di l) e da " O " e da " P ", perpendicolarmente ad \overline{OP} , tracciamo i segmenti $\overline{OB} = \overline{PA} = r$, quindi uniamo " O " con " A ", da " B " si traccia la perpendicolare ad \overline{OA} che incontrerà in " P' " la retta \overline{OP} .



Dimostriamo che l'inversa della retta " l " è una circonferenza per " O ", con tangente in " O " parallela ad " l ".

Abbiamo $\overline{OH} = a = \overline{OP} \cos(\varphi)$;

$$\overline{OP} = a / \cos(\varphi); \quad \overline{OP'} = \frac{r^2 \cos(\varphi)}{a}; \quad \text{per } \varphi = 0 \rightarrow \cos(\varphi) = 1; \quad \frac{r^2}{2a} = \frac{\overline{OH'}}{2} = f =$$

= raggio della circonferenza, infatti: $f^2(1 + \cos(2\varphi))^2 + f^2 \sin^2(\varphi) = \overline{OP'}^2 = f^2(2 + 2\cos(2\varphi)) = 4f^2 \cos(\varphi)$; $\overline{OP'} = 2f \cos(\varphi)$; sostituendo f torna:

$$\underline{\overline{OP'} = \frac{r^2 \cos(\varphi)}{a}} \quad \text{c.v.d.}$$

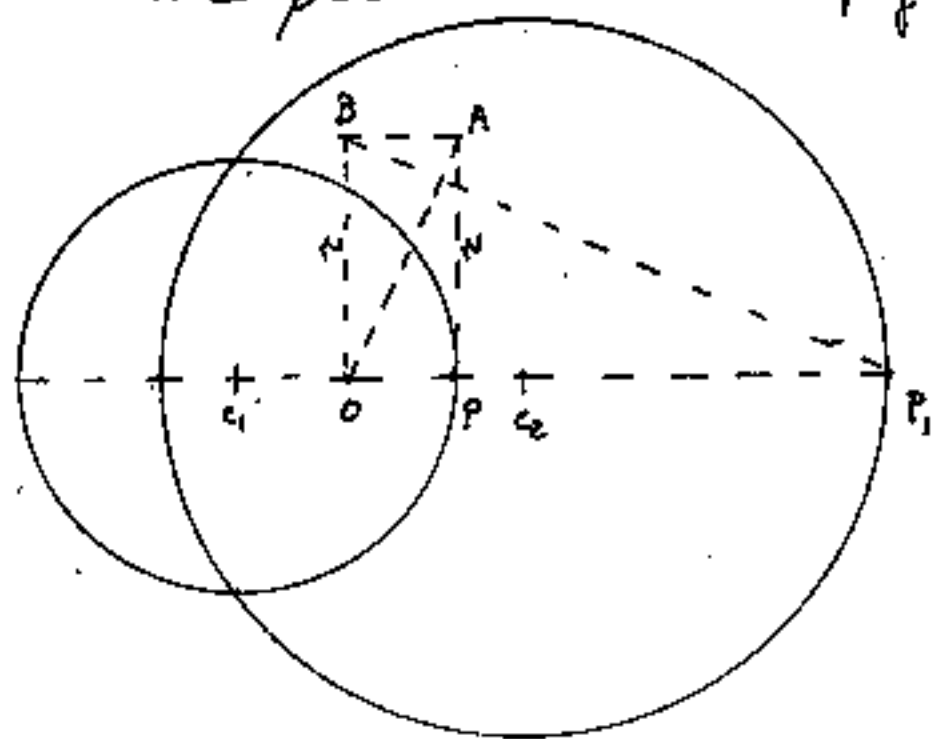
Però non possiamo dire biunivoca la corrispondenza dei punti nell'inversione, infatti non esiste il punto inverso del polo "O", punti P indefinitamente vicini ad O, determinano una direzione, nella quale c'è il corrispondente punto P', indefinitamente lontani; ma se P coincide con O, manca la direzione, ed un punto all'infinito non ha senso.

- I punti di una circonferenza di raggio r , rimangono se stessi se il polo è il centro.

- Le rette uscenti dal polo O, rimangono se stesse, anche se diversamente punteggiate.

- Abbiamo visto che ad un cerchio passante per O corrisponde una retta parallela alla tangente in O ove $a = \frac{r}{2\rho}$ è la distanza delle rette parallele, ρ il raggio del cerchio ed r il raggio d'inversione.

Ad un cerchio non passante per O corrisponde un cerchio non passante per O.



In figura abbiamo preso O interno

alla circonferenza.

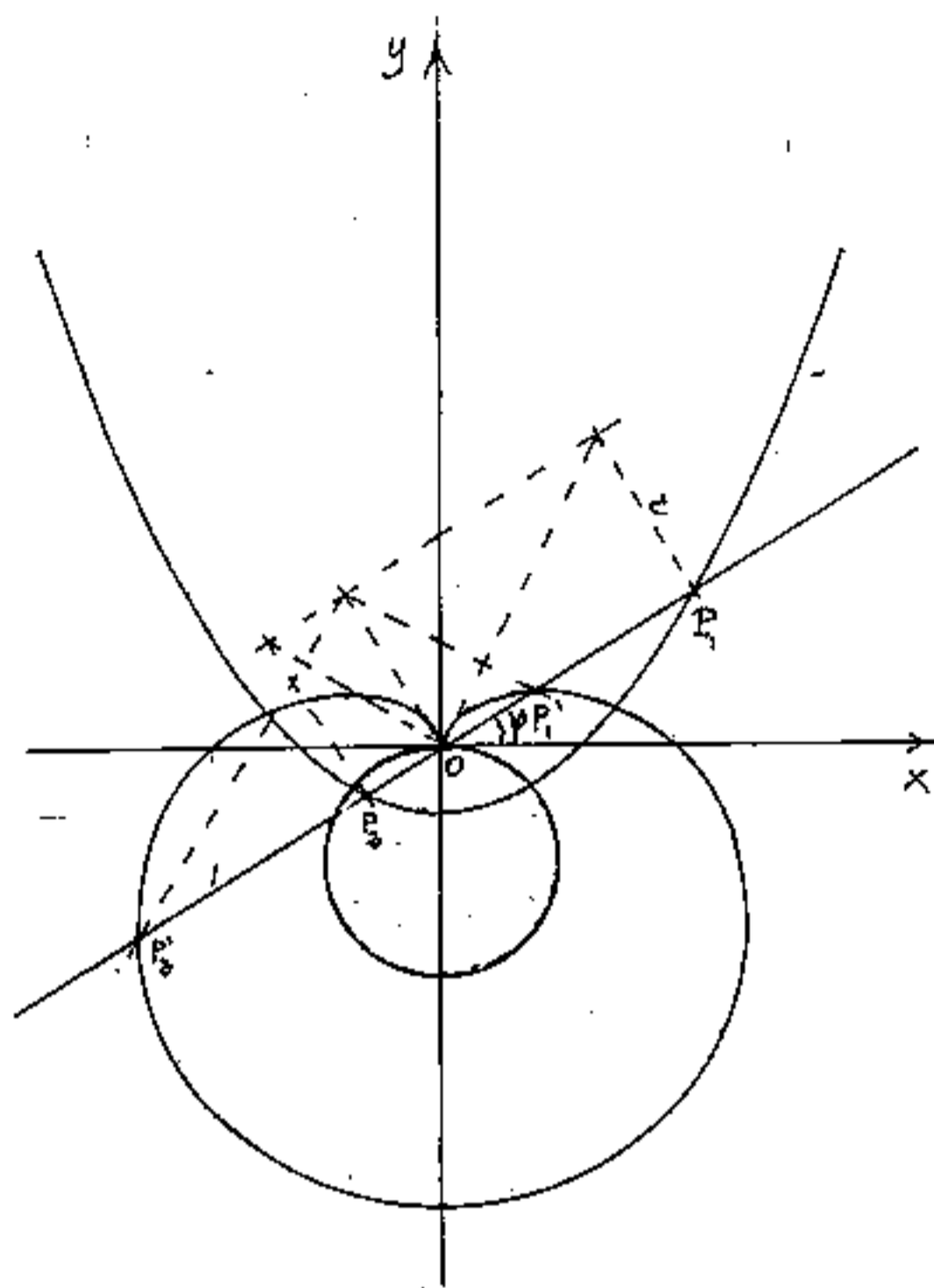
L'angolo formato da due linee è uguale a quello delle linee corrispondenti, cioè la

trasformazione è conforme. Se poniamo in O l'origine

delle coordinate $P \equiv (x, y)$; $P' \equiv (x', y')$ avremo:

$x' = \frac{xr^2}{x^2 + y^2}$	$y' = \frac{yr^2}{x^2 + y^2}$
-------------------------------	-------------------------------

L'inversione di una parabola



Sia "r" il raggio di inversione, e poniamo il centro "O" di inversione nel fuoco della parabola. Poniamo anche l'origine degli assi nel fuoco della parabola.

L'equazione della parabola riferita a tali assi sarà:

$$y = \frac{x^2}{4a} - a$$

ove "a" è la distanza del fuoco dal vertice della parabola.

Tracciamo per "O" una retta qualsiasi, di equazione: $y = x \tan(\varphi)$ con "φ" variabile arbitraria.

Questa retta incontrerà la parabola in due punti: P_1 e P_2 ; le cui coordinate si ottengono facendo sistema con le due equazioni;

avremo:

$$(x \tan(\varphi)) = \left(\frac{x^2}{4a} - a \right)$$

cioè

$$x^2 - 2(2a \tan \varphi)x - 4a^2 = 0$$

$$X_p = 2a \tan \varphi \pm \sqrt{4a^2 \tan^2 \varphi + 4a^2}$$

$$X_p = 2a \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi \pm 1}{\cos \varphi} \right)$$

$$y_p = x \cdot \tan \alpha = 2a \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi \pm 1}{\cos^2 \varphi} \right) \operatorname{sen} \varphi =$$

$$y_p = 2a \operatorname{sen} \varphi \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi \pm 1}{(\operatorname{sen} \varphi + 1)(\operatorname{sen} \varphi - 1)} \right)$$

$$y_p = 2a \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \mp 1} \right)$$

Il segmento \overline{OP} di retta, compreso fra il centro "O" e la parabola è dato da:

$$\overline{OP} = x / \cos \varphi$$

cioè:

$$\overline{OP} = 2a \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi \pm 1}{\cos^2 \varphi} \right)$$

$$\overline{OP} = 2a \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi \mp 1} \right)$$

Il punto "P'" (inverso di P) correlato con "P" dalla relazione d'inversione:

$$\overline{OP'} = r^2 / \overline{OP}$$

cioè:

$$\overline{OP'} = \frac{r^2}{2a} (\operatorname{sen} \varphi \mp 1)$$

arco per coordinate cartesiane; (in quanto insiste sulla stessa retta di P e dalla stessa banda rispetto ad O):

$$\begin{cases} X_{P'} = \overline{OP'} \cos \varphi \\ Y_{P'} = \overline{OP'} \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{P'} = \left(\frac{r^2}{2a}\right) (\operatorname{sen} \varphi \mp 1) \cos \varphi \\ Y_{P'} = \left(\frac{r^2}{2a}\right) (\operatorname{sen} \varphi \mp 1) \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

elevando a quadrato e sommando si ha:

$$X_{P'}^2 + Y_{P'}^2 = \left(\frac{r^2}{2a}\right)^2 (\operatorname{sen} \varphi \mp 1)^2$$

$$(\operatorname{sen} \varphi \mp 1) = \left(\frac{2a}{r^2}\right) \sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}$$

$$(\operatorname{sen} \varphi) = \left(\frac{2a}{r^2}\right) \left(\sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}\right) \mp 1$$

$$Y_{P'} \left(\frac{r^2}{2a}\right) = \left(\frac{2a}{r^2}\right)^2 (X_{P'}^2 + Y_{P'}^2) \mp \left(\frac{2a}{r^2}\right) \sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}$$

dividendo tutto per $\left(\frac{2a}{r^2}\right)^2$ e separando la radice si ha:

$$(X_{P'}^2 + Y_{P'}^2) - \left(\frac{r^2}{2a}\right) Y_{P'} = \left(\frac{r^2}{2a}\right) \sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}$$

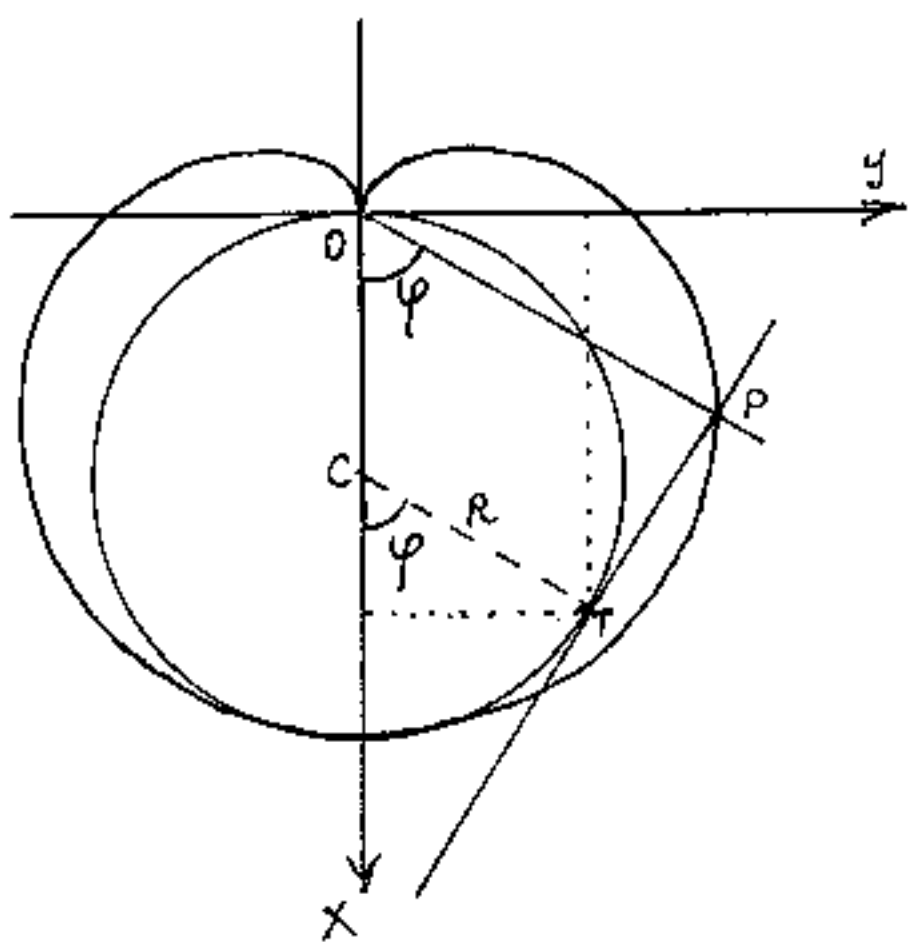
ponendo: $\left(\frac{r^2}{2a}\right) = \kappa$ (= diametro delle circonferenze dell'epicicloide), ed elevando a quadrato si ha:

$$\left[X_{P'}^2 + Y_{P'}^2 - \kappa Y_{P'} \right]^2 = \kappa^2 (X_{P'}^2 + Y_{P'}^2)$$

equazione della cardioidi.

Sulla base di quanto ora dimostrato possiamo definire la Cardioide come l'inversa di una parabola che abbia il centro di inversione nel fuoco e per raggio d'inversione $\rho = \sqrt{2a \cdot k}$ la media geometrica fra la doppia distanza del fuoco dal vertice nella parabola ed il diametro delle circonferenze che generano la cardioide come "epicicloide" con $n=1$.

La podaria di un cerchio



Ricordiamo che diciamo podaria di una curva piana, il luogo dei piedi delle normali, alle rette tangenti alla curva, condotte da un punto O.

Assumiamo "O" come origine degli assi, per cui le rette uscenti da O avranno per equazione: $y = \tan(\varphi) x$

mentre le rette ad esse normali avranno per equazione: $y = -\frac{x}{\tan(\varphi)} + \rho$

queste ultime dovranno essere tangenti al nostro cerchio.

Scegliamo il cerchio di equazione:

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$

avente il centro $C \equiv (R; 0)$ sulle ascisse.

Le coordinate del punto T di tangenza, (essendo il raggio in T parallelo alla retta per l'origine) saranno:

$$x_T = R(\cos\varphi + 1); \quad y_T = R\sin\varphi$$

queste coordinate dovranno soddisfare la retta tangente, per cui:

$$q = y_T + x_T \operatorname{tang}(\varphi) = R\sin\varphi + R(\cos\varphi + 1) \operatorname{tang}(\varphi)$$

$$q = R \frac{(\sin^2\varphi/\cos\varphi + \cos\varphi + 1) \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$q = R \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$q = R \frac{(1 + \cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

L'equazione delle rette tangenti al cerchio:

$$y = \frac{-x \cos\varphi}{\sin\varphi} + R \frac{(1 + \cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

Facendo sistema con le rette per l'origine ad esse normali, troviamo le coordinate dei punti P piedi delle normali alle tangenti la circonferenza, cioè la Podaria.

$$\frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} x = -\frac{\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} x + \frac{R(1+\cos\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$(\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2\varphi)x = R \cos\varphi(1+\cos\varphi)$$

per cui:

$$\begin{cases} x = R \cos\varphi(1+\cos\varphi) \\ y = R \operatorname{sen}\varphi(1+\cos\varphi) \end{cases}$$

equazioni parametriche di una cardioida

elevando a quadrato e sommando:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2}} = (1 + \cos\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2}} - 1 \right)$$

$$x = R \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2}} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2}} \right)$$

$$xR = x^2 + y^2 - R\sqrt{x^2 + y^2}$$

cioè:

$$(x^2 + y^2 - xR)^2 = R^2(x^2 + y^2)$$

equazione cartesiana di una cardioida

Perciò possiamo definire la cardioida come la podaria di una circonferenza rispetto ad un punto della circonferenza stessa.

AREA della CARDIOIDE

L'area delle epicicloidi è $A = r^2(n+1)(n+2)\pi$ con $n=1$

diventa: $A = 6r^2\pi$ L'area della cardioida è sei volte l'area del cerchio generatore.

LA LUMACA di PASCAL

La cardioid è un caso particolare della Lumaca di Pascal, infatti l'equazione cartesiana della Lumaca di Pascal è:

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

ove ponendo: $(b=a)$ otteniamo l'equazione della cardioid.

Analogamente a quanto detto per la cardioid, possiamo definire la Lumaca di Pascal:

La Podaria di un cerchio di raggio a rispetto ad un punto che dista b dal centro del cerchio.

La Concoide di un cerchio di diametro b passante per il punto P (polo) e con "intervallo" a . ecc.

Naturalmente al variare del rapporto a/b varia la configurazione della Lumaca di Pascal.

Se nell'equazione cartesiana, sostituiamo: $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $(x^2 + y^2) = \rho^2$; otteniamo:

$$(\rho^2 - b\rho \cos \varphi)^2 = a^2 \rho^2$$

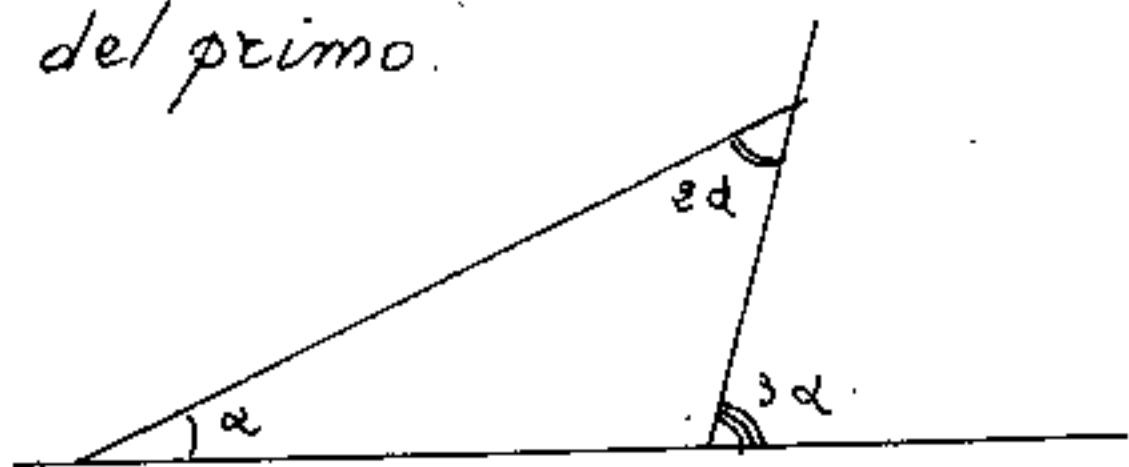
$$\rho^2 - b\rho \cos \varphi = a\rho \quad \text{dividendo per } \rho$$

$$\rho = b \cos \varphi + a$$

Equazione della Lumaca di Pascal in coordinate polari.

Curva trisettrice dell'angolo

Un modo per affrontare il problema della trisezione di un angolo, (problema già proposto fin dall'antichità, e a tutt'oggi non risolto, perché non è possibile, col solo ausilio della riga e del compasso, risolverlo) è quello di considerare un triangolo che abbia un angolo doppio dell'altro, l'angolo esterno essendo la somma dei due è il triplo del primo.



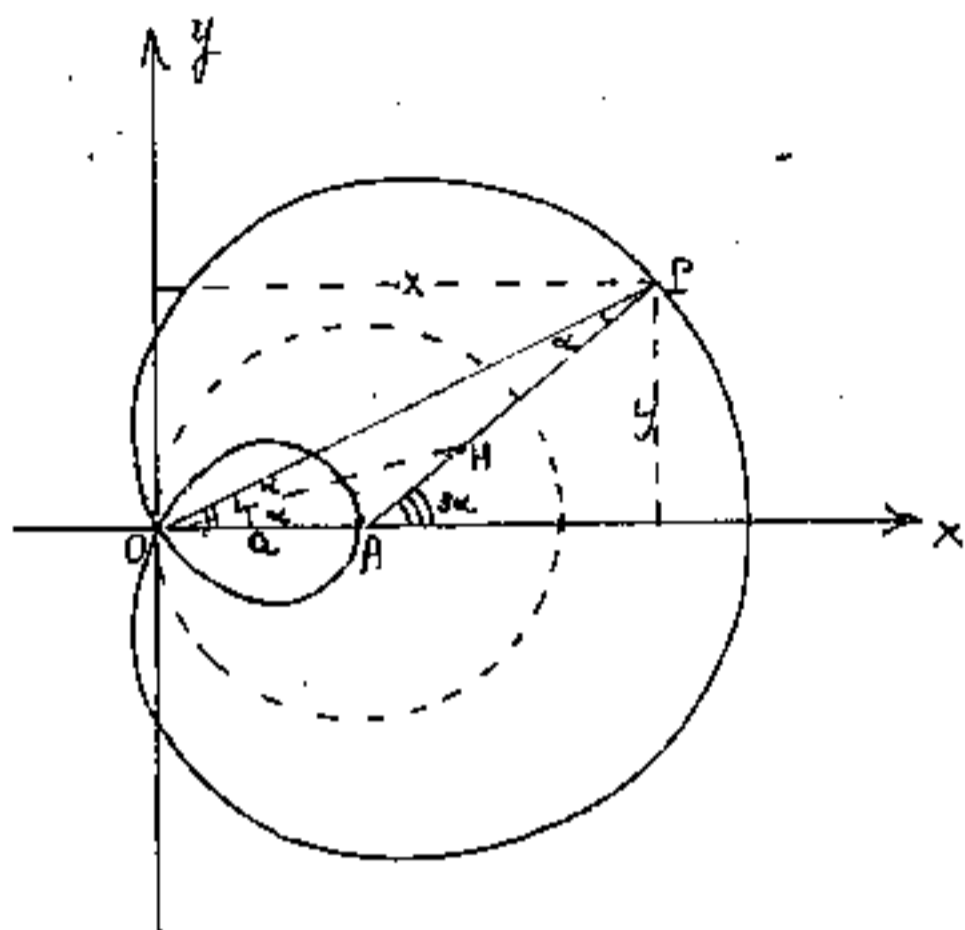
se nel triangolo, anche il terzo angolo è doppio del secondo, avremo: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $2\alpha = \frac{3\pi}{4}$;

$3\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ed abbiamo il problema dell'ettagono, che abbiamo già trattato (v. vol. I).

Consideriamo ora la curva luogo geometrico dei punti P tali che dati i punti O ed A nel triangolo AOP, l'angolo in O sia doppio di quello in P.

Poniamo gli assi cartesiani con l'origine in O ed il lato \overline{OA} del triangolo OAP sulla retta delle ascisse. Dal centro tracciamo una retta qualsiasi inclinata di α , e

dal punto A una retta inclinata di $\frac{3}{2}\alpha$; il punto comune a queste due rette è un punto P del luogo geometrico cercato.



Conduciamo la bisettrice dell'angolo \hat{AOB} e sia H il punto d'incontro su \overline{AP} , si ha: $\hat{OPA} = \alpha = \hat{HOP} = \hat{AOH}$;
 $\hat{OHA} = \hat{POA} = 2\alpha$; $\hat{OAH} = \hat{OAP}$.

Perciò i triangoli:

OAH ed PAO sono si-

mili: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{HO}}$ da cui: $\overline{AH} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AP}}$

$\overline{OH} = \overline{HP} = \frac{(\overline{AO})(\overline{PO})}{\overline{AP}}$ $\overline{AH} + \overline{HP} = \overline{AP} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AP}} + \frac{(\overline{OA})(\overline{OP})}{\overline{AP}}$

per cui: $\overline{AP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}\overline{OP}$; ed anche:

$$\boxed{AP^2 = OA(OA + OP)}$$

riferendosi alle coordinate di P abbiamo:

$$\overline{AP}^2 = (x-a)^2 + y^2 = a(a + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = a^2 + a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)}$$

Equazione della Lemniscata di Pascal ove

$b = 2a$. Cioè se nell'equazione della Lemniscata di

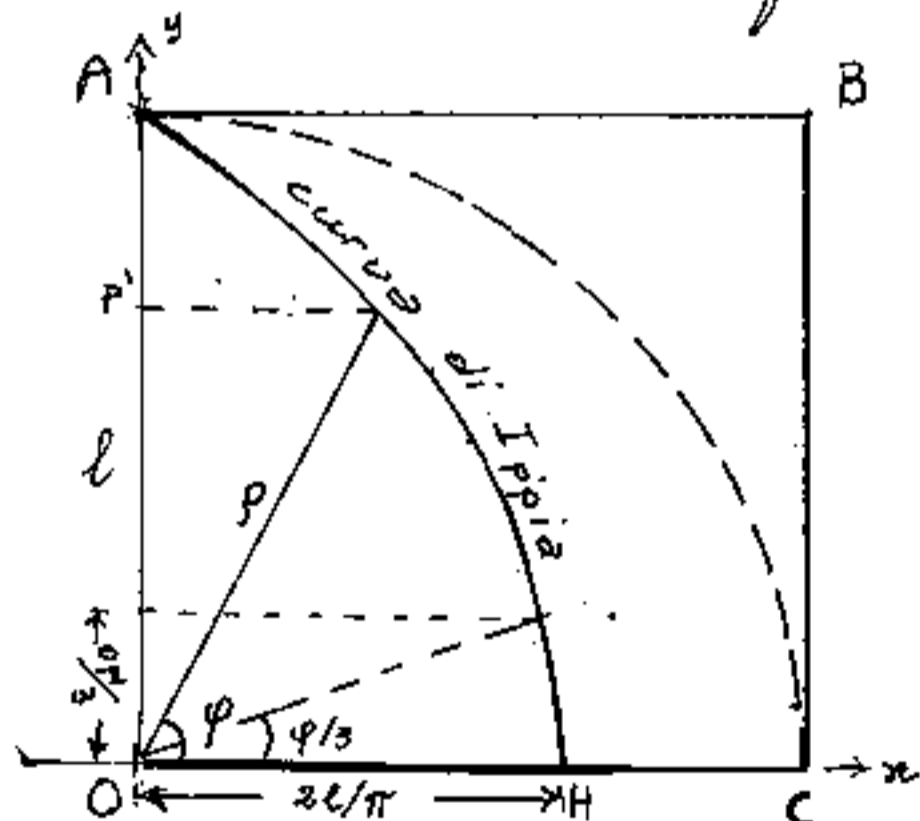
Pascal si pone $b = 2$ si ottiene la curva trisettrice.

dell'angolo $\hat{PAX} = 3 \hat{OPA}$.

La quadratrice di Ippia

Anche la curva detta quadratrice di Ippia (fu trovata da Ippia da Elide nel 420 a.C.) era nata come trisettrice, e fu detta quadratrice perché si prestava alla quadratura del cerchio (da altri fu detta di Ippia o di Dinostrato). Altre curve trisettrici sono state esposte al seguito del folium di Cartesio. (Trisettrice di Maclaurin; cissoide o curva di Diocle).

Consideriamo un quadrato di lato l e vertici $O A B C$. Siano fissi i lati \overline{OC} e \overline{BC} , mentre \overline{OA} ruota intorno ad O fino a sovrapporsi ad \overline{OC} , contemporaneamente \overline{AB} scivola parallelamente a se stesso fino a sovrapporsi ad \overline{OC} .



Il punto comune ai due lati mobili descrive la curva di Ippia. Mentre il lato \overline{OA} descrive un arco pari a $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ il lato \overline{AB} si sposta di l .

perciò se invertiamo il moto e consideriamo il lato \overline{OC} che sdoppiato uno sale parallelamente l'altro ruota intorno ad O avremo: $\overline{OP'} : \overline{OA} = \widehat{POC} : \widehat{AOC}$ cioè: $y : l = \varphi : \frac{\pi}{2}$; poniamo: $\varphi = m\left(\frac{\pi}{2}\right)$, avremo:

(gli assi x, y gli abbiamo posti così per comodità di linguaggio)

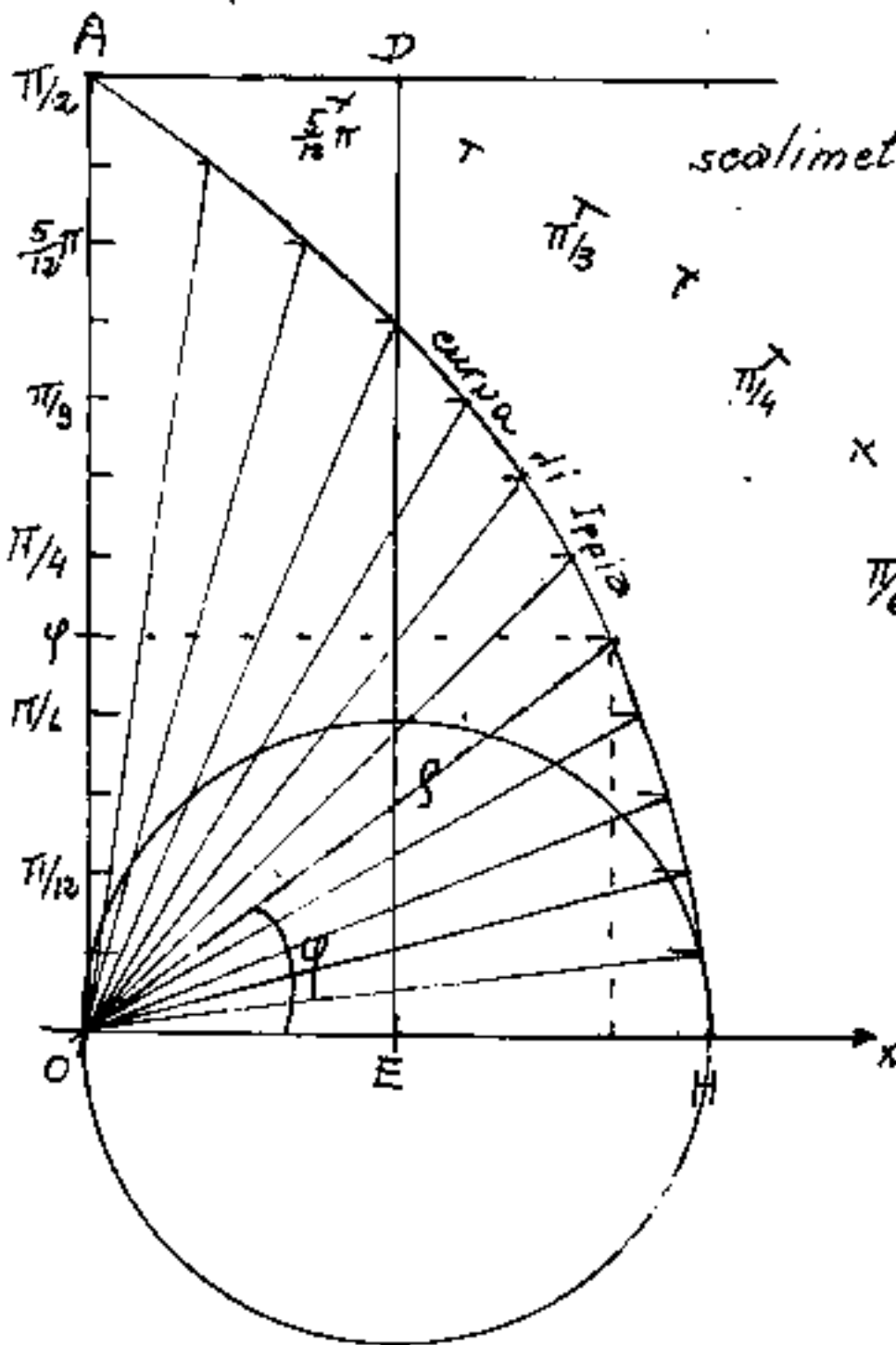
anche: $y = ml$; $y = l \cdot \varphi / \pi/2$; cioè: $\frac{y}{\varphi} = \frac{l}{\pi/2} = \text{cost.}$

$\frac{l}{\pi/2} = \overline{OH}$. (condizione limite) ; $x = \rho \cos(\varphi)$

$\overline{OP'} = \varphi(\overline{OH}) = \varphi(\text{cost.}) = y$ cioè la curva di Toppia
riportata in misura lineare in y la misura angolare
 φ . Se quindi in opportuna scala prendiamo
 $l = \pi/2$ avremo il valore in radianti di φ
sulle y .

Lo sfrazionamento di un angolo si riduce allo
sfrazionamento di un segmento.

Se \overline{OH} è il diametro di un cerchio, l è la
semicirconferenza rettificata.



scalometro: 1:200 (dm)

Il rettangolo OADE
è equivalente al cerchio
di diametro \overline{OH} .

$$\rho = (y / \sin(\varphi))$$

$$\rho = \left(\frac{l}{\pi/2}\right) \frac{\varphi}{\sin(\varphi)}$$

Equaz. in polari,

che può scriversi

$$\rho \cdot (\cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)) = (\text{cost.})$$

Notiamo inoltre che nella curva di Ippia:

$x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi = f(x)$ avremo (come per tutte le curve) che: $f(x)/x = \tan \varphi = \text{tang}(\varphi)$

$$\boxed{y = \frac{l}{\pi/2} \varphi} ; \boxed{x = \frac{l}{\pi/2} \varphi \cdot \text{tang} \varphi} \quad (\text{equazioni parametriche in } \varphi)$$

ove solo utilizzando operatori speciali è possibile esplicitare la y . Infatti mentre la x è esplicitabile:

$$x = \frac{l}{\pi/2} \left(\frac{\pi/2}{l} y \right) \left(\text{tang} \left(\frac{y \cdot \pi/2}{l} \right) \right)$$

$$\boxed{x = y \text{ tang} \left(\frac{y \cdot \pi}{2l} \right)}$$

se indichiamo con

$$\mathcal{P}f(x) = (f(x))(x) \quad (\text{operatore del Brogi})$$

avremo:

$$y \cdot \text{tang}(\varphi) = \mathcal{P} \text{tg} \varphi = \frac{x \pi}{2l} \Rightarrow \varphi = \text{arg} \mathcal{P} \text{tg} \left[\frac{\pi x}{2l} \right]$$

$$\boxed{y = \frac{l}{\pi/2} \left(\text{arg} \mathcal{P} \text{tg} \left[\frac{\pi x}{2l} \right] \right)}$$

Poiché la curva di Ippia è detta anche di Dinastrato, riportiamo come viene presentata la curva quadrottrice di Dinasttrato.

Quadratrice di Dinostrato

Diconsi quadratrici quelle linee trascendenti che permettono la quadratura del cerchio o la rettificazione della circonferenza.

Il problema della quadratura del cerchio è antichissimo (Dinostrato - geometra Greco, amico di Platone IV sec a.C) ed essendo impossibile risolverlo col solo ausilio della riga e del compasso il problema divenne addirittura proverbiale per le cose impossibili. Dante stesso nell'ultimo canto del Paradiso alla conclusione scrive: (versi 133 e 59) :

«Qual è 'l geometra che tutto s'offige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io»

La quadratrice di Dinostrato può pensarsi generata da un punto mobile M tale che la proiezione di M su un'asse a partire da un'origine O ; $\overline{OM} = \rho$ (sarebbe la nostra $x = \rho \cos \theta$) stia ad un segmento fisso \overline{OD} come l'angolo che la normale per O (il nostro y) forma con \overline{OM} sta all'angolo retto \widehat{BOD} : $\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \frac{\widehat{BOM}}{\widehat{BOD}} \right)$ ove B e D sono punti fissi! Noi riportiamo il discorso in comode coordinate cartesiane ponendo: $\overline{OD} = a$; $\widehat{BOD} = \frac{\pi}{2}$; avremo:

$$\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{arccotg} \frac{y}{x}}{\pi/2} \quad \text{cioè:} \quad \frac{x\pi}{2a} = \operatorname{arccotg} \frac{y}{x}$$

ed anche:
$$y = x \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{2a} \right)$$

Equazione cartesiana della quadritrice di Dinostrato

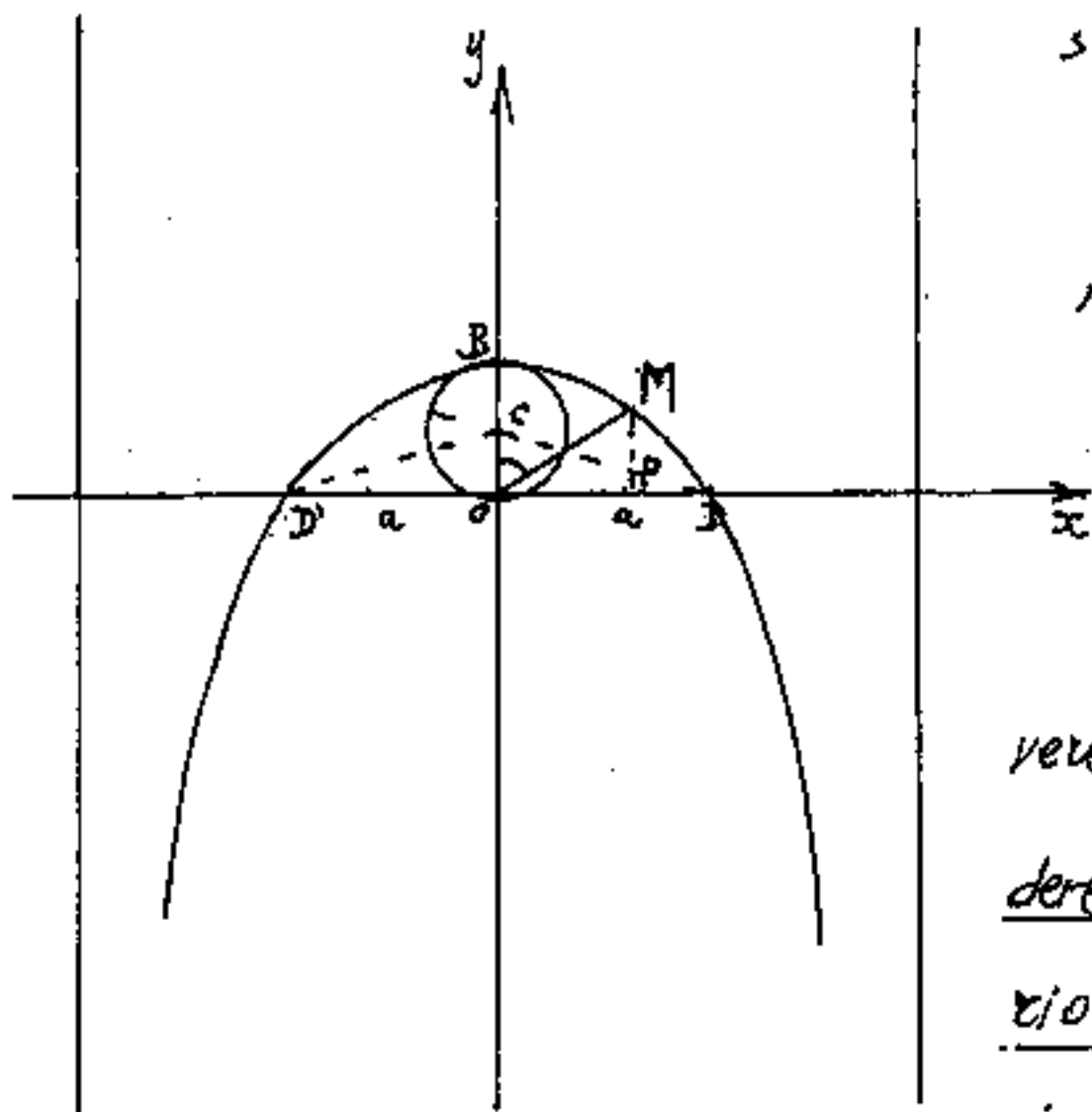
$$\overline{OB} = \frac{2a}{\pi}$$

In figura abbiamo posto: $\widehat{BOM} \approx 1 \text{ rad}$.

Data la proporzionalità:

$$\frac{\overline{OP}}{a} = \frac{\widehat{BOM}}{\pi/2}$$

La curva può risolvere il problema di dividere l'angolo \widehat{BOM} arbitrario in un numero qualsiasi di parti. Per \widehat{BOM}/n



basterà prendere \overline{OP}/n . Quindi può essere trisettrice dell'angolo $\widehat{BOM}/3 \rightarrow \overline{OP}/3$.

Come rettificatrice della circonferenza: $\overline{OB}\pi = 2a$

cioè la circonferenza di diametro \overline{OB} equivale al segmento $\overline{D'D} = 2a$. L'area del cerchio di diametro \overline{OB} equivale l'area del triangolo: $D'CD$.

In coordinate polari l'equazione diventa:

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta} \left(1 - \frac{2\theta}{\pi} \right) \quad \rho = \frac{\overline{OB}}{\cos \theta} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

Concoidi

Si definiscono concoidi quelle linee ottenute riportando segmenti uguali ed opposti (detti "intervallo") sulle rette uscenti da un polo, a partire dai punti di intersezione, di queste rette, con una prefissata retta direttrice, distante "a" dal polo.

Come polo prendiamo l'origine degli assi "0" e come retta direttrice, una retta parallela ad un asse; per esempio: $y = a$ resta da determinare una regola per precisare l'intervallo b.

La concoide di Nicomede

Fra le concoidi, la più importante è la concoide di Nicomede (II^o sec. a. e.), curva connessa al problema di Delo, (cioè alla duplicazione del cubo e alla trisezione dell'angolo). I problemi "classici" della matematica greca sorsero da problemi astronomici (per esempio la costruzione delle meridiane solari). Si è potuto sapere che: Pappo (famoso per i teoremi che portano il suo nome) usò per la trisezione dell'angolo la concoide di Nicomede connessa ad un'opera di Diodoro (I sec. a. C.) sulle meridiane solari. (Cfr. Collectio mathematica, libro IV cap. 27).

(Cfr. O. Neugebauer: "Le scienze esatte nell'antichità", ed. Feltrinelli).

La concoide di Nicomede ha il periodo "b" costante.
 La formula in coordinate cartesiane è:

$$(y-a)^2(y^2+x^2) - b^2y^2 = 0$$

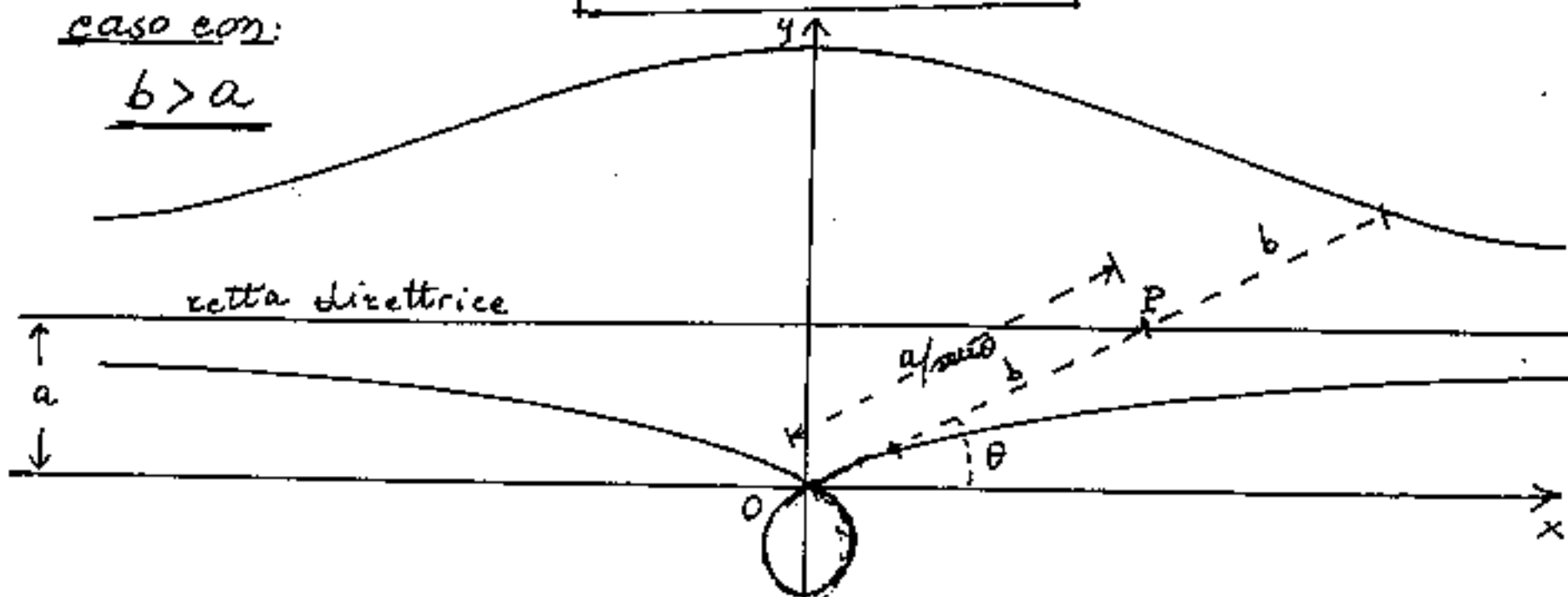
trasformata in polari:

$$(\rho \sin \theta - a)^2(\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta) - b^2 \rho^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$\rho = \frac{a}{\sin \theta} \pm b$$

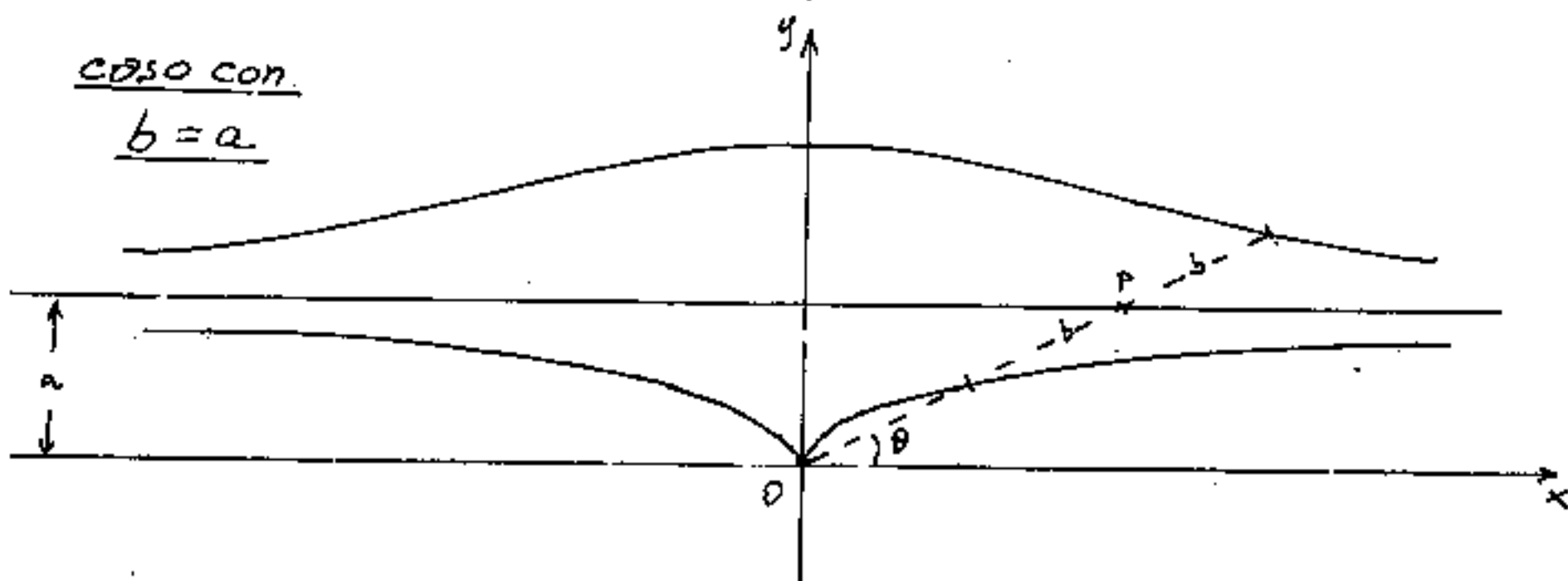
caso con:

$$b > a$$



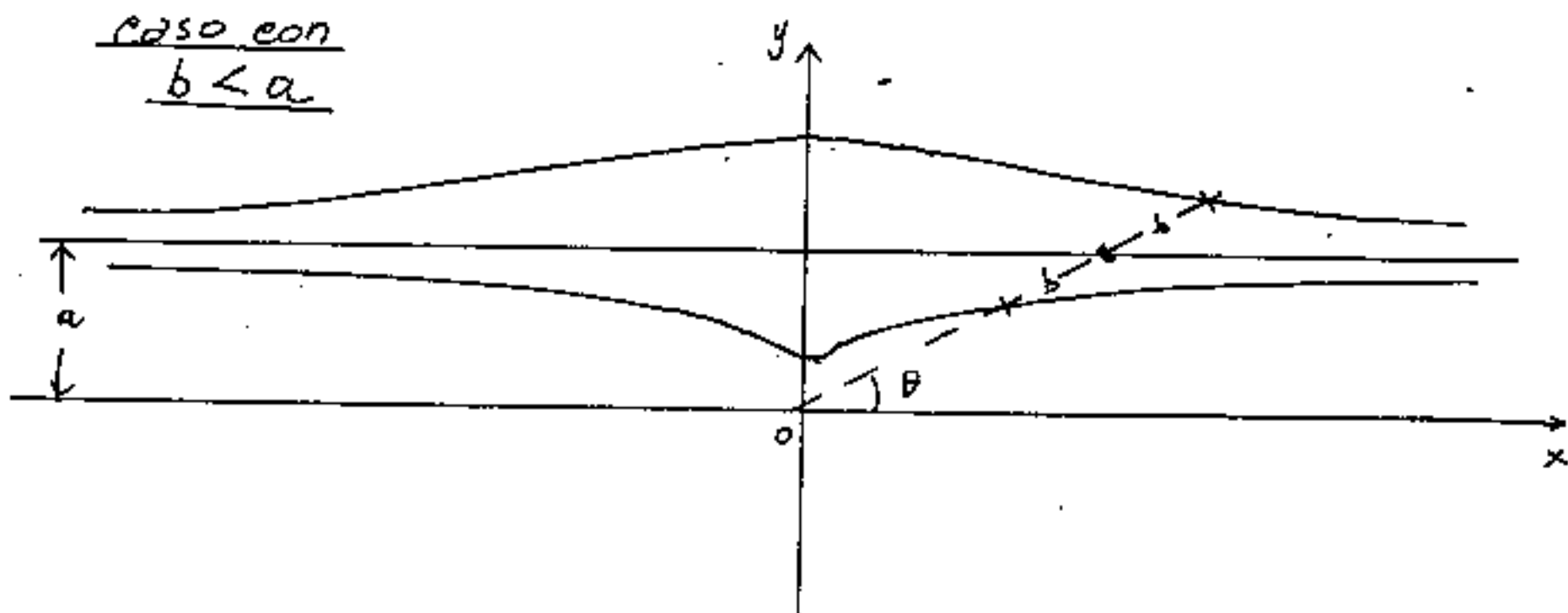
caso con:

$$b = a$$



caso con:

$$b < a$$



concoide slusiana

Nella concoide di Sluse l'intervallo non è costante per tutte le rette, ma, prefissato un segmento "b", se dal punto M di intersezione delle rette per "o" con la direttrice riportiamo l'intervallo $\overline{MP} = \overline{MP'}$ (P e P' sono i punti dei due rami della concoide) dovrà essere: $(\overline{OM})(\overline{MP}) = b^2$

Per il secondo teorema di Euclide risulta facile costruire la concoide slusiana (vedi figura) la cui equazione in cartesiane è:

$$a(y-a)(x^2+y^2) - b^2y^2 = 0$$

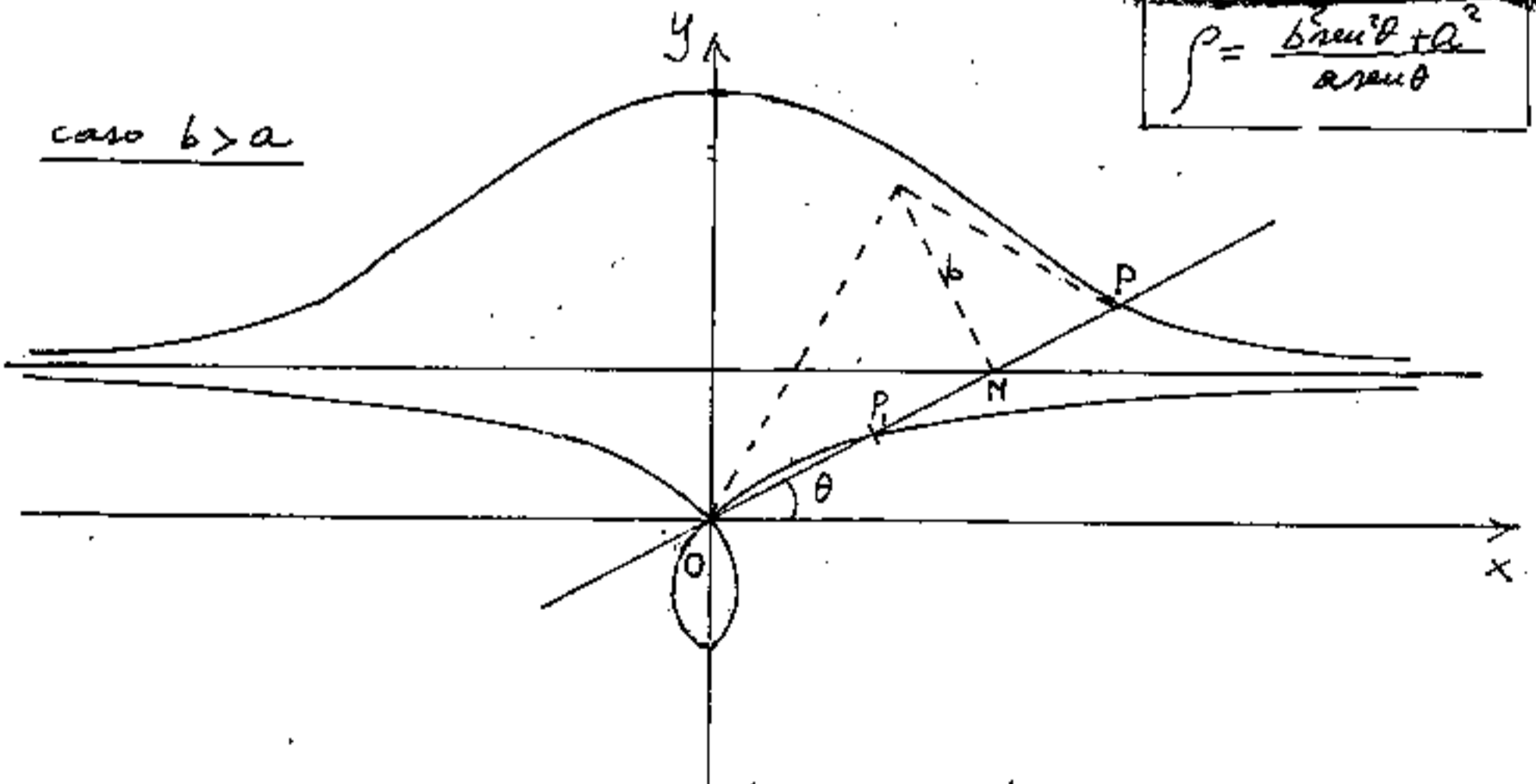
trasformando in polari:

$$a(\rho - a \cos \theta)(\rho^2) - b^2 \rho^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$\rho = \frac{b^2 \sin^2 \theta}{a \cos \theta} + \frac{a^2}{a \cos \theta}; \quad \rho = \frac{a}{\cos \theta} + \frac{b^2/a}{\cos \theta}$$

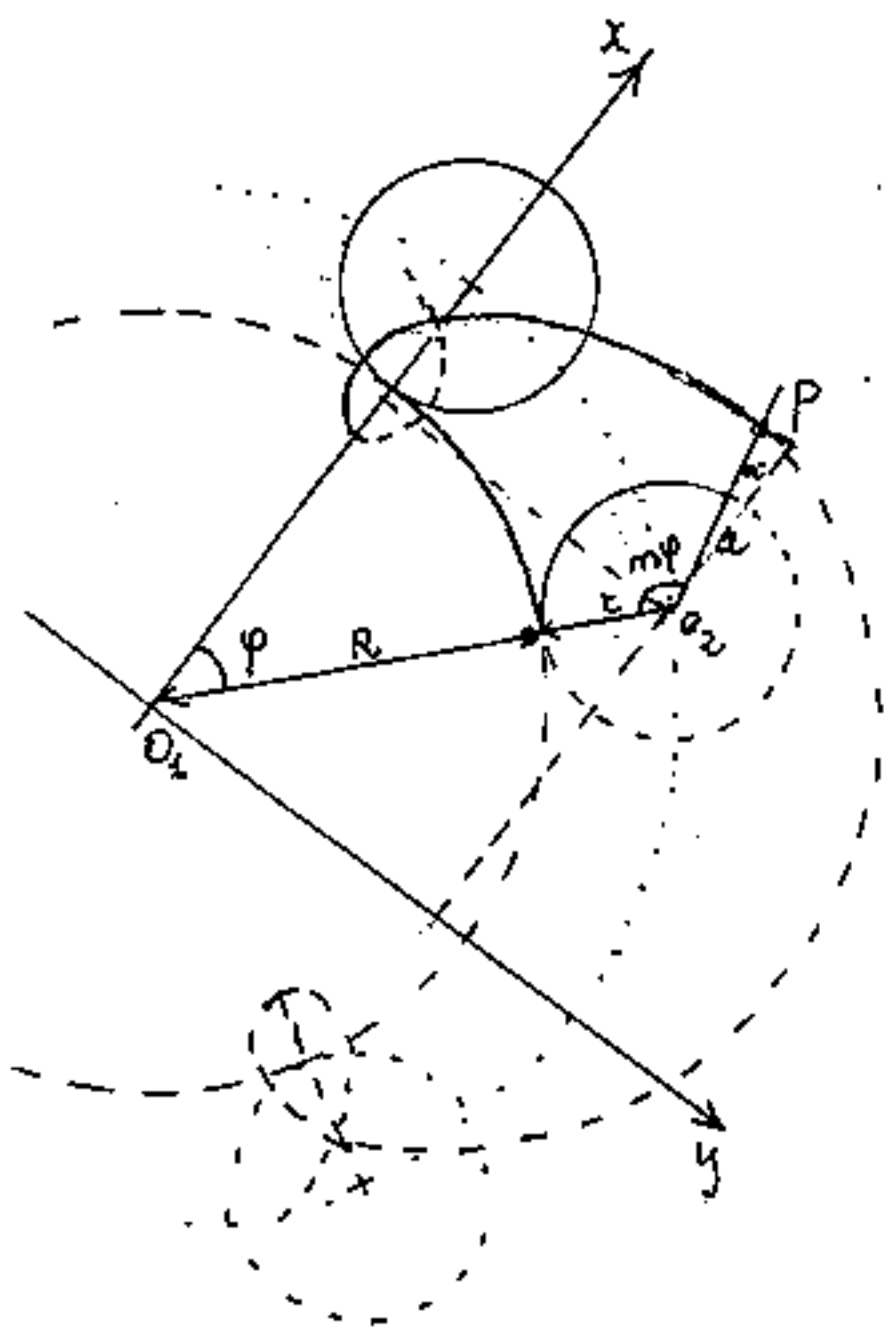
$$\rho = \frac{b^2 \sin^2 \theta + a^2}{a \cos \theta}$$

caso $b > a$



curve simili alla concoide di Nicomede.

Le epicicloidi allungate (o accorciate)



Sia R il raggio della circonferenza fissa e sia r il raggio della circonferenza mobile, ove:

$$\frac{R}{r} = n.$$

Sia " a " la distanza della punta scrivente dal centro della circonferenza mobile; cioè $\overline{O_2P} = a$ è un raggio prolungato (o accorciato) della circonferenza mobile.

Le coordinate del centro O_2 della circonferenza mobile sono:

$$\begin{cases} X_{O_2} = (R+r) \cos \varphi = r(n+1) \cos \varphi \\ Y_{O_2} = (R+r) \sin \varphi = r(n+1) \sin \varphi \end{cases}$$

poniamo $\alpha = (n\varphi + \varphi) - 180$; ($\alpha = (n+1)\varphi - 180$)

$$\sin \alpha = -\sin[(n+1)\varphi] \quad ; \quad \cos \alpha = -\cos[(n+1)\varphi]$$

$$\begin{cases} X_P = X_{O_2} + a \cos(\alpha) \\ Y_P = Y_{O_2} + a \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_P = r(n+1) \cos \varphi - a \cos[(n+1)\varphi] \\ Y_P = r(n+1) \sin \varphi - a \sin[(n+1)\varphi] \end{cases}$$

Equazione dell'epicloide allungata se $a > r$; accorciata se $a < r$

Se nell'equazione poniamo: $a = \tau m$ si ha:

$$\begin{aligned}x &= \tau \left[(m+1) \cos \varphi - m \cos(n+1)\varphi \right] \\y &= \tau \left[(m+1) \sin \varphi - m \sin(n+1)\varphi \right]\end{aligned}$$

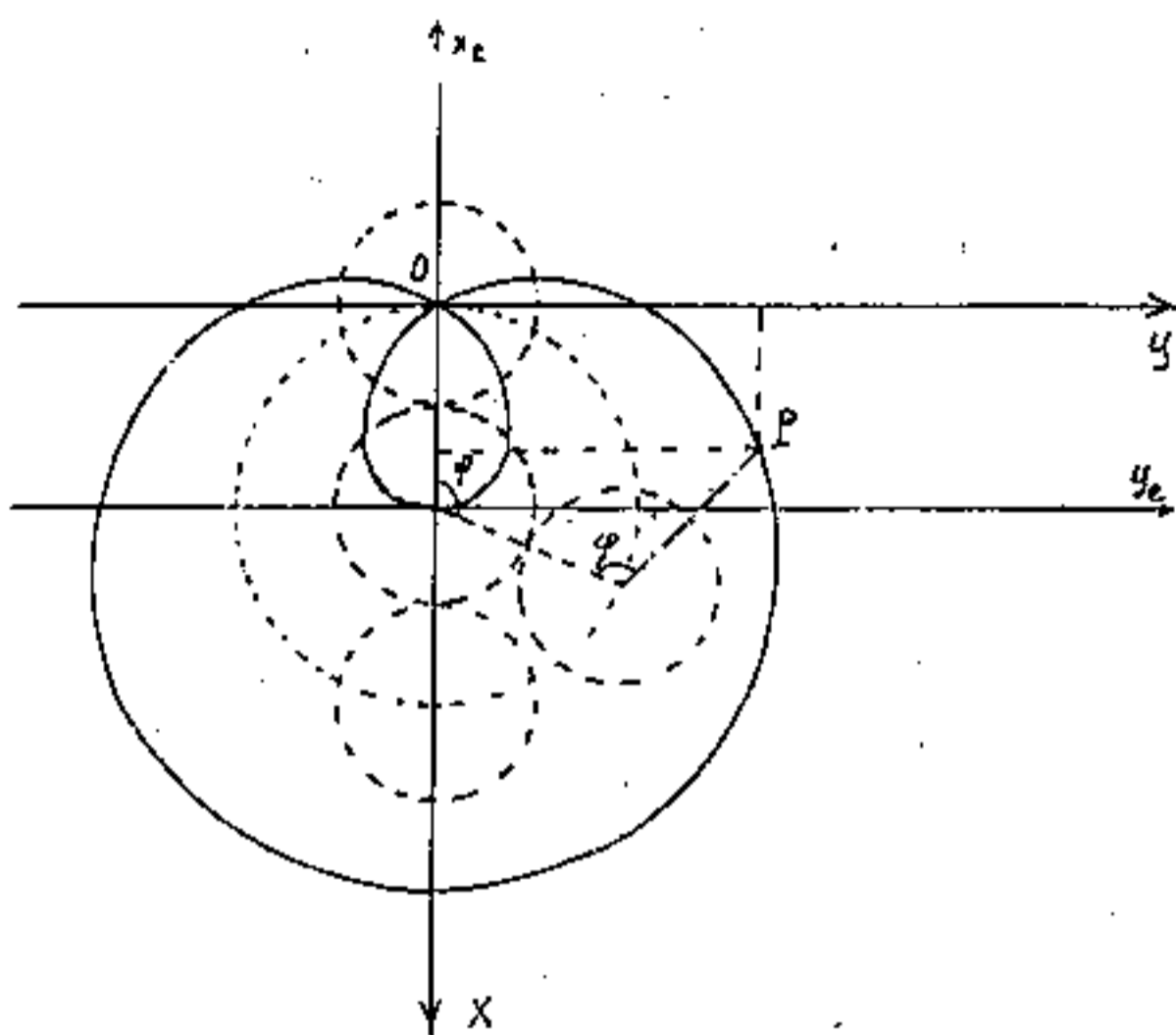
In queste equazioni " τ " = raggio della circonferenza mobile, τ rappresenta il modulo della scala grafica di rappresentazione; mentre i parametri $m = R/\tau$ ed $n = \frac{R}{\tau}$ rappresentano rispettivamente il $m =$ di curve intorno alla circonferenza fissa ed il coefficiente di allungamento o accorciamento dell'epicicloide. per $n = 1$ cioè: $R = \tau$ si ha la famiglia delle lumache di Pascal; ore, per $n = 1$ si ha il caso particolare della Cardioide.

Se poniamo $n = 1$ si ha:

$$\begin{aligned}x &= \tau (2 \cos \varphi - m \cos(2\varphi)) \\y &= \tau (2 \sin \varphi - m \sin(2\varphi))\end{aligned}$$

Equazioni parametriche delle Lumache di Pascal.

Per ritrovare le equazioni ordinarie facciamo un cambio di assi di riferimento, (come abbiamo già



fatto per la cardiode). Avremo;

indicando con x_e , y_e , le coordinate riferite agli assi delle epicicloidi, e con x, y i nuovi assi;

$$\begin{cases} X = -x_c + m\tau \\ Y = y_e \end{cases}$$

Sostituendo abbiamo:

$$\begin{cases} X = \tau [m \cos(2\varphi) - 2\cos\varphi + m] \\ Y = \tau [2\sin\varphi - m \sin(2\varphi)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X/\tau = 2m \cos^2\varphi - m \cdot 2\cos\varphi + m \\ Y/\tau = 2\sin\varphi - 2m \sin\varphi \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X/2\tau = \cos\varphi (m \cos\varphi - 1) \\ Y/2\tau = -\sin\varphi (m \cos\varphi - 1) \end{cases}$$

Equazioni parametriche delle limate di Pascal nelle nuove coordinate.

$$\frac{y}{x} = \text{tang}(\theta) = -\text{tang}(\varphi) \quad \text{per cui } \boxed{\theta = -\varphi}$$

elevando a quadrato e sommando le equazioni parametriche si ha:

$$\boxed{\left(\frac{p}{2c}\right)^2 = \left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{2c}\right)^2 = (m \cos \varphi - 1)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{m} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{2c}\right)^2} + 1 \right)$$

$$\frac{x}{2c} = \frac{1}{m} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{2c}\right)^2} + 1 \right) \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{2c}\right)^2} \right)$$

$$\frac{m}{2c} x = \left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{2c}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{2c}\right)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2cmx = 2c \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 - (2cm)x)^2 = (2c)^2 (x^2 + y^2)$$

posto: $a = (2cm)$

$b = (2c)$ si ha:

$$\boxed{(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)}$$

L'equazione cartesiana delle luniche di Pascal.

e poiché:

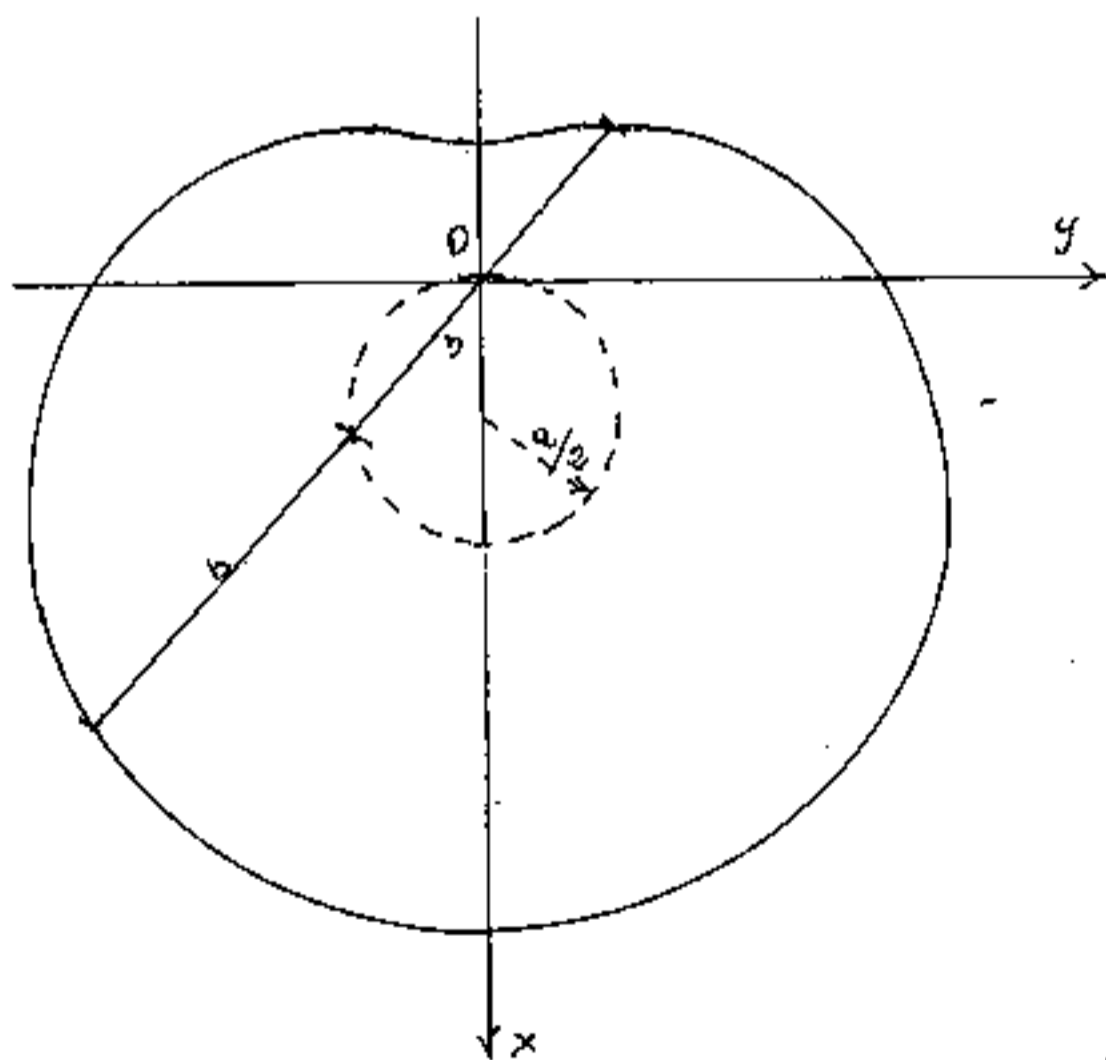
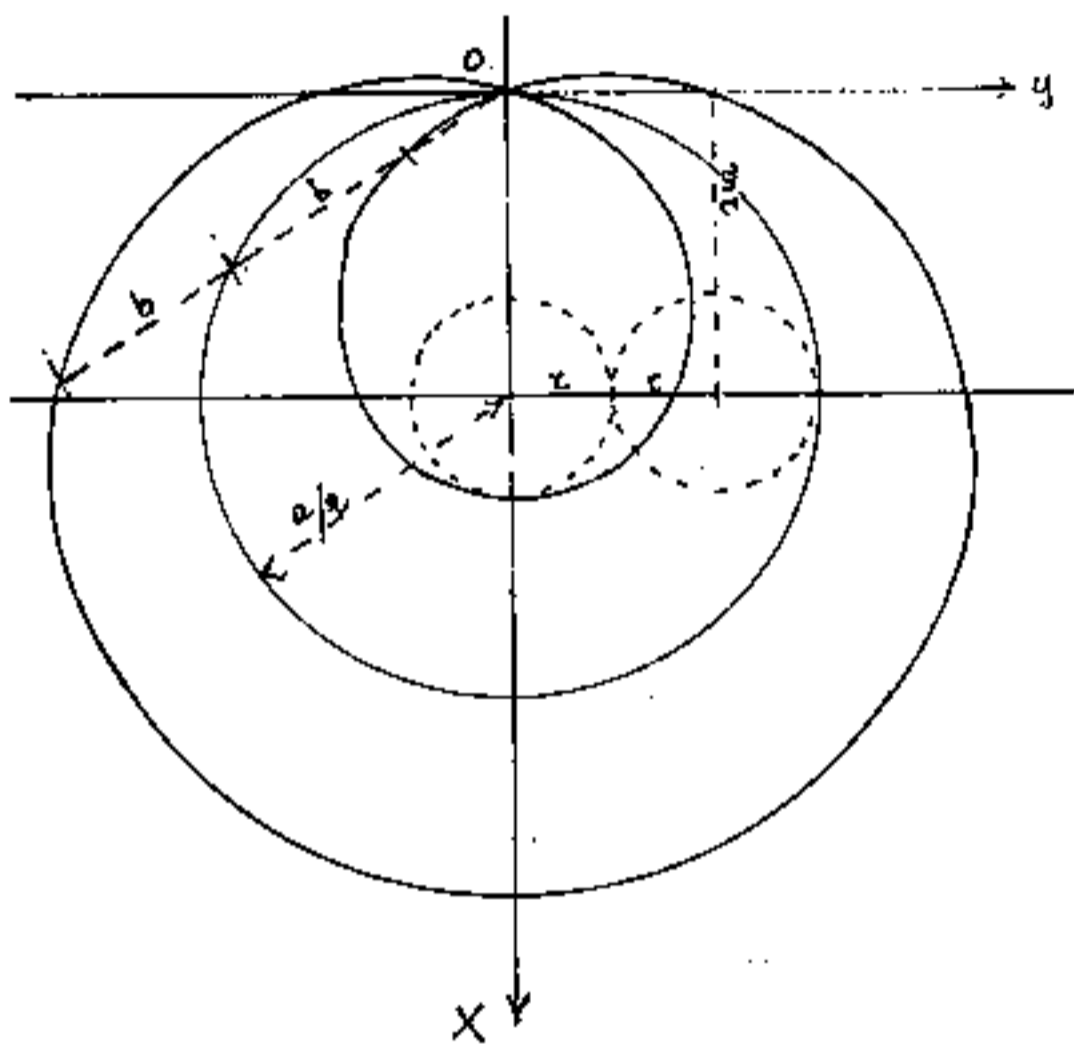
$$p = \pm (2cm \cos \varphi - 2c)$$

essendo: $\theta = -\varphi$ si ha:

$$\boxed{p = b + a \cos \theta}$$

è l'equazione delle luniche di Pascal in coordinate polari.

Con ciò resta dimostrato che le Lumache di Pascal sono delle epicicloidi con $\frac{R}{r_0} = m = 1$, allungate se $m > 1$; accorciate se $m < 1$, per $m = 1$ si ha la cardioida, con $m = 2$ si ha la curva trisettrice, che abbiamo già trattato,



nella figura a fianco abbiamo tracciato una epicicloide con $n = 1$ ed $m = 3$, cioè una Lumaca di Pascal con $\frac{a}{b} = m = 3$

$$a = 2m\tau; \quad b = 2\tau$$

Con $m < 1$, come si può vedere nella figura seguente, ove abbiamo posto $m = 1/3$, la curva non presenta più il cappio e, come epicicloide è accorciata. Spesso è conveniente disegnarla come Concoide.

La nefroide

Se nelle equazioni parametriche generali delle epicicloidi poniamo $n=2$ ed $m=1$ otteniamo una curva detta nefroide che è una epicicloide normale ($m=1$) a due arcate (essendo $n=2$).

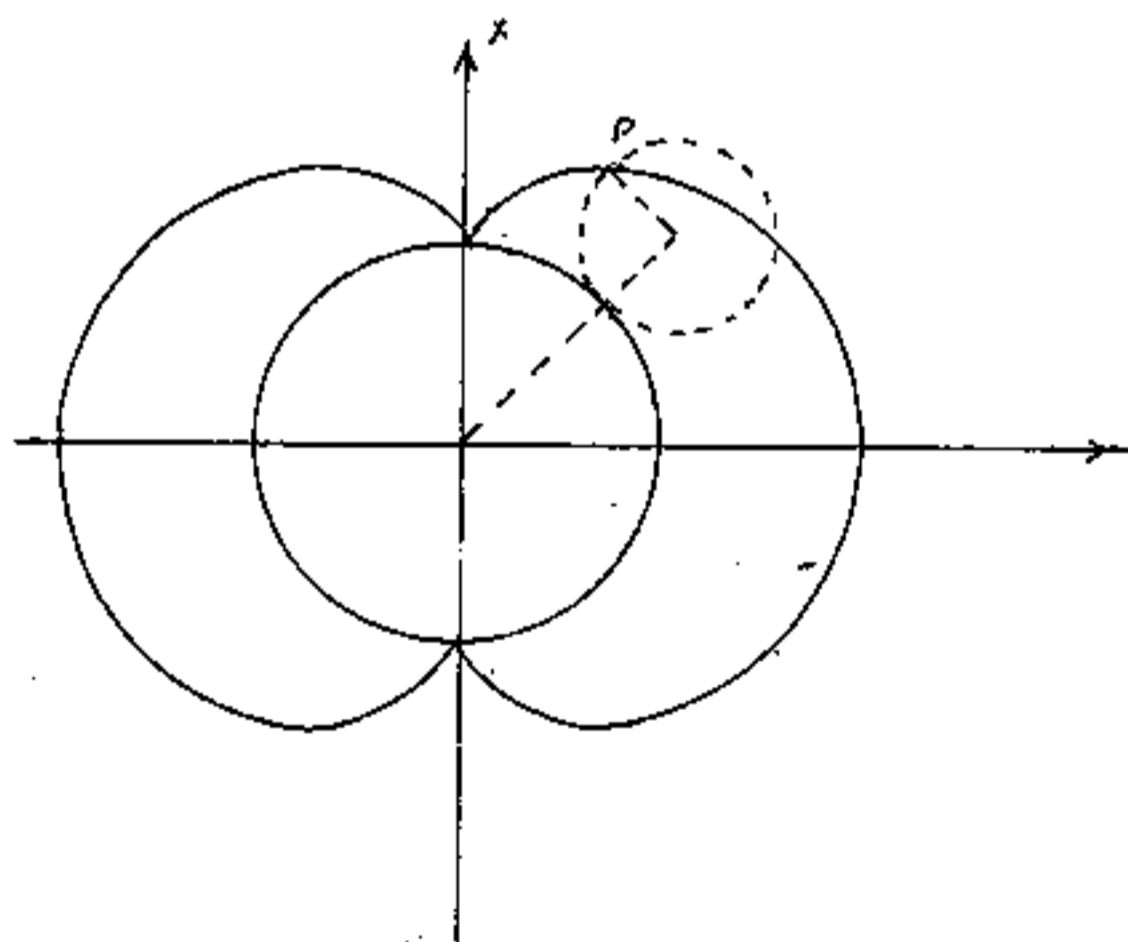
Le equazioni generali:

$$\begin{aligned}x &= r \left[(n+1) \cos \varphi - m \cos (n+1) \varphi \right] \\y &= r \left[(n+1) \sin \varphi - m \sin (n+1) \varphi \right]\end{aligned}$$

diventano:

$$\begin{aligned}x &= r \left[3 \cos \varphi - \cos (3\varphi) \right] \\y &= r \left[3 \sin \varphi - \sin (3\varphi) \right]\end{aligned}$$

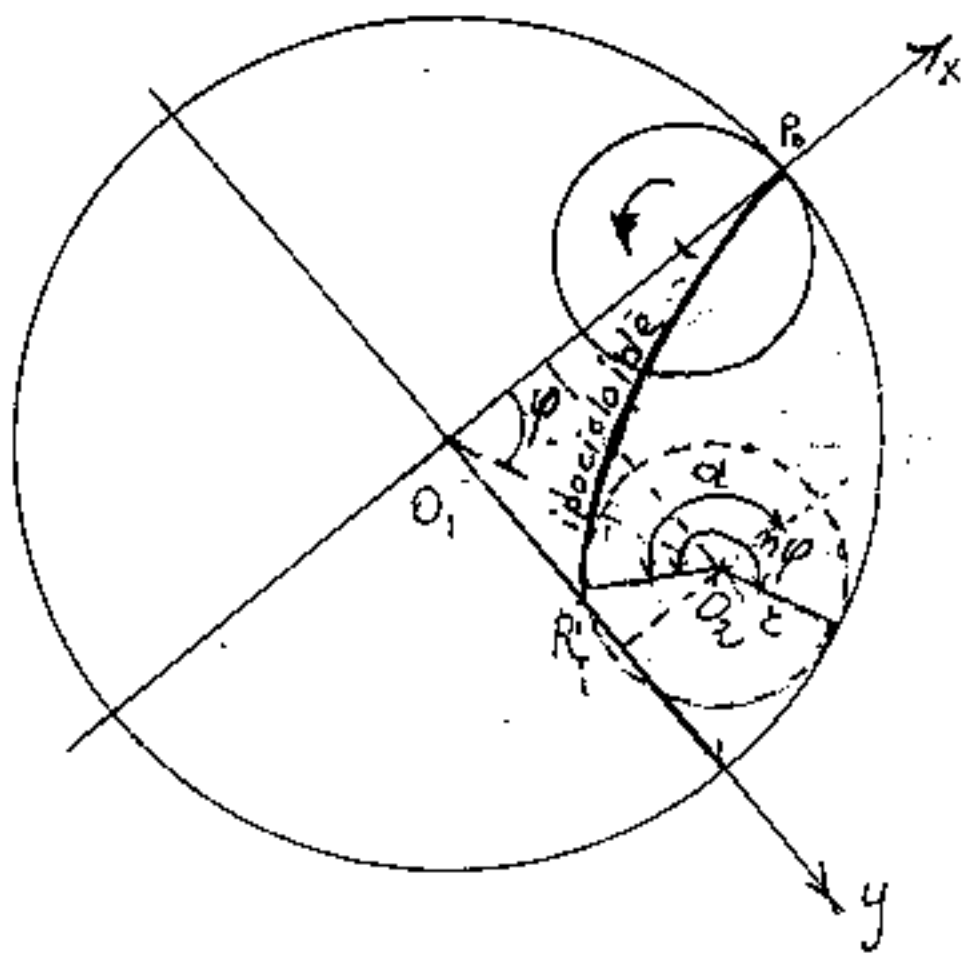
equazioni
parametriche
della
Nefroide.



Il disegno a fianco rappresenta una nefroide generata come epicicloide ordinaria con $R=2r$.

Ipocicloidi

Si dicono ipocicloidi le linee tracciate da un punto connesso ad una circonferenza mobile che rotola senza slittare internamente ad una circonferenza fissa.



Indicheremo con $n = R/r$ il rapporto fra il raggio R della circonferenza fissa (esterna), ed il raggio r della circonferenza mobile interna. Quindi necessariamente $R > r$ $n > 1$.

Con $n=1$ non è possibile

alcun movimento; per $n > 1$ si hanno i seguenti casi: $1 < n < 2$; $n=2$; $2 < n < 3$; $n=3$; ...
in generale: $n = \text{intero}$, $n = \text{non intero} > 1$.

Usando gli stessi simboli si ha:

$$\begin{aligned} x_{O_2} &= (R-r) \cos \varphi &= & \begin{cases} r(n-1) \cos \varphi \\ r(n-1) \sin \varphi \end{cases} \\ y_{O_2} &= (R-r) \sin \varphi &= & \end{cases}$$

posto: $\alpha = n\varphi - \varphi = (n-1)\varphi$ abbiamo:

$$\begin{cases} x = (x_0 + (\cos \alpha) r) = r[(n-1) \cos \varphi + \cos((n-1)\varphi)] \\ y = (y_0 - (\sin \alpha) r) = r[(n-1) \sin \varphi - \sin((n-1)\varphi)] \end{cases}$$

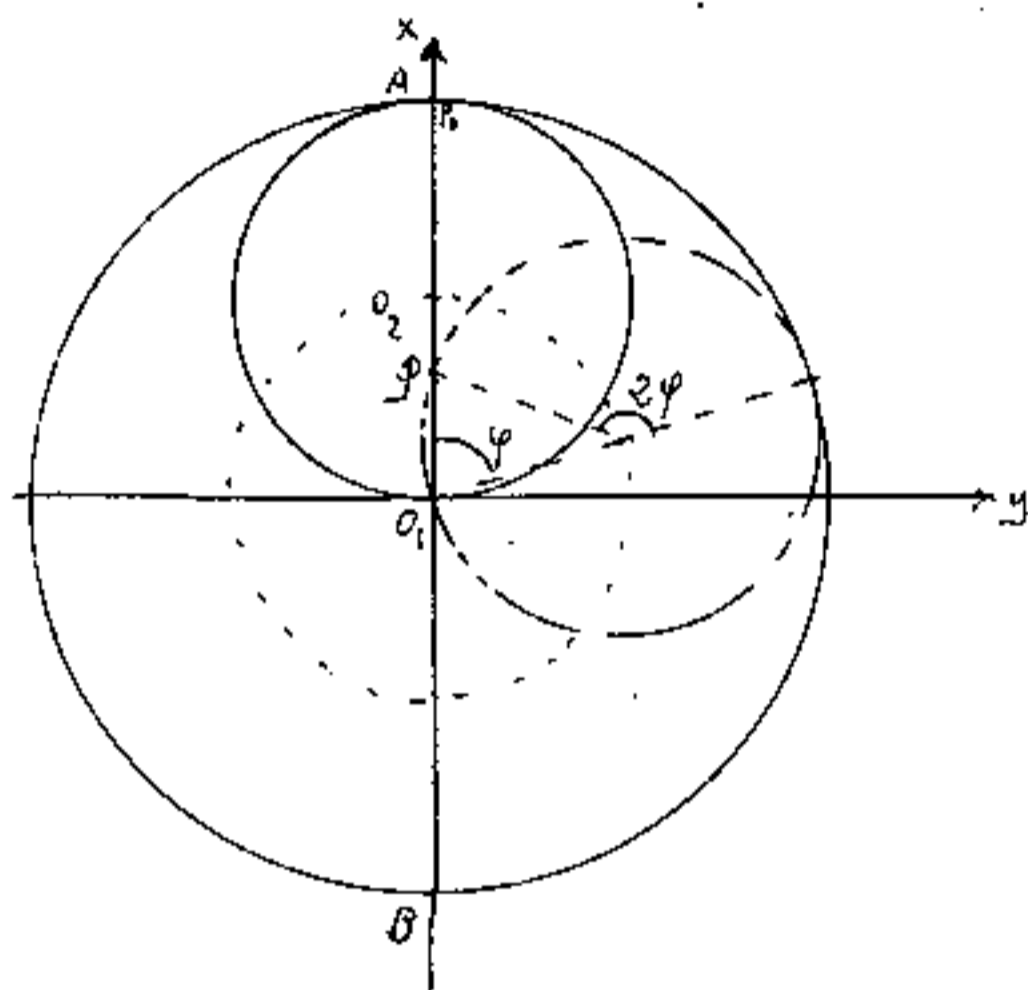
$$X = r[(n-1)\cos(\varphi) + \cos((n-1)\varphi)]$$

$$Y = r[(n-1)\sin(\varphi) - \sin((n-1)\varphi)]$$

equazioni parametriche

dell'ipocicloide

Consideriamo le ipocicloidi con $n = \text{intero} > 1$



Per $n=2$ le equazioni diven

tano:

$$\begin{cases} x = r[\cos\varphi + \cos\varphi] \\ y = r[\sin\varphi - \sin\varphi] \end{cases}$$

cioè $x = 2r\cos\varphi$

$y = 0$

la curva tracciata

è il diametro AB

3) Deltoidide

con $n=3$ la curva ipocicloide

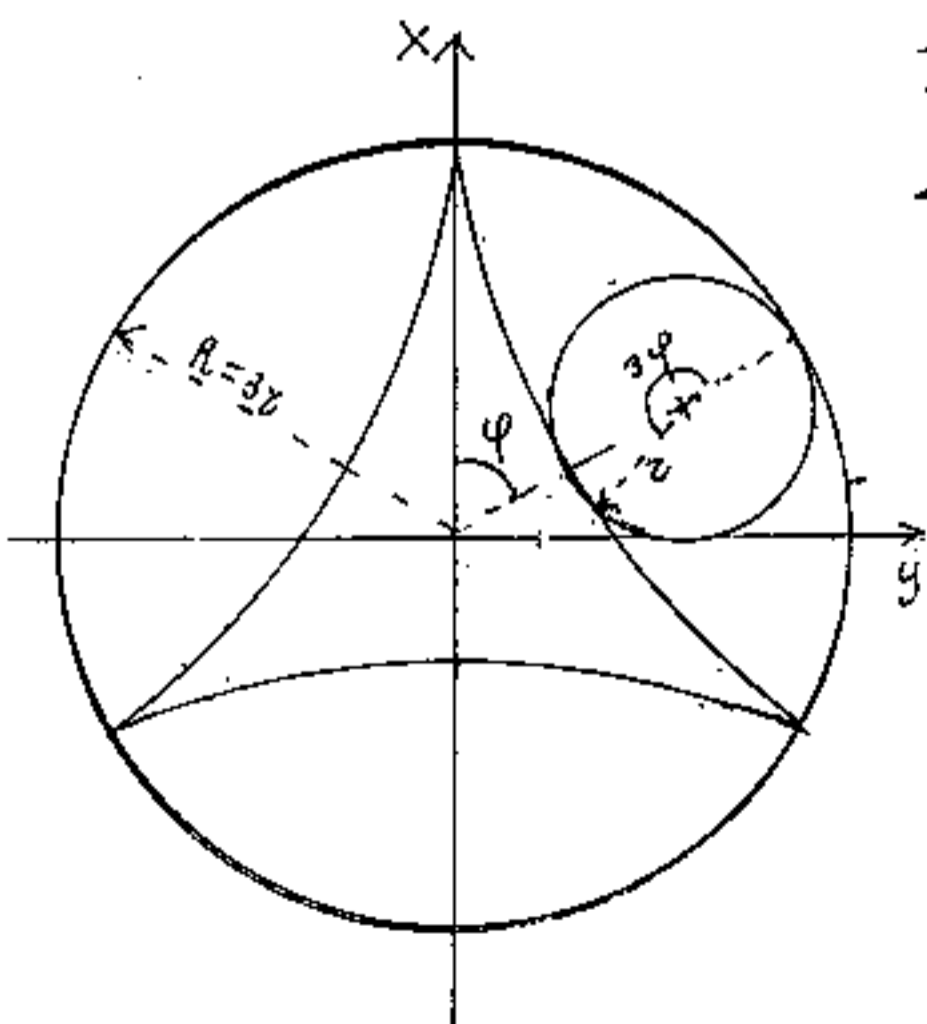
è detta deltoidide, le equa

zioni diventano:

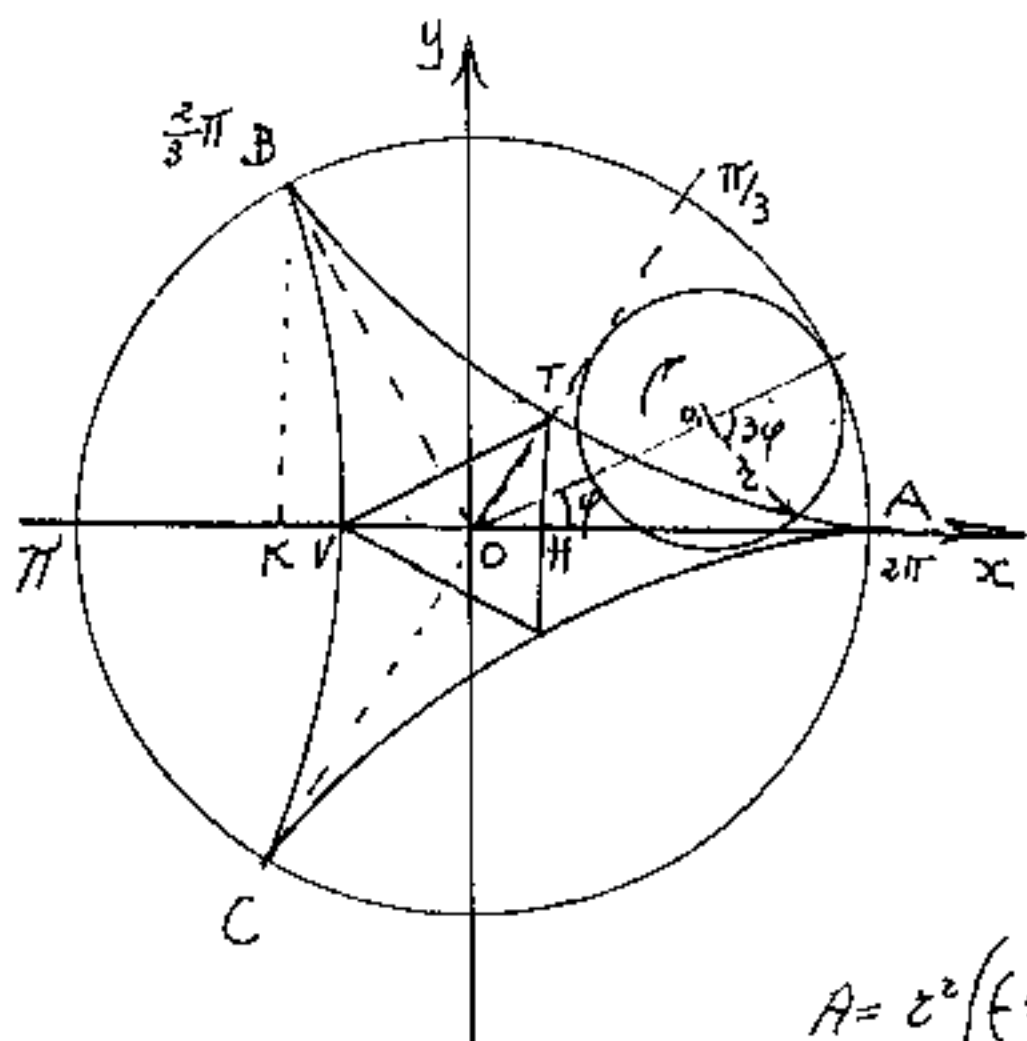
$$\begin{cases} x = r(2\cos\varphi + \cos(2\varphi)) \\ y = r(2\sin\varphi - \sin(2\varphi)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2r(2\cos\varphi(1 + \cos\varphi) - 1) \\ y = 2r(2\sin\varphi(1 - \cos\varphi)) \end{cases}$$

La curva deltoidide è detta anche ipocicloide tricuspidata. (Area = $2r^2\pi$).



Area del Deltoide



$$x = r(2 \cos \varphi + \cos 2\varphi)$$

$$y = r(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$$

$$dx = r(-2 \sin \varphi - 2 \sin 2\varphi) d\varphi$$

$$A = \int y \cdot dx$$

$$A = r^2 \int (-4 \sin^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi \cos \varphi + 2 \sin^3 2\varphi) d\varphi$$

Nel calcolare quest'area occorre notare che nel tratto: $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$ al crescere di $\varphi > 0$ anche $y > 0$ ma la x viene percorsa in senso negativo per cui l'area sarà negativa e non rappresenta $A/3$ perché dovremmo togliere (dal valore assoluto) l'area del triangolo BKO , mentre per $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ al valore assoluto dell'area del triangolo curvilineo AHT dobbiamo aggiungere l'area del triangolo OHT per avere $A/3$. Questi problemi non nascono estendendo φ da zero a π per avere $\frac{A}{2}$ perché l'arco BV è tracciato ad x crescente e quindi sottrae BKV all'area AKB .

$$A = \left[-2(\sin \varphi \cos \varphi + \varphi) - \frac{4}{3} \sin^3 \varphi + \frac{1}{2}(-\sin 2\varphi \cos 2\varphi + 2\varphi) \right]_0^{2\pi}$$

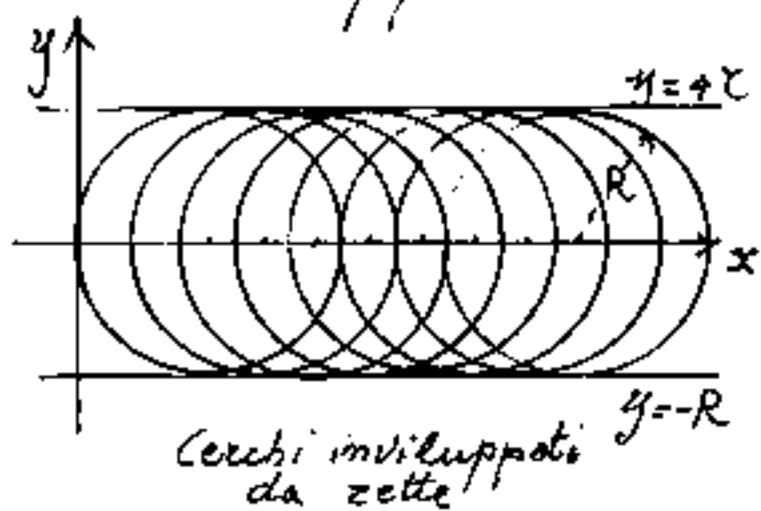
$$A = 2r^2\pi$$

$$= A = \frac{2}{9}R^2\pi$$

Le curve inviluppo

Il concetto di curva inviluppo è già stato introdotto a proposito degli "integrali singolari" delle equazioni differenziali (c.f.r. III vol.)

Consideriamo un curva $y = f(x, c)$ ove "c" è un parametro. Per esempio: $y = \sqrt{R^2 - (x-c)^2}$ è una famiglia di cerchi ove "c" rappresenta l'ascissa del centro. Ad ogni valore di "c" corrisponde una circonferenza di raggio R. L'insieme di tutte le circonferenze di raggio R e con centro sulle asse sono inviluppate da due rette: $y = +R$; $y = -R$.



Si noti che se consideriamo "c" fisso ed R un parametro, si ha la famiglia di cerchi concentrici

a raggio variabile, ma non ammettono linee che l'inviluppano. Quindi un parametro in una funzione: $y = f(x)$ non sempre determina una curva inviluppo.

Consideriamo una famiglia di curve: $f(x, y, a) = 0$ ottenute al variare del parametro "a". - Se esiste una curva Γ che ha un punto di contatto⁽¹⁾ con ciascuna curva C della

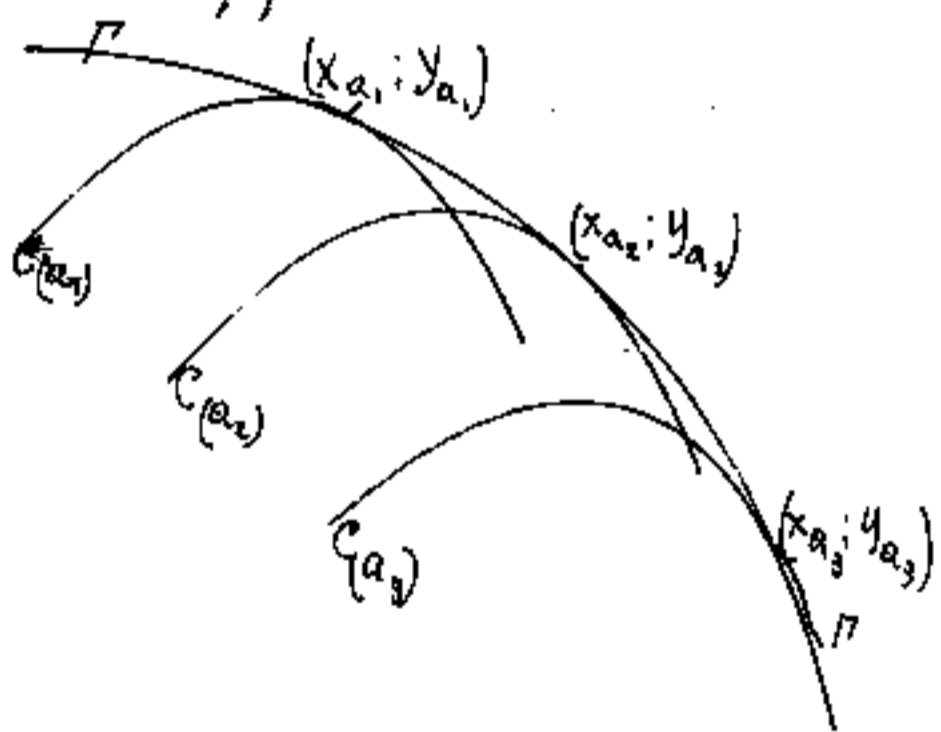
(1) Dicesi: "punto di contatto" fra due curve, quando toccandosi, hanno la stessa tangente. (vedi ordine dei punti di contatto)

famiglia: $f(x, y, a) = 0$; diremo che Γ è l'involuppo delle curve "C", e che le curve "C" sono inviluppate da Γ .

Sorge così il problema: data una espressione $f(x, y, a) = 0$, dire se esiste o meno la curva (o le curve) involuppo e che tipo di involuppo.

Supponiamo, in un primo momento, che la curva Γ esista e che possa esprimersi parametricamente con lo stesso parametro "a".

Ciò è possibile perché ad ogni valore di "a" corrisponde una curva "C" della famiglia e quindi un punto (il punto di contatto) della curva involuppo Γ .



Siano quindi:

$$\begin{cases} X = X(a) \\ Y = Y(a) \end{cases}$$

Le equazioni parametriche della curva Γ , che dovranno

soddisfare la nostra espressione:

$$f(x(a), y(a), a) = 0$$

Per definizione, nei punti di contatto le "C" e Γ hanno la stessa retta tangente la cui equazione sarà: per le curve "C":

$$[x - x(a)] \frac{\partial f}{\partial x} + [y - y(a)] \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

e per la curva Γ l'equazione della tangente è:

$$\frac{x - x(a)}{x'(a)} - \frac{y - y(a)}{y'(a)} = 0$$

le due equazioni possono essere scritte:

$$\begin{cases} (x - x(a)) \frac{\partial f}{\partial x} = - (y - y(a)) \frac{\partial f}{\partial y} \\ (x - x(a)) \frac{1}{x'(a)} = (y - y(a)) \frac{1}{y'(a)} \end{cases}$$

dividendo membro a membro:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(a) = - \frac{\partial f}{\partial y} y'(a)$$

cioè:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} x'(a) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(a) = 0}$$
 è la condizione

per cui le due rette tangenti coincidono

derivando la:

$$f(x_a, y_a, a) = 0$$

otteniamo:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} x'(a) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(a) + \frac{\partial f}{\partial a} = 0}$$

che coincide con la condizione di cui sopra

se: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial a} = 0}$

Quindi affinché esista una curva indiluppo Γ

Le coordinate parametriche di Γ ($x = x(a)$; $y = y(a)$)

debbono soddisfare le due espressioni:

$$\begin{cases} f(x_{(a)}, y_{(a)}, a) = 0 \\ f'_{(a)}(x_{(a)}, y_{(a)}, a) = 0 \end{cases} \quad * \quad \text{(la derivata in } a)$$

Inversamente da queste due equazioni si possono ricavare le coordinate parametriche di Γ

Nel caso che $x_{(a)}, y_{(a)}$ fosse un punto singolare, cioè che contemporaneamente $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e quindi lo Jacobiano: $J = \frac{d(f, f'_{(a)})}{d(x, y)} = 0$, la condizione non sarebbe sufficiente; occorre che:

$J \neq 0$ cioè il punto $(x_{(a)}, y_{(a)})$ sia un punto regolare e quindi non avvenga che si abbia contemporaneamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Qualora le curve $C_{(a)}$ abbiano una continuità di punti singolari variabili ed il luogo di questi punti sia $x = x_{(a)} ; y = y_{(a)}$, queste coordinate soddisfano: $f(x, y, a) ; \frac{\partial f}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e differenziandole si trova che soddisfano anche a: $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, cioè si trova che le equazioni (*) in generale definiscono l'insieme delle curve involuppo ed il luogo dei punti singolari di queste curve.

Facciamo alcuni esempi

Abbiamo già trattato la parabola come traiettoria di un corpo lanciato, con velocità iniziale v_0 , in direzione α , in campo gravitazionale g (cfr. Vol II)

Riprendiamo il problema considerando α variabile, abbiamo scomposto la velocità iniziale \vec{v}_0 (vettore in direzione α) nei vettori componenti: $\vec{u}_0 = \vec{v}_0 \sin \alpha$; $\vec{h}_0 = \vec{v}_0 \cos \alpha$ ed, in assenza di attriti, per la legge d'inerzia \vec{h}_0 si mantiene costante, mentre \vec{u}_0 diretto in verso opposto (almeno inizialmente) alla direzione dell'accelerazione di gravità: \vec{g} , diminuisce gradatamente di intensità fino ad annullarsi quando: $\vec{g}t = \vec{u}_0$. cioè al tempo $t = \vec{u}_0/g$ il proiettile ha raggiunto la massima altezza ed $\vec{u} = \vec{u}_0 - gt$ inverte il suo moto. Poiché sappiamo: $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g \frac{u_0^2}{g^2} = \frac{u_0^2}{2g}$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

se $\alpha = \pi/2$, cioè se il mobile viene

sparato verticalmente in alto con velocità iniziale v_0 l'altezza massima sarà: $h_m = \frac{v_0^2}{2g}$

Consideriamo il nostro apparecchio lanciatore al centro degli assi e vogliamo trovare il luogo geometrico dei massimi delle parabole traiettorie.

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$x = v_0 t \cos \alpha = x = v_0 \left(\frac{u_0}{g} \right) \cos \alpha;$$

$$x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Le coordinate parametriche dei massimi sono:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{V_0^2}{2g}\right) \sin^2(\alpha) \\ x = \left(\frac{V_0^2}{2g}\right) \sin(2\alpha) \end{cases}$$

eliminando α si ottiene l'equazione del luogo dei massimi.

elevando a quadrato la seconda equazione e sostituendovi

$\sin^2 \alpha = y \left(\frac{2g}{V_0^2}\right)$ si ha:

$$x^2 = \left(\frac{V_0^2}{g}\right)^2 (\sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = \left(\frac{V_0^2}{g}\right)^2 \left[y \left(\frac{2g}{V_0^2}\right) \left(1 - y \left(\frac{2g}{V_0^2}\right)\right) \right] = \left(\frac{2V_0^2}{g} y - 4y^2\right)$$

$$\boxed{x^2 = \frac{2V_0^2}{g} y - 4y^2} \quad ; \quad \left(y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{V_0^2}{2g} y = 0\right)$$

facciamo una sostituzione di variabile ponendo:

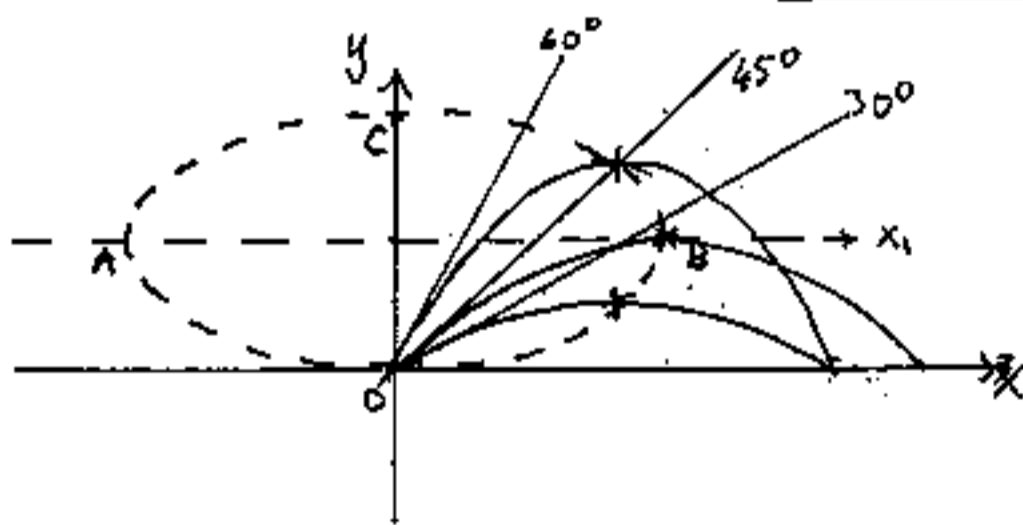
$$y = \left(y_1 + \frac{V_0^2}{4g}\right) \quad \text{avremo:}$$

$$y^2 = y_1^2 + \frac{V_0^2}{2g} y_1 + \left(\frac{V_0^2}{4g}\right)^2 \quad ; \quad -\frac{V_0^2}{2g} \left(y_1 + \frac{V_0^2}{4g}\right) = -\frac{V_0^2}{2g} y_1 - \frac{V_0^4}{8g^2}$$

$$\frac{x^2}{4} + y_1^2 + \left(\frac{V_0^2}{g}\right) \left(\frac{1}{16} - \frac{2}{16}\right) = 0 \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y_1^2}{1} = \left(\frac{V_0^2}{4g}\right)^2$$

ed anche:

$$\boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{V_0^2}{4g}\right)^2} = 1}$$



classica equazione di un'ellisse ad assi spostati che certamente non è una curva involuppo

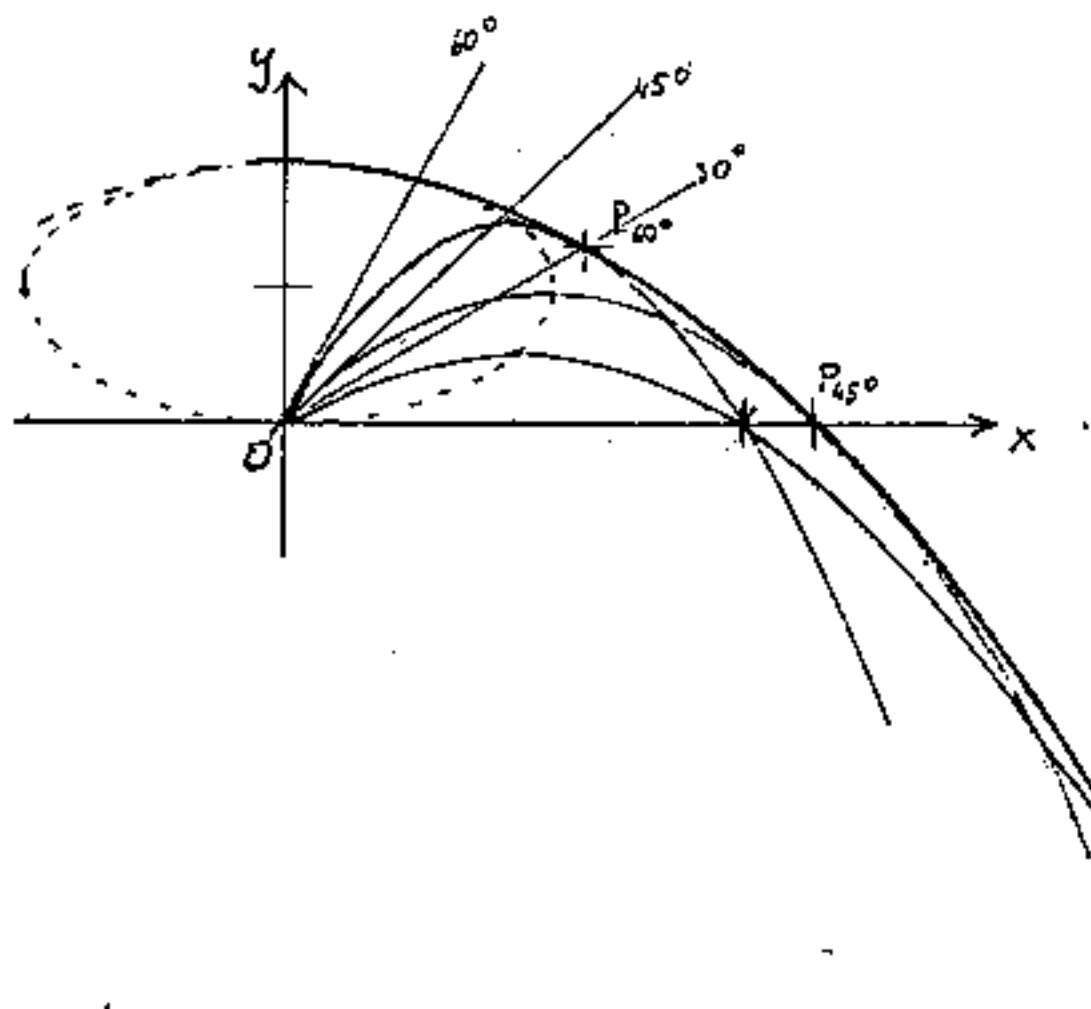
infatti per $\alpha = 0$ la parabola traiettoria degenera nel

segmento $\overline{OC} = c(-\infty)$; per $\alpha = 60^\circ$: $y = \frac{3}{4} \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$; $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$; per $\alpha = 45^\circ$

$y = \frac{V_0^2}{4g}$; $x = \frac{V_0^2}{2g}$ (si ha la massima gittata); per $\alpha = 30^\circ$ $y = \frac{V_0^2}{8g}$; $x = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{V_0^2}{g}$;

si ha la stessa gittata di 60° .

L'INVILUPPO di TORRICELLI



Riprendiamo il problema precedente, e vediamo, se la famiglia di parabole traettorie con velocità iniziale \vec{V}_0 e con partenza nel-

l'origine degli assi, aventi come parametro l'angolo α , ammette curve inviluppo.

Le coordinate del proietto al tempo t dopo la partenza sono: $y = tV_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$; $x = V_0 t \cos \alpha$

eliminiamo $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$ ed avremo:

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{cioè:}$$

l'equazione $f(x, y, \alpha) = 0 \equiv$ $y - x \operatorname{tg}(\alpha) + \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} = 0$

facciamo la derivata rispetto ad α ed uguagliamo a zero.

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \equiv \frac{-x}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_0^2} (-2 \cos^2 \alpha)^{-3} (-\sin \alpha) = 0$$

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \equiv \frac{x}{\cos^2 \alpha} \left[1 - \frac{gx}{V_0^2} \operatorname{tg} \alpha \right] = 0$$

questa equazione risulta verificata per $x=0$ e per

$$\left[1 - \left(\frac{gx}{V_0^2} \right) \operatorname{tg} \alpha \right] = 0 \quad \text{cioè per} \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{V_0^2}{gx}$$

essendo $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = \left[\left(\frac{V_0^2}{gX} \right)^2 + 1 \right]$

sostituendo nella $f^0(x, y, \alpha) = 0$ si ha:

$$y = X \cdot \frac{V_0^2}{gX} - \frac{gX^2}{2V_0^2} \left(\left(\frac{V_0^2}{gX} \right)^2 + 1 \right)$$

$$y = \frac{V_0^2}{g} - \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{V_0^2} X^2$$

$$\boxed{y = \left(\frac{-g}{2V_0^2} \right) X^2 + \frac{V_0^2}{2g}} \quad \underline{\text{curva involuppo}}$$

Equazione di una parabola che volge la concavità verso le $y < 0$, con vertice spostato in $\frac{V_0^2}{2g}$ (indipendente da α) questo involuppo è detto di Torricelli.

Le rette tangenti a Γ avranno per coefficiente angolare: $\boxed{y' = -\frac{g}{V_0^2} X}$

Le curve C (parabole traiettorie) avranno per equazione come visto:

$$\boxed{y = -\left(\frac{g}{2V_0^2} \right) \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) X^2 + X \operatorname{tg}(\alpha)}$$

e le rette tangenti alle C avranno per coefficiente angolare: $y' = -\frac{g}{V_0^2} \frac{X}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}(\alpha)$

per ogni α determinato, cioè per ogni curva C uguagliamo la y' con y' di Γ

$$-\frac{g}{V_0^2} X = -\frac{g}{V_0^2} \frac{X}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$$

$$\left(\frac{g}{V_0^2} \right) \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) X = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\boxed{X = \frac{V_0^2}{g \operatorname{tg} \alpha}}$$

ove X rappresenta l'ascissa ove si verifica che le C e Γ hanno la stessa inclinazione della retta tangente.

Sostituiamo questa x nelle due equazioni:

$$y_f = \left(\frac{-g}{2V_0^2} \right) \left(\frac{V_0^2}{g \tan(\alpha)} \right)^2 + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$y_f = \frac{-V_0^2}{2g \tan^2 \alpha} + \frac{V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \boxed{\frac{V_0^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2g \sin^2 \alpha}}$$

$$y_c = -\frac{g}{2V_0^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \left(\frac{V_0^2}{g \tan \alpha} \right)^2 + \frac{V_0^2}{g} = \frac{-V_0^2}{2g \sin^2 \alpha} + \frac{2V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g} \left(\frac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} \right)$$

$$y_c = \frac{V_0^2}{2g} \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \boxed{\frac{V_0^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2g \sin^2 \alpha}}$$

$$\boxed{y_f = y_c = \frac{V_0^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right)}$$

Avevamo la stessa ordinata con la stessa ascissa
 si ha un punto di contatto nel quale le due curve
 hanno la stessa tangente (con la stessa pendenza)

in particolare i punti di contatto sono

per $\alpha = 0$ $P \equiv (\infty, -\infty)$

$\alpha = 60^\circ$ $P \equiv (0,5774; 0,3333) \frac{V_0^2}{g}$

$\alpha = 45^\circ$ $P \equiv (1; 0) \frac{V_0^2}{g}$

$\alpha = 30^\circ$ $P \equiv (1,7321; -1) \frac{V_0^2}{g}$

Curva asteroide

Se nelle formule dell'ipocicloide poniamo $n=4$ si ha una curva a quattro cuspidi detta Asteroido; abbiamo già parlato di curva Asteroido, a proposito dell'evolvente dell'ellisse (vol II).

Le formule diventano:

$$\begin{cases} x = r(3 \cos(\varphi) + \cos(3\varphi)) \\ y = r(3 \sin \varphi - \sin(3\varphi)) \end{cases}$$

sviluppando si ha:

$$x = r[3 \cos(\varphi) + 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi]$$

$$y = r[3 \sin \varphi - 3 \sin \varphi + 4 \sin^3 \varphi]$$

$$\begin{cases} x = 4r \cos^3 \varphi \\ y = 4r \sin^3 \varphi \end{cases}$$

Equazioni parametriche dell'Asteroido

possiamo anche scrivere:

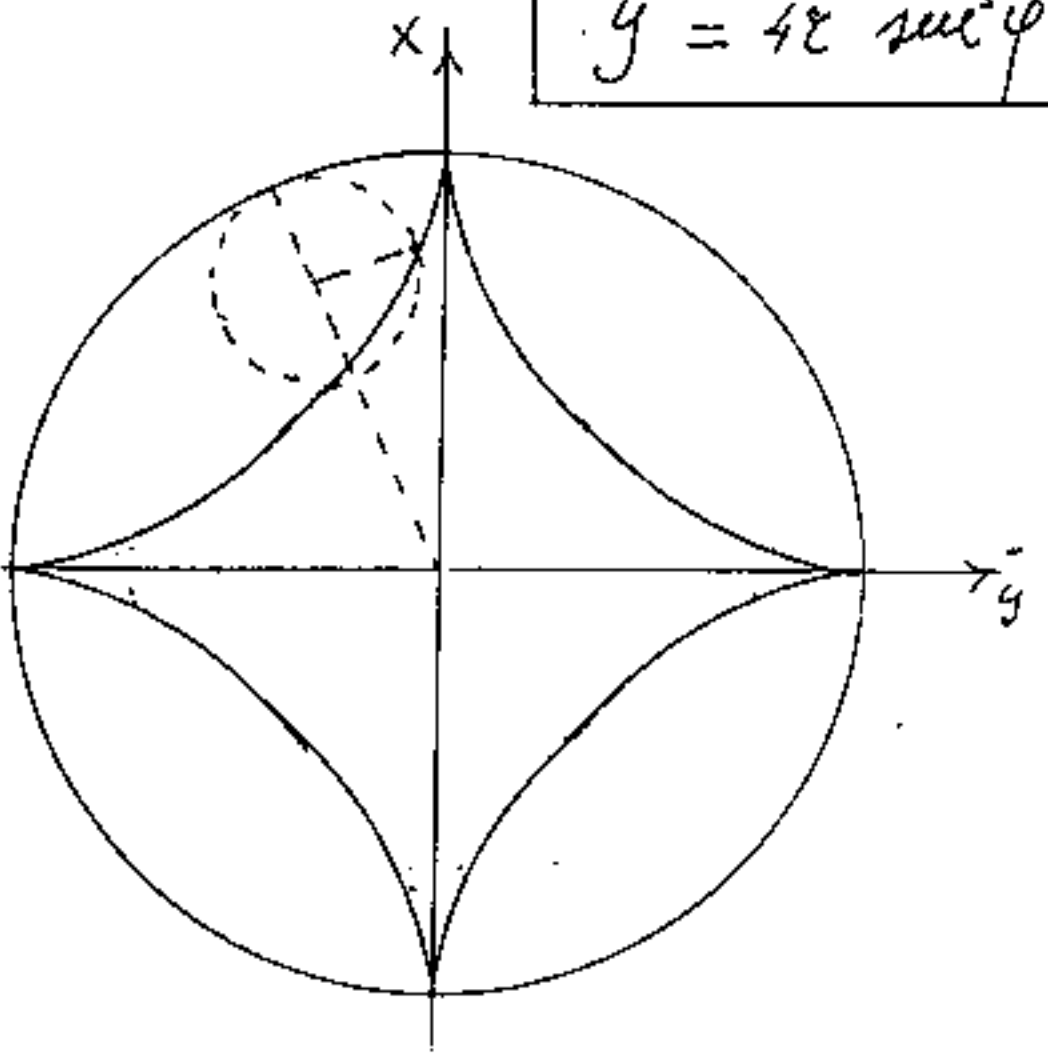
$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \varphi &= (x/4r)^{2/3} \\ \sin^2 \varphi &= (y/4r)^{2/3} \end{aligned} \right\}$$

Sommando; e ponendo

$a = 4r$ si ha:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

formula classica dell'Asteroido.


$$\text{Area} = 6r^2 \pi = \frac{3}{8} R^2 \pi$$

Area dell'Asteroide

$$A = \int y \cdot dx \quad dx = (-4r)(3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$$

$$A = - \int (4r \operatorname{sen}^3 \varphi)(12r \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$$

$$A = -48r^2 \int \operatorname{sen}^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -12 \int \operatorname{sen}^2 2\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi$$

$$\frac{A}{4} = \frac{12r^2}{3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\varphi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \frac{d2\varphi}{2}$$

$$\frac{A}{4} = 3r^2 \left\{ \left[-\frac{\operatorname{sen} 2\varphi \cos 2\varphi + 2\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2\varphi}{3} \right] \right\}_0^{\pi/2}$$

$$\frac{A}{4} = \frac{3r^2 \pi}{2}$$

$$A = 6r^2 \pi$$

$$A = \frac{3}{8} R^2 \pi$$

Raggio di curvatura nell'asteroide

$$y = \sqrt{(a^{2/3} - x^{2/3})^3} \quad ; \text{forma esplicita dell'eq. dell'asteroide.}$$

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{(a^{2/3} - x^{2/3})} \left(-\frac{2}{3} x^{-1/3} \right) =$$

$$y' = -\sqrt{\left(\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1 \right)}$$

$$y'' = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1}} \right) \left(-\frac{2}{3} \frac{a^{2/3}}{x^{5/3}} \right) =$$

$$y'' = \frac{a^{2/3}}{3 \cdot x^{5/3} \sqrt{\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1}}$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{(1 + a^{2/3} - 1)^{3/2}}{\frac{1}{3} \frac{a^{2/3}}{x^{5/3} \sqrt{\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1}}} = \frac{3a x^{5/3} \sqrt{\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1}}{x a^{2/3}} =$$

$$R = \frac{3a^{1/3} \cdot x^{2/3} \sqrt{\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1}}{1}$$

$$R = 3a^{1/3} \sqrt{a^{2/3} \cdot x^{2/3} - x^{4/3}}$$

se poniamo: $x = \left(\frac{a}{m} \right)$; $R = 3a^{1/3} \sqrt{a^{2/3} \frac{a^{2/3}}{m^{2/3}} - \frac{a^{4/3}}{m^{4/3}}}$

$$\text{raggio} = R = \frac{3a}{m^{2/3}} \sqrt{m^{2/3} - 1}$$

Equazione in coordinate polari dell'Asteroide

Se eleviamo a quadrato le equazioni parametriche e sommiamo si ha: ($4x=a$)

$$x^2 + y^2 = a^2 (\cos^6(\varphi) + \sin^6(\varphi)) = \rho^2$$

per ricevere l'equazione dell'asteroide in coordinate polari poniamo: $\varphi = \theta = \text{argomento}$:

$$\rho^2 = a^2 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)$$

$$\rho^2 = a^2 [\cos^2 \theta \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \sin^4 \theta]$$

$$\rho^2 = a^2 (\cos^4 \theta - \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta - \sin^4 \theta \cos^2 \theta)$$

$$\rho^2 = a^2 [\cos^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \theta)]$$

$$\rho^2 = a^2 [\cos^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta - ((\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta \sin^2 \theta))] =$$

$$\rho^2 = a^2 [1 - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta \sin^2 \theta)] =$$

$$\rho^2 = a^2 [1 - 3\cos^2 \theta \sin^2 \theta] \quad \text{aggiungo e tolgo } \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$\rho^2 = a^2 [1 - 4\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta]$$

$$\rho^2 = a^2 [1 - \sin^2 2\theta + \frac{1}{4}\sin^2 2\theta]$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{4} [4\cos^2 2\theta + 1 - \cos^2 2\theta]$$

$$\boxed{\rho = \frac{a}{2} \sqrt{3\cos^2 2\theta + 1}}$$

equazione dell'Asteroide in polari.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \cos \theta \sqrt{3\cos^2 2\theta + 1} \\ y = \frac{a}{2} \sin \theta \sqrt{3\cos^2 2\theta + 1} \end{array} \right\} \text{ altra forma di equazioni parametriche}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{array} \right.$$

L' Evoluta dell' Asteroide

Le equazioni parametriche dell'evoluta per una funzione generica $y=f(x)$ sono: (vol II)

$$\begin{cases} x_c = x - f'(x) \left(\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} \right) \\ y_c = f(x) + \left(\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} \right) \end{cases}$$

Le derivate dell'asteroide le abbiamo già calcolate:

$$f'(x) = - \left(\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1 \right)^{1/2} ;$$

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3}}{3x \left(\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1 \right)^{1/2}} ;$$

Sostituendo:

$$x_c = x + \left(\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{1 + \left(\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1 \right)^{1/2}}{\frac{\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3}}{3x \left(\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1 \right)^{1/2}}} \right) =$$

$$x_c = x + 3x \left(\left(\frac{a}{x} \right)^{2/3} - 1 \right) = x + 3a^{2/3} x^{1/3} - 3x$$

$$\boxed{x_c = 3a^{2/3} x^{1/3} - 2x}$$

$$y_c = \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right) \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}} + 3x \sqrt{\frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}}$$

$$y_c = \left[\left(a^{2/3} - x^{2/3} \right) + \left(3x^{2/3} \right) \right] \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$$

$$\boxed{y_c = \left(a^{2/3} + 2x^{2/3} \right) \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}}$$

Le coordinate dell'asteroide abbiamo visto che possono esprimersi:

$$x = a \cos^3 \varphi ; \quad y = a \sin^3 \varphi ;$$

od anche: $x = a \cos^3 \theta$; $y = a \sin^3 \theta$;

sostituendo nelle parametriche dell'evoluta dell'Aster

coide:

$$\begin{cases} x_c = 3a^{2/3}x^{1/3} - 2x \\ y_c = (a^{2/3} + 2x^{2/3})\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}} \end{cases} \quad (f(x))$$

si ha:

$$x_c = 3a^{2/3} \cdot a^{1/3} \cos^3 \varphi - 2a \cos^3 \varphi = a(3 \cos^3 \varphi - 2 \cos^3 \varphi)$$

$$y_c = (a^{2/3} + 2a^{1/3} \cos^2 \varphi) \sqrt{a^{2/3} - a^{1/3} \cos^2 \varphi} = a(1 + 2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi$$

(nuova forma delle equazioni parametriche dell'evoluta:

$$\begin{cases} x_c = a \cos \varphi (1 + 2 \sin^2 \varphi) \\ y_c = a \sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi) \end{cases} \quad f(\varphi)$$

elevando a quadrato e sommando (e ponendo $\varphi = \theta$)

si ha l'equazione dell'evoluta dell'asteroide in coordi

nate polari;

$$(x_c^2 + y_c^2) = \rho^2 = a^2 (1 + 8(\sin^2 \theta \cos^2 \theta) + 4 \cos^4 \theta \sin^4 \theta + 4 \sin^4 \theta \cos^4 \theta)$$

$$\rho^2 = a^2 (1 + 8(\sin^2 \theta \cos^2 \theta) + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta))$$

$$\rho^2 = a^2 (1 + 12 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) = \rho^2 = a^2 (1 + 3(2 \sin \theta \cos \theta)^2)$$

$$\rho^2 = a^2 (1 + 3 \sin^2 2\theta)$$

$$\rho = a \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\theta}$$

equazione dell'evoluta dell'asteroide in polari, ove

si nota che l'equazione è uguale a quella polare

dell'asteroide stesso, salvo il parametro "a" che è

doppio. Per completare la dimostrazione, consideriamo

l'evoluta dell'asteroide:

$$\begin{cases} x_c = a \cos \varphi (1 + 2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \\ y_c = a \operatorname{sen} \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi) \end{cases}$$

e sostituiamo: $\varphi = (\alpha - \frac{\pi}{4})$ ore:

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{2}}}; \quad \boxed{\operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{2}}};$$

$$2 \cos^2 \varphi = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} \right) 2; \quad \boxed{2 \cos^2 \varphi = 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} \right) 2; \quad \boxed{2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 1 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} x_c = \frac{a}{\sqrt{2}} (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) (1 - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) 2 \\ y_c = \frac{a}{\sqrt{2}} (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) (1 + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c = a\sqrt{2} (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha) \\ y_c = a\sqrt{2} (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c = a\sqrt{2} (\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha) + \cos \alpha (\cos^2 \alpha)) = a\sqrt{2} (\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha) \\ y_c = a\sqrt{2} (\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha) - \cos \alpha (\cos^2 \alpha)) = a\sqrt{2} (\operatorname{sen}^3 \alpha - \cos^3 \alpha) \end{cases}$$

Se ruotiamo gli assi di 45° per i nuovi assi avremo

sommando e sottraendo: $x_c + y_c = \frac{y_1}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} \operatorname{sen}^3 \alpha$

$x_c - y_c = \frac{x_1}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} \cos^3 \alpha$

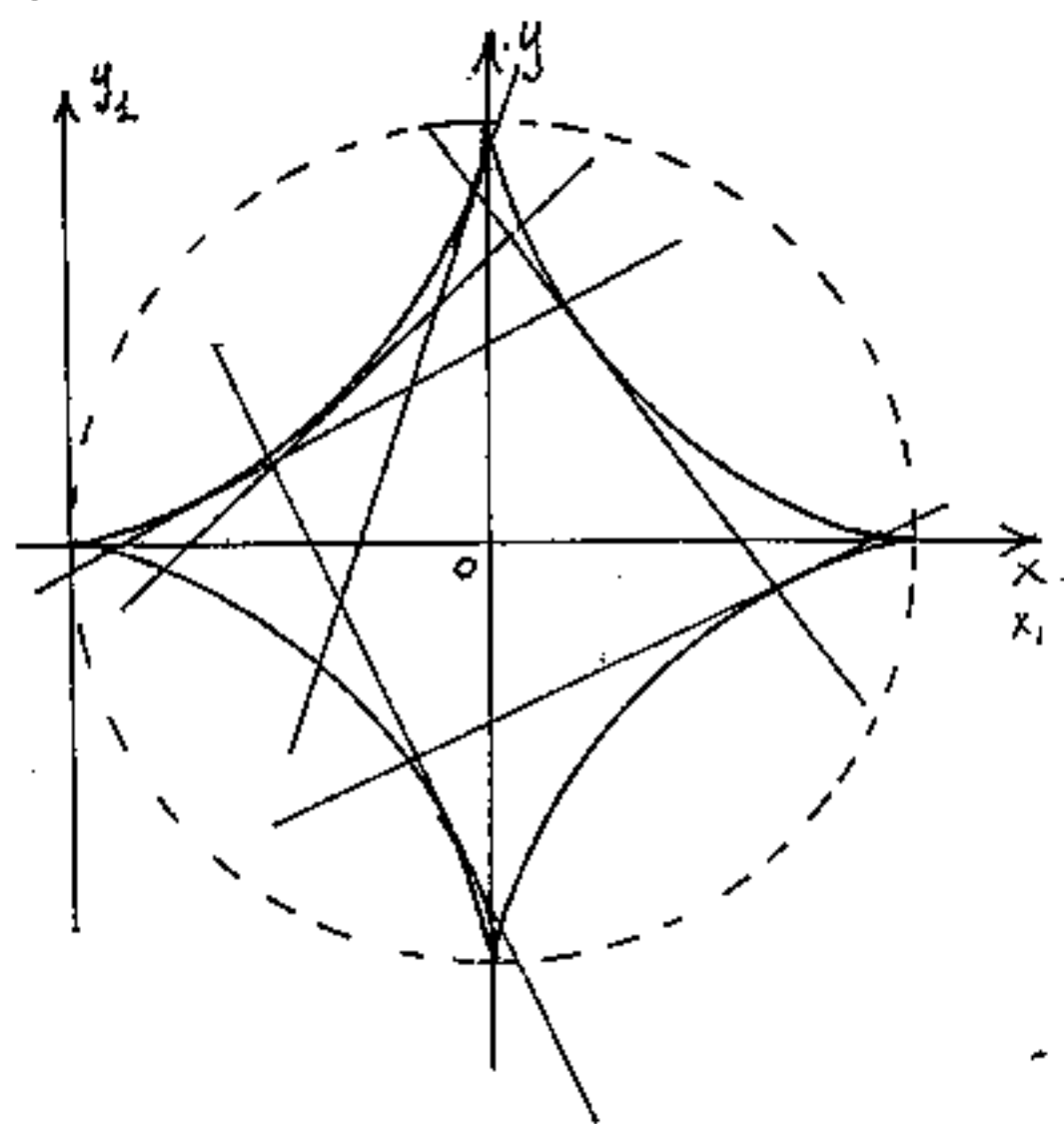
cioè: $\boxed{\begin{cases} x_1 = 2a \cos^3 \alpha \\ y_1 = 2a \operatorname{sen}^3 \alpha \end{cases}}$

l'evoluta di un'asteroide è ancora un
asteroide riferita ad assi ruotati di 45° ($\frac{\pi}{4}$)
e di modulo doppio, l'evolvente è un'asteroide
riferito ad assi ruotati di (-45°) ($-\frac{\pi}{4}$) e di modulo metà.

Inviluppo di Rette

Ogni curva può considerarsi l'inviluppo delle sue rette tangenti. Abbiamo visto la costruzione della parabola per tangenti; quindi, l'opportuna formulazione delle rette tangenti porta all'equazione della rispettiva curva inviluppata.

Per esempio consideriamo la famiglia di rette che abbia la caratteristica di intercettare fra gli assi un segmento costante lungo "a".



se α è l'angolo che la retta forma con le ascisse avremo:

$$q = a \sin \alpha; \quad p = -a \cos \alpha$$

$$-\frac{x}{a \cos \alpha} + \frac{y}{a \sin \alpha} = 1$$

$$y = x \tan(\alpha) + a \sin(\alpha)$$

e la funzione uguaglia-

ta a zero:

$$f(x, y, \alpha) \equiv (-y + x \tan(\alpha) + a \sin(\alpha) = 0)$$

facciamo la derivata rispetto ad α ed uguagliamo

a zero:

$$f'_\alpha \equiv \frac{x}{\cos^2 \alpha} + a \cos \alpha = 0$$

da cui:

$$\boxed{\cos \alpha = -\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}}$$

sostituiamo:

nella equazione: $y = \left(\frac{x}{\cos \alpha} + a \right) \sec \alpha$

$$\sec \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3}} = \frac{1}{a^{1/3}} \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}} ;$$

$$y = \left(- \frac{x}{\left(\frac{x}{a} \right)^{1/3}} + a \right) \frac{1}{a^{1/3}} \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$$

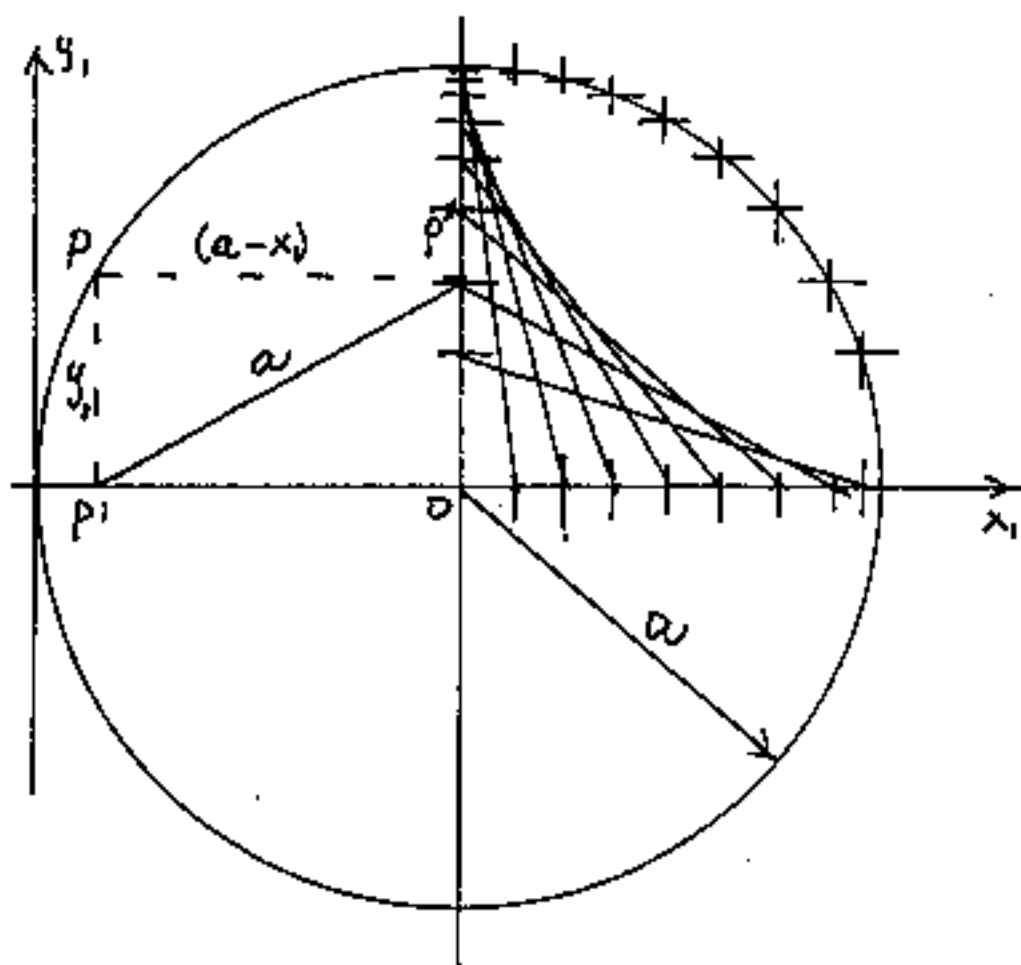
$$\frac{y}{\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}} = \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)$$

$$y = \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{3/2}$$

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}}$$

che è l'equazione dell'asteroide.

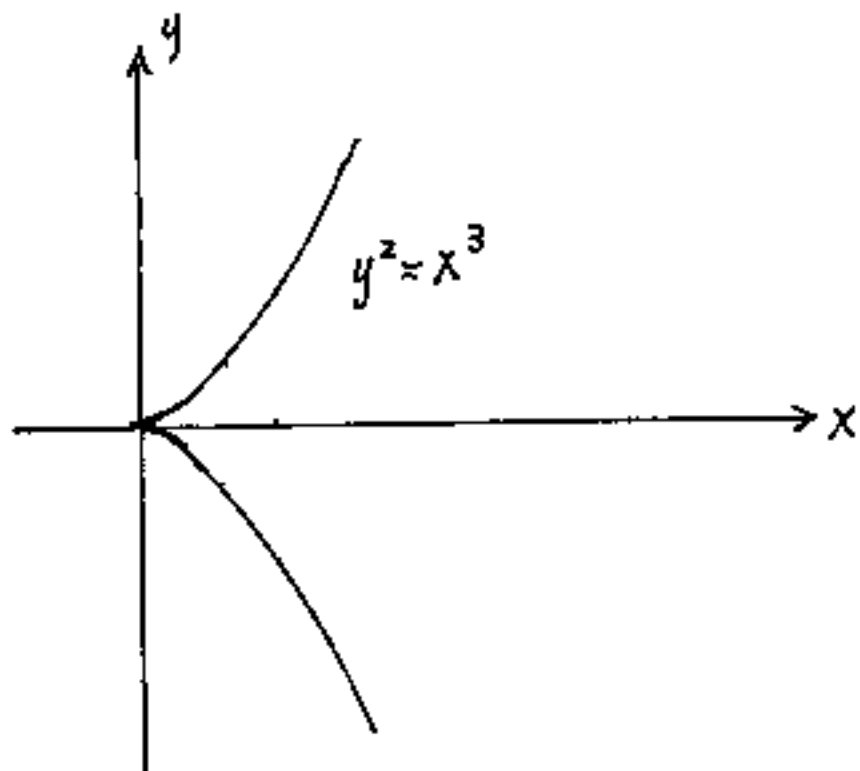
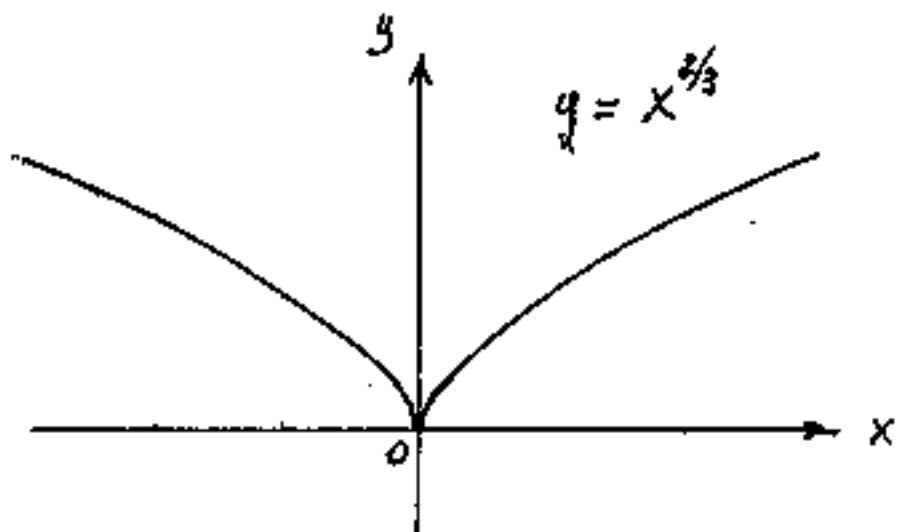
Costruzione dell'asteroide per tangenti



Tracciato un cerchio di raggio a e di equazione: $(x_1 - a)^2 + y_1^2 = a^2$ cioè: $y_1^2 = 2ax_1 - x_1^2$

Si noti che qualsiasi punto P di questa circonferenza proiettato sui diametri segna gli estremi di un segmento lungo a per cui la congiungente $\overline{P'P''}$ è una tangente dell'asteroide.

Parabola semicubica



Consideriamo l'espressione:
 $y = ax^{2/3}$ equazione di
una parabola semicubica
che equivale a $y^3 = ax^2$
oppure una espressione:
 $y = ax^{3/2}$; $y^2 = ax^3$
Ove il quadrato di
una variabile rende
la curva inesistente per i
valori negativi dell'altro
semiasse.

La: $y^2 = ax^3$ in coordinate polari diventa:

$$\rho = \frac{1}{a} \tan^2 \theta / \cos \theta$$

$$(\rho^2 \sin^2 \theta = a \rho^3 \cos^3 \theta) \quad \rho = \frac{1}{a} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta} \right)$$

(ove a è l'inverso di una lunghezza)

Curva trattrice

Vogliamo trovare la curva le cui "tangenti" definite in coordinate polari sono costanti ed $= a$

cioè: $-y \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} = a$ (vedi prec. tangenti..)

$$y^2(1+y'^2) = a^2 y'^2; (y'^2)(a^2 - y^2) = y^2; y'^2 = \frac{y^2}{(a^2 - y^2)};$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}}$$

$$dx = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y^2} dy \quad (-a \leq y \leq a)$$

$$x = \int_a^y \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y^2} dy + c \quad \text{per } c = 0$$

$$x = a \ln \frac{y}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - y^2}$$

posto: $y = a \operatorname{sen} t$:

$$x = a \ln \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{cos} t} + a \operatorname{cos} t$$

ed essendo: $\frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{cos} t} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \operatorname{cos} \frac{t}{2}}{2 \operatorname{cos}^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$

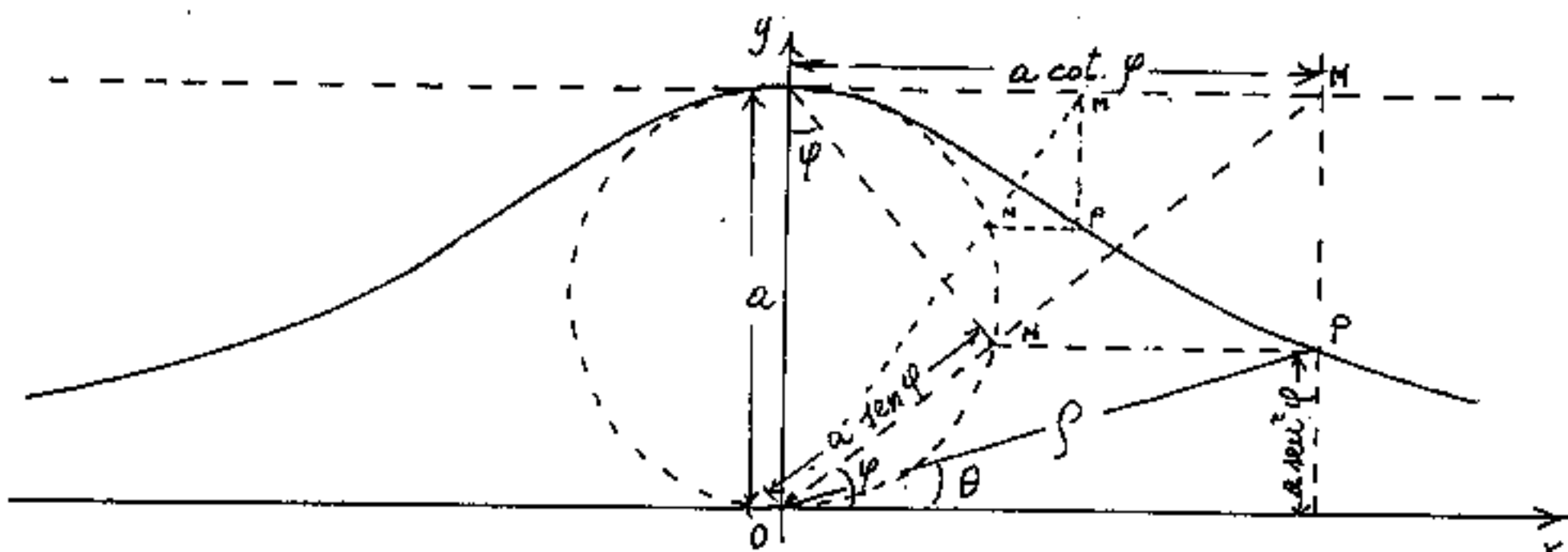
si hanno le equazioni parametriche della curva trattrice

$$\boxed{\begin{cases} x = a \left[\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right] + \operatorname{cos} t \right] \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}}$$

L'asse x è un asintoto della curva trattrice.

per $t < 0$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2} < 0$, non esistono ln. di numeri < 0 .

La versiera di Agnesi



La parola "Versiera" (in inglese Witch = strega), in effetti significa una specie di diavolessa o come dice il Tommaseo: "spirito infernale immaginato dal popolo per attrarre i fanciulli". Maria Gaetana Agnesi, bolognese 1718-1799, studio questa curva, che era già stata scoperta da G. Grandi.

L'equazione cartesiana:

$$y = a^3 / (x^2 + a^2)$$

può verificarsi con l'equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= a \cot \psi \\ y &= a \sin^2 \psi \end{aligned}$$

infatti: $\cot \psi = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \psi}}{\sin^2 \psi} = \frac{\sqrt{1 - y/a}}{y/a}$ cioè: $\frac{y}{a} \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y}{a}$

da cui: $y = a^3 / (x^2 + a^2)$

Se cerchiamo l'equazione in polari trasformando

l'equazione cartesiana: $\rho \sin \theta = a^3 / (\rho^2 \cos^2 \theta + a^2)$

si ha $\rho^3 (\sin \theta \cos^2 \theta) + \rho (a^2 \sin \theta) - a^3 = 0$ equazione di 3° in ρ

possiamo scrivere:

$$\rho^3 \operatorname{sen} \theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3 \theta + a^2 \rho \operatorname{sen} \theta - a^3 = 0$$

e cioè:

$$\operatorname{sen}^3 \theta - \left(\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2} \right) \operatorname{sen} \theta - \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 = 0$$

equazione
di 3° in
 $\operatorname{sen} \theta$.

se cerchiamo di ricavare le equazioni polari dalle parametriche abbiamo:

$$(x^2 + y^2) = \rho^2 = \frac{\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^4 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\operatorname{sen}^3(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \operatorname{tang} \theta = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi$$

In ogni caso la correlazione: $\rho = f(\theta)$ non è esplicitabile.

derivando l'equazione cartesiana si ha:

$$y' = - \left(\frac{a^3}{(x^2 + a^2)^2} \right) 2x = - \frac{2a^3 x}{(x^2 + a^2)^2} = - \frac{2a}{\frac{x}{a^2} + \frac{1}{x}}$$

$$y'' = -2a^3 \left[\frac{(x^2 + a^2) - x(2x)}{(x^2 + a^2)^2} \right] = +2a^3 \frac{x^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$\underline{y'' = 0 \text{ per } x = \pm a} \quad \underline{\text{punto di flesso}}$$

$$\text{L'area della versiera } A = \int y dx = a^3 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} =$$

$$A = a^2 \int_0^x \frac{dx/a}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left[a^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{per } x = a; \quad A = \frac{a^2 \pi}{4} \\ \text{per } x = \infty \quad A = \frac{a^2 \pi}{2} \end{array}$$

$$\text{per } x \quad a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx/a}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \boxed{A = a^2 \pi} \quad \text{l'area compresa fra la versiera e l'asse delle ascisse}$$

è pari all'area del cerchio di raggio a

Per la costruzione grafica, tracciati gli assi ox, y , il cerchio di diametro a tangente lx in o , e la retta parallela ad x tangente il cerchio, ogni retta uscente da o determina N ed M e quindi P .

Curva serpentina

L'equazione cartesiana è:

$$y = \frac{abx}{a^2 + x^2}$$

ci chiamano la versione di Agnesi, solo la x al numeratore porta ad estendere la curva al campo delle $y < 0$

L'equazioni parametriche sono:

$$\begin{aligned} x &= a \cot(\varphi) \\ y &= b \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = a^2 \cot^2(\varphi) + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi ; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \theta = \frac{b}{a} \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\cot \varphi \operatorname{sen} \varphi}$$

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{b}{a} \operatorname{sen}^2 \varphi$$

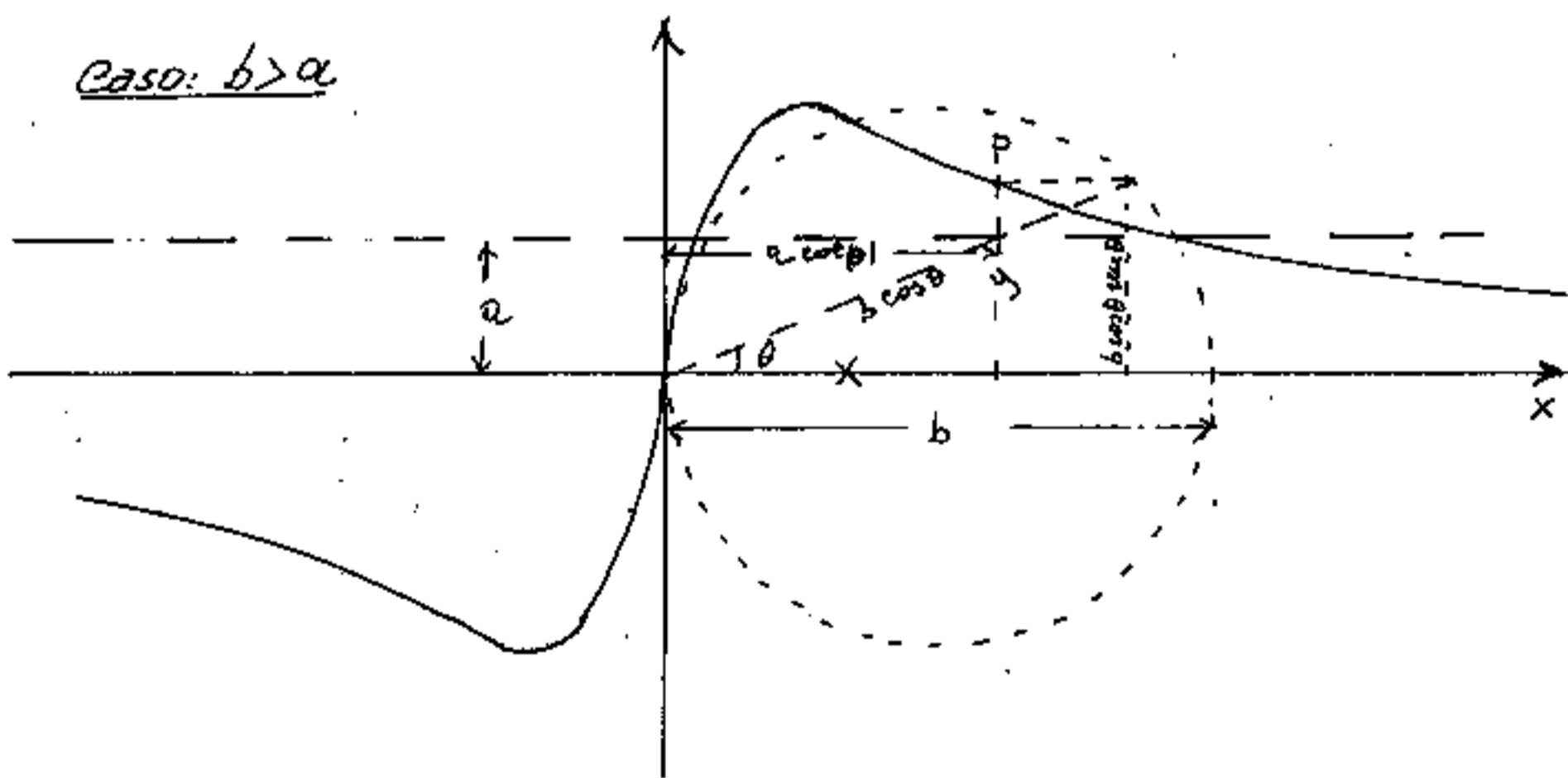
Se trasformiamo in polari le cartesiane: $\rho \operatorname{sen} \theta = \frac{ab \rho \cos \theta}{(a^2 + \rho^2 \cos^2 \theta)}$

$$\operatorname{sen}(\theta) a^2 + \rho^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos^2 \theta = ab \cos \theta$$

si ottiene l'equazione in polari

$$\rho^2 = \frac{a/b \cos(\theta) - a \operatorname{sen}(\theta)}{\cos \theta (\operatorname{sen} \theta \cos \theta)}$$

Caso: $b > a$



Curva Cruciforme

È una curva di equazione cartesiana

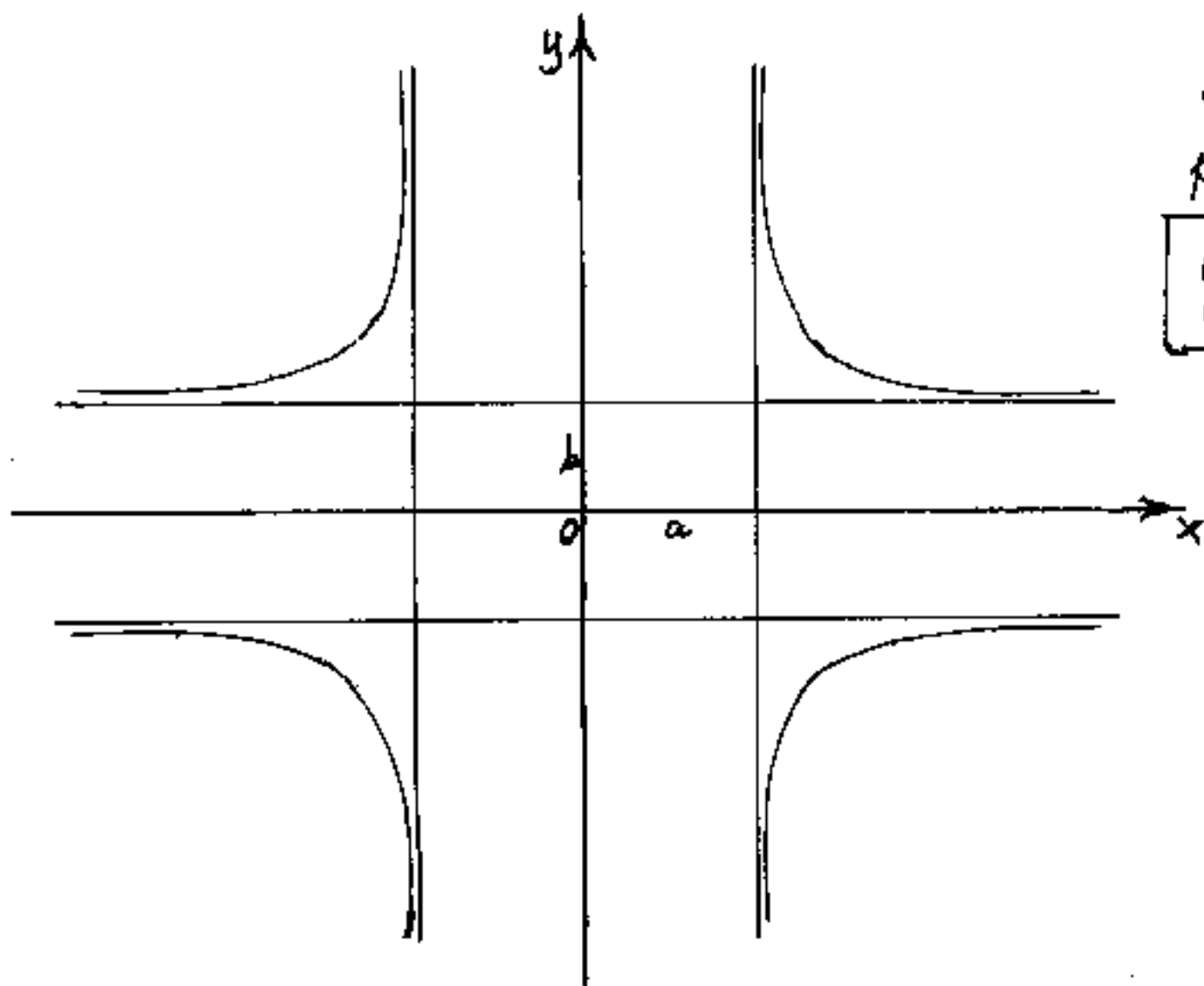
$$\boxed{a^2 y^2 + b^2 x^2 = x^2 y^2} \quad \text{se dividiamo per } x^2 y^2$$

otteniamo: $\boxed{\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1}$ equazione a termi

inversivi di quelli dell'ellisse.

$$\boxed{y = \pm \sqrt{\frac{b^2 x^2}{x^2 - a^2}}}$$

per $x = \pm a$ si ha $b^2/y^2 = 0$ analogamente per $y = \pm b$
 $a^2/x^2 = 0$, cioè le rette $x = \pm a$; $y = \pm b$ sono asintoti.



$$y = \frac{bx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

per $x = ka$

$$\boxed{y = b \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}}$$

Nell'origine si ha un punto isolato in quanto per $x=0$ ed $y=0$

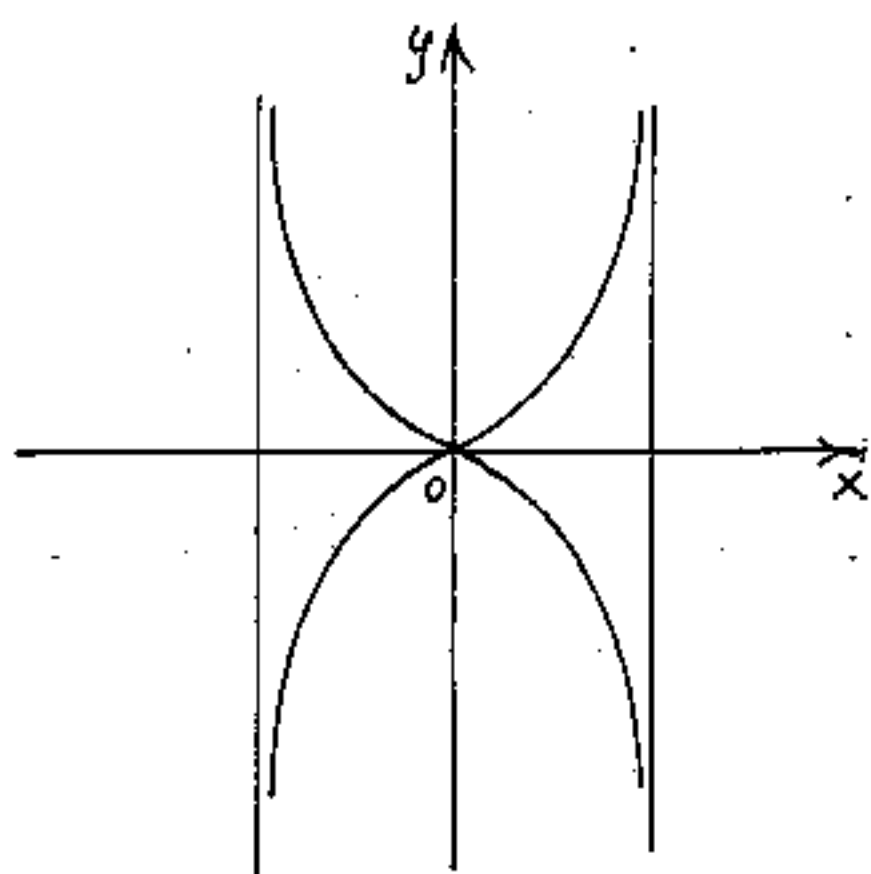
è rispettata l'equazione $a^2 y^2 + b^2 x^2 = x^2 y^2$; $(0+0=0)$, ma non è corretto infatti non è rispettata la forma $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ ($\infty + \infty = 1$?)

in forma parametrica: $\boxed{x = a/\cos \alpha; y = b/\sin \alpha}$

se $a=b$ la curva è detta cruciforme circolare.

cambiando segno alla formula della curva eruciforme si ottengono gli inversi dei simboli

rappresentanti l'iperbole e cioè:



$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$

equazione che può esplicitarsi in

$$y = \frac{bx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

in forma parametrica

si ha: $x = a/\cosh(t)$; $y = b/\sinh(t)$

per cui $\cosh^2(t) = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)$; $\sinh^2(t) = \left(\frac{b^2}{y^2}\right)$ e torna:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

ed: $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}$; $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \coth(t)$;

cioè quando $a=b$ allora: $\frac{y}{x} = \coth(t)$

ed anche il parametro: $t = \operatorname{argcoth}[y/x]$

$y/x = \operatorname{tanga} \alpha$; $t = \operatorname{argcoth}(\operatorname{tanga} \alpha)$

se poniamo: $\theta = 2\alpha$; $\coth(t) = \operatorname{tanh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ avremo:

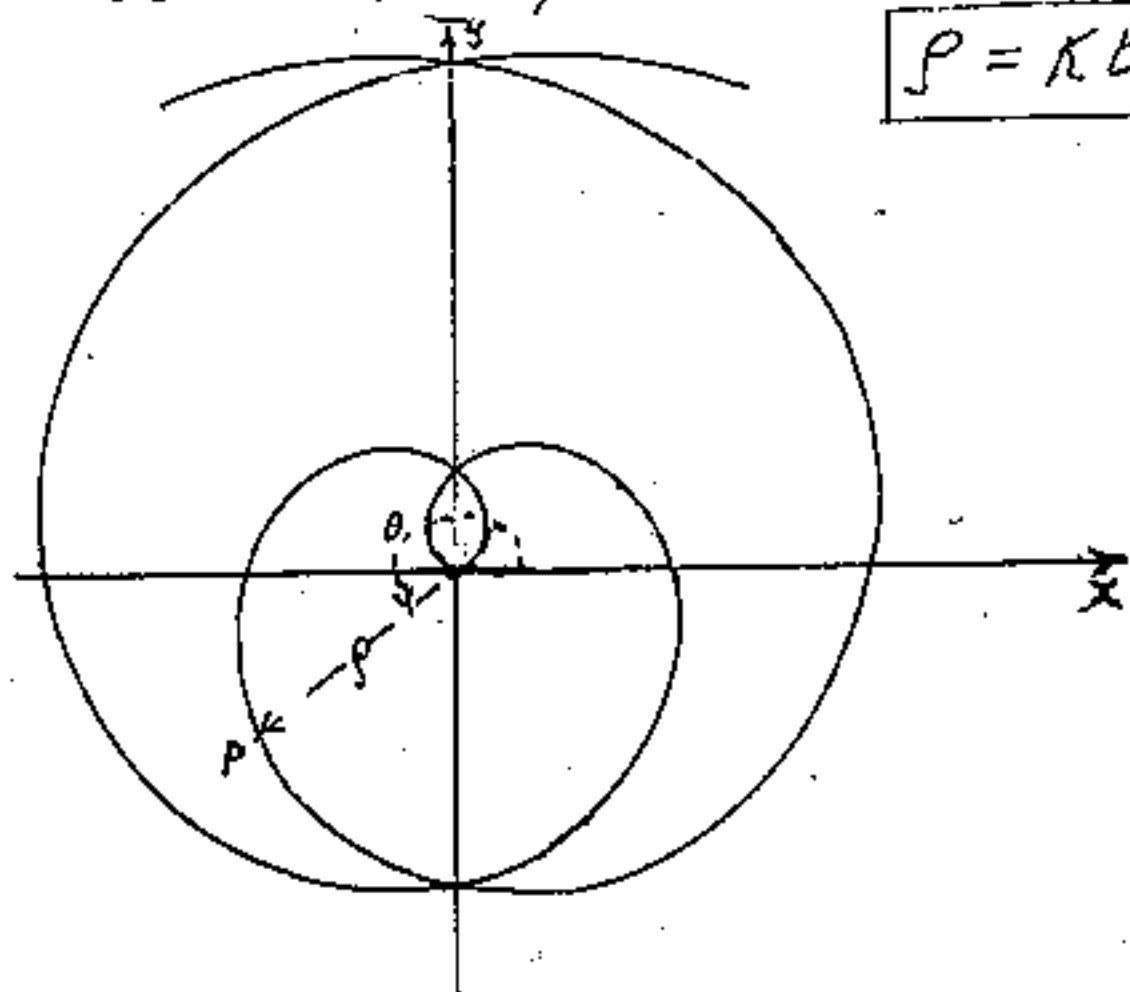
$$\operatorname{tanh}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \operatorname{tanga}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

cioè θ è la gudermaniana di λ .

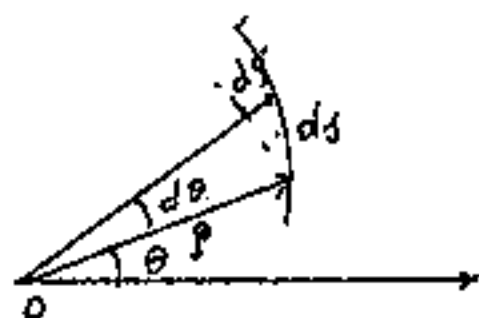
SPIRALE di ARCHIMEDE

L'equazione della spirale di Archimede in coordinate polari è:

$$\rho = k\theta$$



Ricordiamo che la lunghezza di un arco di curva in coordinate polari:



(tenendo conto di $d\rho$) è $ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\theta)^2 = (\rho'^2 + \rho^2) d\theta^2$

$$ds^2 = (k^2 + k^2\theta^2) d\theta^2 \quad \text{quindi:} \quad ds = (k\sqrt{1+\theta^2}) d\theta$$

per l'arco che varia da 0 a θ

$$s = k \int_0^\theta \sqrt{1+\theta^2} d\theta = k \int_0^\theta \frac{1+\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta$$

$$= k \left[\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} + \int_0^\theta \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \right] = (\text{vedi Vol. I integrali})$$

$$k \left[\ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \right]_0^\theta + \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{\theta d(\theta^2+1)}{\sqrt{1+\theta^2}} \quad ; \quad \left[\ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \right]_0^\theta + \frac{2}{2} \int_0^\theta \theta d(\sqrt{\theta^2+1}) =$$

$$k \left[\ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) + \theta \sqrt{\theta^2+1} \right]_0^\theta - \int_0^\theta \sqrt{\theta^2+1} d\theta \quad \text{da cui portando nel I° membro:}$$

$$s = \frac{k}{2} \left[\ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) + \theta \sqrt{1+\theta^2} \right]_0^\theta$$

L'area fra la curva e il raggio vettore a partire dall'origine è data da:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta K^2 \theta^2 d\theta = \left[\frac{K^2 \theta^3}{6} \right]_0^\theta$$

$$A = \left[\frac{\rho^3}{6K} \right]_{\rho_1}^{\rho_2} ; A = \frac{(K\theta)^2 \theta}{6} ; \boxed{A = \frac{\rho^2 \theta}{6}}$$

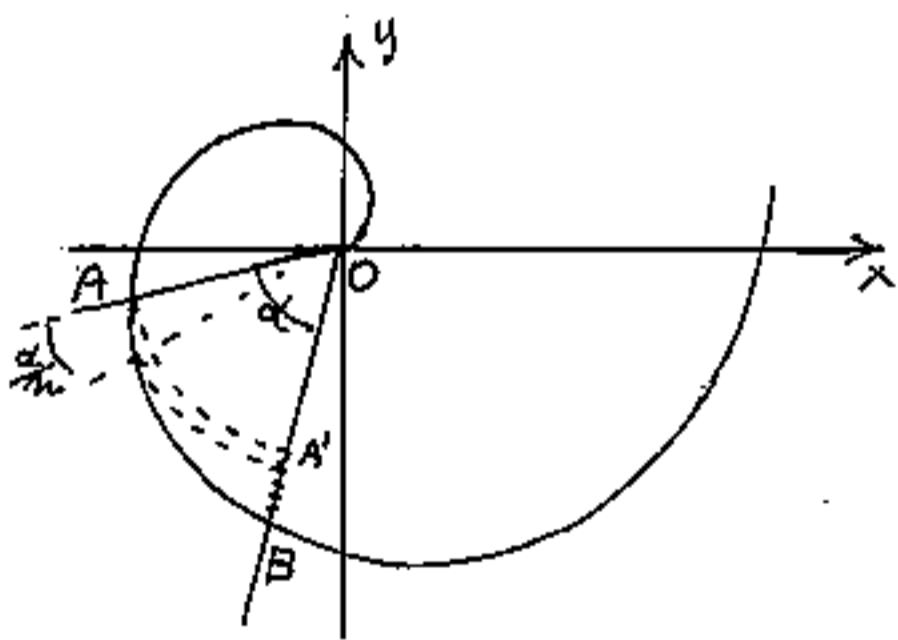
Cioè vale $\frac{1}{3}$ dell'area del settore circolare di raggio ρ e ampiezza θ .

(vedasi calcolo delle aree in coordinate polari)

L'area della prima spira: $\boxed{A_1 = \frac{4}{3} \pi^3 K^2}$

L'equazione in cartesiane può scriversi: $\boxed{x^2 + y^2 = K^2 \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{y}{x} \right)}$

La spirale di Archimede è la traiettoria di un punto che si muove con velocità costante, su una retta che ruota pure con velocità angolare costante.



La spirale di Archimede è la linea che permette di dividere un angolo in n parti uguali. Riportato l'angolo \widehat{AOB} fra due raggi ρ_1 e ρ_2 ,

qualsiasi, riportata A su \overline{OB} in A' ove $A'B = \rho_2 - \rho_1$, si divide $\overline{A'B}$ in n parti uguali e si riportano sull'arco \widehat{AB} segnando i punti di divisione dei raggi che dividono l'angolo.

La spirale di Archimede è anche una curva quadratrice, infatti: quando θ ha fatto il primo mezzo giro ($\theta = \pi$) abbiamo: $\boxed{\pi = \frac{\rho}{K}}$

La costante K è esprimibile per esempio in cm/rad., quindi se conseriamo il K unitario per esempio 2 cm/rad. basterà uno scalimetro 1:50 per leggere la lunghezza dei raggi ρ in radianti di θ .

Inversamente per sapere in quale scalimetro occorre leggere i ρ basta misurare in arcisse il primo mezzo giro che deve risultare pari a π . (la figura iniziale è per scalimetri 1:200 m.)

Archimede chiamò: hélix la suspirale.

Il Grandi sviluppandola su una sfera studiò curve che chiamò: Celie.

$$\begin{cases} X = \rho \cos(\theta) & ; & \begin{cases} X = K\theta \cdot \cos(\theta) & ; & \begin{cases} X = K\rho \cos\theta \\ Y = K\rho \sin\theta \end{cases} \end{cases} \\ Y = \rho \sin(\theta) & ; & \begin{cases} Y = K\theta \sin(\theta) & ; & \end{cases} \end{cases}$$

sono le equazioni cartesiane parametriche

$$\rho \cos(\theta) = \frac{X}{K} \quad \theta = \arccos\left[\frac{X}{K}\right] \quad \text{quindi} \quad \boxed{Y = K\rho \sin\left[\arccos\left[\frac{X}{K}\right]\right]}$$

è l'equazione cartesiana in forma esplicita.

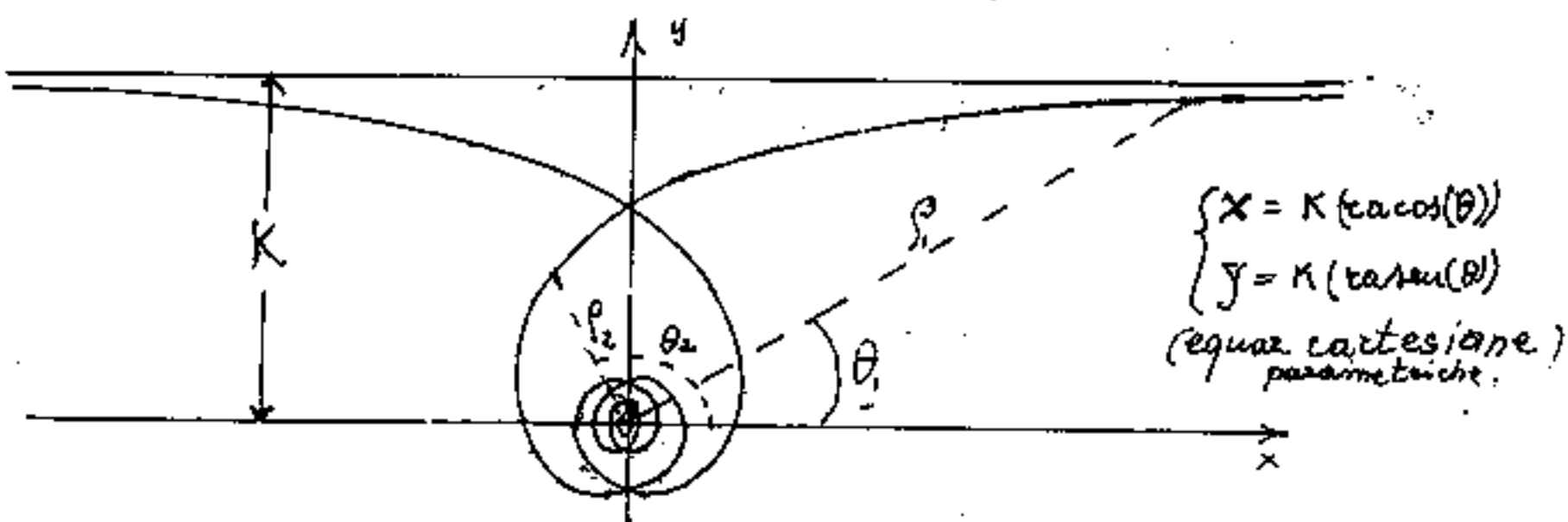
Spirale iperbolica

L'equazione in coordinate polari è: $\rho = \frac{\kappa}{\theta}$

(con $\kappa > 0$). Appare subito il confronto con la spirale di Archimede: "La spirale iperbolica è la spirale degli inversi di θ della spirale di Archimede"

Poiché nella spirale di Archimede, quando θ varia da 0 ad 1 si hanno tutti i valori della spirale iperbolica per θ variabile da ∞ ad 1, cioè il valore $\frac{\pi}{n}$ di θ nella spirale di Archimede corrisponde a $\frac{\pi}{n\kappa}$ nella spirale iperbolica (cioè a parità di κ). Però, nella spirale di Archimede il punto parte dall'origine degli assi e va verso ∞ . Nella spirale iperbolica il punto parte da $\rho = \infty$ e va verso il centro assi.

Abbiamo già visto che la retta $\rho \cos \theta = \kappa$ parallela all'asse polare è un asintoto che dista κ da essa; e che l'origine o polo, è un punto asintotico.



$$ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2) d\theta^2 = \left(\frac{\kappa^2}{\theta^2} + \frac{\kappa^2}{\theta^4} \right) d\theta^2 = \frac{\kappa^2}{\theta^4} (\theta^2 + 1) d\theta^2$$

e cioè $ds = \kappa \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2} d\theta$

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2} d\theta = \kappa \left[-\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta} + \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Area della spirale iperbolica compresa fra la curva ed i raggi vettori ρ_1 e ρ_2 di argomento θ_1 e θ_2

$$A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta =$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{K^2}{r^2}\right) d\theta = \frac{K^2}{2} \left[-\frac{1}{\theta}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$A = \frac{K^2}{2} \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}\right)$$

$$A = \frac{K}{2} (\rho_1 - \rho_2)$$

Quando: $\theta_2 \rightarrow \infty$, cioè quando la spirale tende al punto asintotico costituito dal centro assi (Polo in polari)

$$A = \frac{K^2}{2\theta_1}$$

Se Poniamo: $\theta_1 = \pi$; $\theta_2 = 3\pi$; $A = \frac{K^2}{2\pi} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) = \frac{K^2}{3\pi}$

$\theta_1 = 3\pi$; $\theta_2 = 5\pi$; $A = \frac{K^2}{2\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{K^2}{15\pi}$

$\theta_1 = 5\pi$; $\theta_2 = 7\pi$; $A = \frac{K^2}{2\pi} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{K^2}{35\pi}$

.....
 $\theta_1 = (2m-1)\pi$; $\theta_2 = (2m+1)\pi$; $A = \frac{K^2}{2\pi} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1}\right) = \frac{K^2}{(4m^2-1)\pi}$

abbiamo costruito una serie convergente: $\left\{\frac{1}{4m^2-1}\right\}$ ove:

il valore della serie è $\frac{1}{2}$ per $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4m^2-1} = \frac{1}{2}$$

Serie della spirale iperbolica.

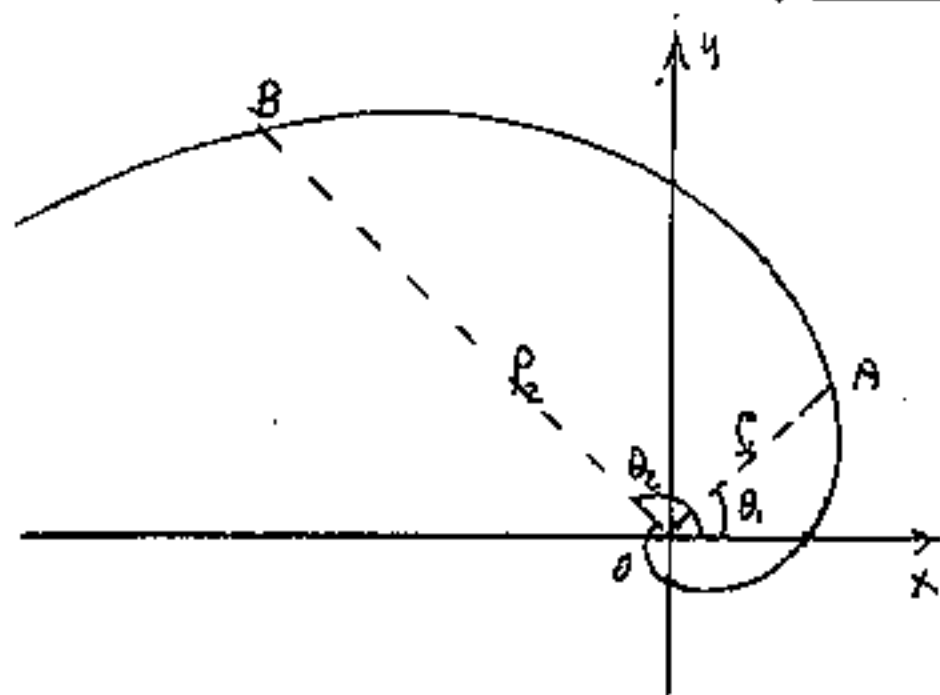
- La sottotangente polare è costante e vale K .

Spirale logaritmica (o equiangolare)

Nel I vol, alle costruzioni grafiche, abbiamo già accennato ad una curva che generalizza la spirale logaritmica.

L'equazione in coordinate polari, della spirale logaritmica è:

$$\rho = e^{\kappa\theta}$$



Abbiamo già osservato che, se poniamo $\kappa = \frac{2}{\pi}$ si ha: per $\theta = 0$; $\rho = 1$; per $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\rho = e$; per $\theta = \pi$; $\rho = e^2$ e così via, (vedi vol I).

$$ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2) d\theta^2 = (e^{2\kappa\theta} + \kappa^2 e^{2\kappa\theta}) d\theta^2 \quad \text{cioè: } ds = e^{\kappa\theta} \sqrt{1 + \kappa^2} d\theta$$

$$\text{cioè la lunghezza dell'arco } \widehat{AB} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{\kappa\theta} (\sqrt{1 + \kappa^2}) d\theta$$

$$\widehat{AB} = \frac{\sqrt{1 + \kappa^2}}{\kappa} (e^{\kappa\theta_2} - e^{\kappa\theta_1})$$

$$\widehat{AB} = (\rho_2 - \rho_1) \frac{\sqrt{1 + \kappa^2}}{\kappa}$$

Si ha così un'altra particolarità nella spirale logaritmica, e cioè che la lunghezza degli archi è proporzionale alla differenza dei raggi vettori.

- Abbiamo già visto che il polo o è un punto asintotico.

L'area della spirale logaritmica, compresa fra la curva ed i raggi ρ_1 e ρ_2 sarà:

$$A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{2k\theta} d\theta = \frac{1}{4k} [e^{2k\theta_2} - e^{2k\theta_1}]$$

$$A = \frac{1}{4k} (\rho_2^2 - \rho_1^2)$$

Si noti: $\rho = e^{k\theta}$; per $\theta = 0$; $\rho = 1$ per $\theta < 0$ al limite

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} (\rho) = 0 \quad \text{perci\u00f2} \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} (A) = \frac{\rho^2}{4k} \quad \text{approssimata}$$

la somma delle aree delle spize da zero a ρ ...
 ove la prima spiza a partire da ρ \u00e9 calcolata una volta la
 successiva due volte, poi tre volte fino alla spiza nulla nel polo calco-
 lata infinite volte.

La spirale logaritmica incontra il raggio vettore ρ sotto un angolo costante $w = \text{arccotg}(k)$.

$$\text{Infatti: } \cotg w = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{k e^{k\theta}}{e^{k\theta}} = k. \quad (\text{vedasi tangente in polari})$$

La lunghezza L dell'arco dal polo a ρ , essendo nel polo $\rho_1 = 0$

$$L = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \rho \quad \text{ma: } k = \cotg w$$

$$L = \frac{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 w}{\sin^2 w}}}{\cos w / \sin w}$$

$$L = \frac{\rho}{\cos w}$$

Mediante la spirale logaritmica si pu\u00f2 risolvere grafi-
 camente le radici ennesime: $b = \sqrt[n]{a}$. Basta dividere in
 n parti uguali l'angolo compreso fra $\rho = 1$ e $\rho = a$
 il raggio $\rho_{\frac{1}{n}}$ che unisce 0 col punto $\frac{1}{n}$ cos\u00ec $\rho_{\frac{1}{n}} = b$. (Per
 dividere l'angolo ci si pu\u00f2 avvalere della spirale di Archimede.)

Spirale parabolica

La spirale parabolica ha la caratteristica di avere il raggio ρ^2 al quadrato nella proporzionalità K con l'argomento θ . Cioè:

$$\rho^2 = K\theta$$

che possiamo anche scrivere:

$$\rho = \sqrt{K\theta}$$

in coordinate cartesiane (parametriche in θ) l'equazione diventa:

$$\begin{cases} X = \sqrt{K\theta} \cos(\theta) \\ Y = \sqrt{K\theta} \sin(\theta) \end{cases}$$

Questa spirale che è una prima generalizzazione della spirale di Archimede, e che, nel caso più ampio, può scriversi

$$\rho^m = K\theta^n$$

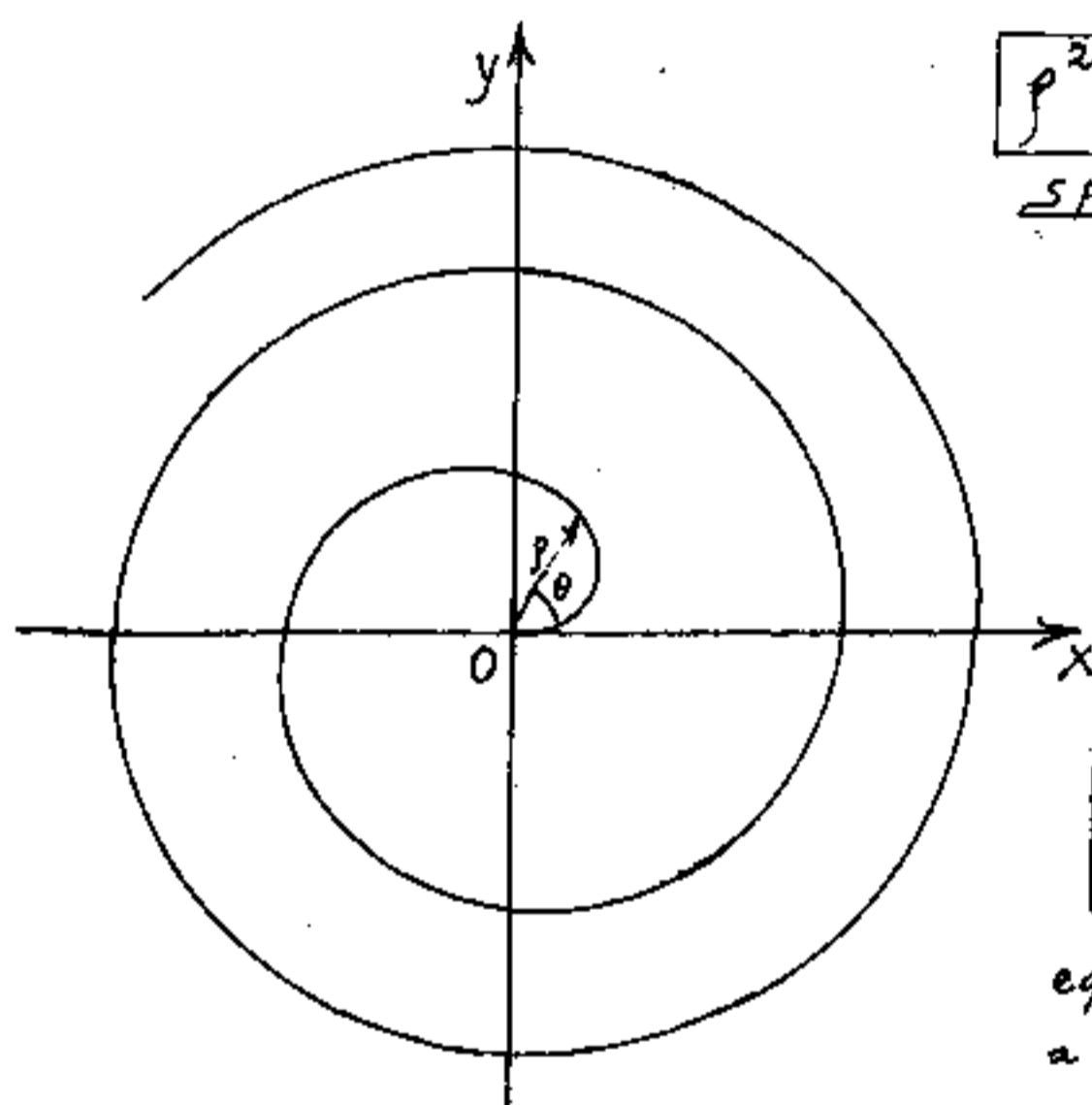
con $m=+1$ ed $n=+1$, si ha la spirale di Archimede. Con $m=+1$ ed $n=-1$ si ha l'iperbolica (attenzione: $m=-1$ ed $n=+1$ è ancora l'iperbolica ove la costante K è $\frac{1}{K}$).

Così la spirale parabolica ove $m=2$ ed $n=1$ se poniamo $K=a^2$ diventa la spirale di Fermat.

Se: $m=2$; $n=-1$; $k=a^2$; si ha il litus

In generale la spirale parabolica è diseg-
nata con un solo ramo positivo, mentre la spira-
le di Fermat considera anche il valore negativo di ρ ,
cioè prende il doppio segno delle radici.

A maggior chiarimento, presentiamo nel seguito,
sia la spirale di Fermat, sia il litus.



$$\rho^2 = K\theta$$

spirale

parabolica

$$\begin{cases} x^2 = K\theta \cos^2 \theta \\ y^2 = K\theta \sin^2 \theta \end{cases}$$

da cui:

$$x^2 + y^2 = K\theta$$

equazione di un cerchio
a raggio variabile: $R = \sqrt{K\theta}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \frac{K}{2\sqrt{K\theta}} \cos(\theta) - \sqrt{K\theta} \sin(\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = \frac{K}{2\sqrt{K\theta}} \sin(\theta) + \sqrt{K\theta} \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{K}{2} \sin \theta + \cos \theta}{\frac{K}{2} \cos \theta - \sin \theta}$$

Si noti che se avessimo: $x^2 + y^2 = K^2 \theta^2$, avrem-
mo che $x^2 + y^2 = \rho^2 = K^2 \theta^2$ ed estraendolo la ra-
dice torna: $\rho = K\theta$ (spirale di Archimede)

Il calcolo dell'area è estremamente semplice.

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} K\theta d\theta = \left[\frac{1}{4} K\theta^2 \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$A_{0-\pi/2} = K(0,616850275)$$

$$A_{0-\pi} = K(2,4674011)$$

$$A_{0-\pi/2} = K(5,551652476)$$

$$A_{0-3\pi} = K(9,86960440)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{0-\pi/2} = K(0,616850275) \\ A_{0-\pi} = K(2,4674011) \end{array} \right\} A_{\pi/2-\pi} = (1,850550825) K$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{0-\pi} = K(2,4674011) \\ A_{0-\pi/2} = K(5,551652476) \end{array} \right\} A_{\pi-3\pi/2} = (3,084251375) K$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{0-\pi/2} = K(5,551652476) \\ A_{0-3\pi} = K(9,86960440) \end{array} \right\} A_{\pi/2-3\pi} = (4,31795) K$$

volendo l'area coperta senza sovrapposizioni l'integrale va esteso con intervallo 2π

$$A = \frac{K}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} \theta d\theta \quad \text{oppure:} \quad A = \frac{K}{2} \int_{\theta_1-2\pi}^{\theta_1} \theta d\theta$$

(quando $\theta_2 > 2\pi$.)

La lunghezza della \bar{l}

$$l = \int_{\pi}^{\theta_2} \rho d\theta$$

$$l = \sqrt{K} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\theta} d\theta = \frac{\sqrt{K}}{3/2} \left[\theta^{3/2} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

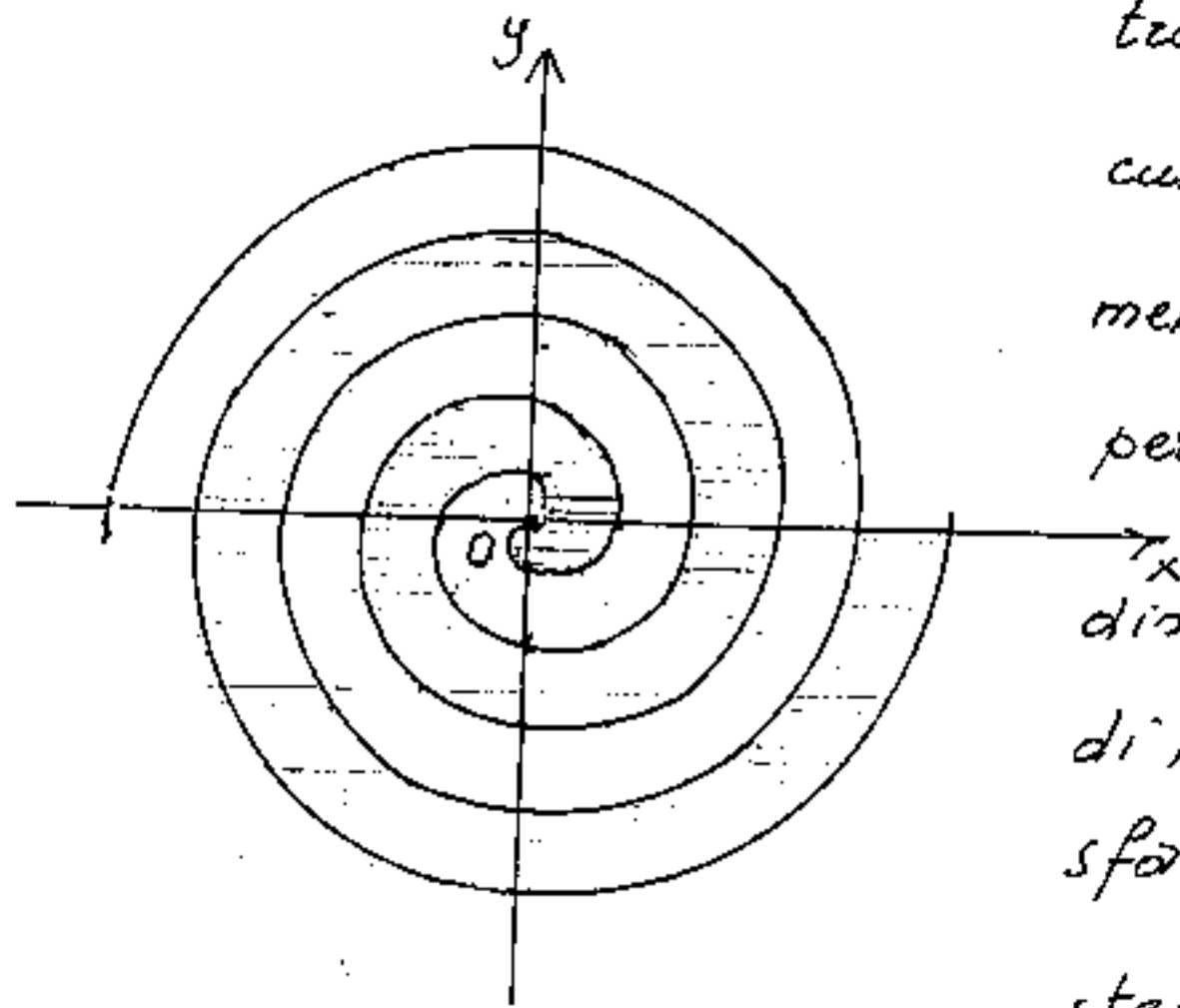
$$l_{0-\pi/2} = \frac{\sqrt{K}}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} = \sqrt{K} (0,656233747)$$

$$l_{0-2\pi} = \frac{\sqrt{K}}{3} (2\pi)^{3/2} = \sqrt{K} (5,249869982) = 8 \left(l_{0-\pi/2} \right)$$

spirale di Fermat

L'equazione della spirale di Fermat è $\rho^2 = a^2 \theta$

cioè: $\rho = \pm a \sqrt{\theta}$



Si noti che le due linee tracciate da $+\rho$ e $-\rho$ i cui punti sono diametralmente opposti, finiscono per essere due linee equidistanti, cioè due spirali di Archimede equiverse sfasate di π ; ove sullo stesso raggio la loro

distanza è " $a \cdot \pi$ ". Cioè la spirale di Fermat, rappresenta due strisce di uguale spessore che si avvolgono a spirale l'una sull'altra.

LITUS

Anche la linea curva LITUS è una spirale ed ha per equazione:

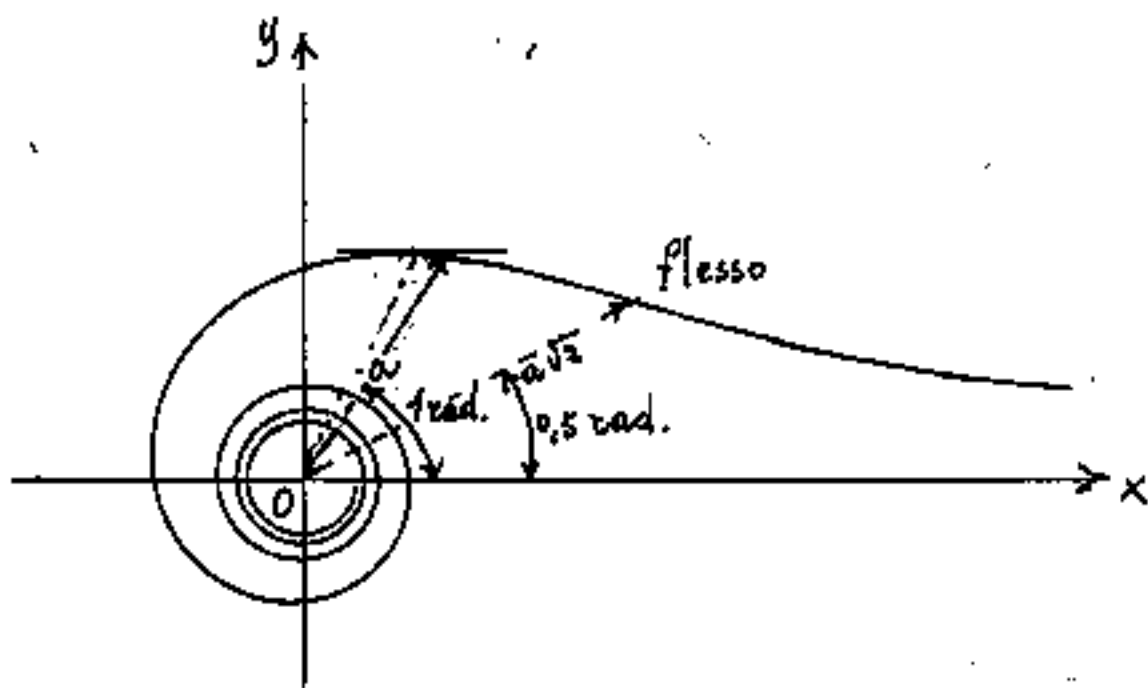
$$\int^2 \theta = a^2$$

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\theta) / \sqrt{\theta} \\ y &= a \sin(\theta) / \sqrt{\theta} \end{aligned}$$

in coordinate
polari

(in cartesiane)
parametriche

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$$



per $\theta = 0$; $\rho = \infty$
l'asse polare è un
asintoto:

per $\theta \rightarrow \infty$; $\rho = 0$

il polo 0 è un punto asintotico ; $\rho = a$; per $\theta = 1 \text{ rad.}$
($\theta = 57^\circ 17' 41,81$). $\rho = a \theta^{-\frac{1}{2}}$; $\rho' = a(-\frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}})$;

$$\rho'' = \frac{3}{4} a \theta^{-\frac{5}{2}}$$

La tangente orizzontale si ha quando $\frac{dy}{dx} = 0$
cioè quando: $\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta = 0$

$$\tan \theta = -\frac{\rho}{\rho'} = \frac{-a/\sqrt{\theta}}{-\frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}} = +2\theta$$

$$\frac{\tan \theta}{\theta} = \tan \theta = 2$$

Vi sono infiniti valori di $\arg \tan \theta = 2$; $\theta_1 = 1,165551186 \text{ rad.}$

$\theta_1 = 66^\circ 46' 54,25$; $\theta_2 = 4,60421677 \text{ rad.} = \theta_2 = 263^\circ 48' 7,88$; ecc,

che al limite tendono a: $\theta_{n1} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.} = 90^\circ$; $\theta_{n2} = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

I punti di flesso in coordinate polari

Per calcolare la posizione del flesso nel Litus, occorre risolvere il problema dei flessi in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{da cui:}$$

$$\begin{cases} dy = d\rho \sin \theta + \rho \cos(\theta) d\theta \\ dx = d\rho \cos \theta - \rho \sin(\theta) d\theta \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} dy = d\rho \sin \theta + \rho \cos(\theta) d\theta \\ dx = d\rho \cos \theta - \rho \sin(\theta) d\theta \end{cases}} \right\} \frac{dy}{dx} = \boxed{\text{tang} \alpha = \frac{d\rho \sin \theta + \rho \cos(\theta) d\theta}{d\rho \cos \theta - \rho \sin(\theta) d\theta}}$$

tang α è la "pendenza" della linea in quel punto,

cioè: $\text{tg}(\alpha) =$ coefficiente angolare della retta tangente alla linea (in quel punto).

Essendo: $d(\text{tang}(\alpha))$ la variazione di pendenza se $d(\text{tang}(\alpha)) \gtrless 0$ si ha rispettivamente:

$$\begin{aligned} d(\text{tg} \alpha) > 0 &\Rightarrow \text{curvatura verso l'alto (min)} \\ d(\text{tg} \alpha) = 0 &\Rightarrow \text{punto di flesso} \quad \text{(orizzontale)} \\ d(\text{tg} \alpha) < 0 &\Rightarrow \text{curvatura verso il basso (max)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} d(\text{tg} \alpha) > 0 &\Rightarrow \text{curvatura verso l'alto (min)} \\ d(\text{tg} \alpha) = 0 &\Rightarrow \text{punto di flesso} \quad \text{(orizzontale)} \\ d(\text{tg} \alpha) < 0 &\Rightarrow \text{curvatura verso il basso (max)} \end{aligned}} \right\} \text{tang} \alpha = 0$$

Poiché la curva è definita da:

$$\rho = f(\theta) \quad \text{i (inversamente)} \quad \theta = \varphi(\rho)$$

sostituendo nell'espressione di $\text{tang} \alpha$ possiamo calcolare $d(\text{tang} \alpha)$ in funzione di ρ oppure in funzione di θ .

È bene ricordare che $\rho = f(\theta)$ spesso dà un solo valore per ogni θ mentre $\theta = \varphi(\rho)$ può dare più valori ($\theta + 2k\pi$).

Esprimiamo: $\text{tang}(\alpha) = \frac{\text{sen } \theta + \rho \cos \theta \frac{d\theta}{d\rho}}{\cos \theta - \rho \text{sen } \theta \frac{d\theta}{d\rho}}$

Poiché nella curva Litus: $\theta = \left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)$ e $\rho \frac{d\theta}{d\rho} = \rho \frac{-2a^2}{\rho^3}$

avremo:

$$\text{tang}(\alpha) = \frac{\text{tang}(\theta) - \frac{2a^2}{\rho^2}}{1 + \frac{2a^2}{\rho^2} \text{tang}(\theta)}$$

cioè:

$$\text{tang}(\alpha) = \frac{\text{tang}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{2a^2}{\rho^2}}{1 + \frac{2a^2}{\rho^2} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}$$

derivando rispetto a ρ

$$\frac{d(\text{tang}(\alpha))}{d\rho} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\right)\left(\frac{-2a^2}{\rho^3}\right) + \frac{4a^2}{\rho^3} \left(1 + \frac{2a^2}{\rho^2} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right) - \left[\text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{2a^2}{\rho^2}\right] \left(\frac{-4a^2}{\rho^3} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) + \frac{2a^2}{\rho^2} \frac{\left(\frac{-2a^2}{\rho^3}\right)}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\right)}{\left[1 + \frac{2a^2}{\rho^2} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right]^2}$$

$$\frac{d(\text{tang}(\alpha))}{d\rho} = \frac{\left[\frac{-2a^2}{\rho^3 \cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)} + \frac{4a^2}{\rho^3} + \frac{8a^4}{\rho^5} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right] - \left[\frac{-4a^2}{\rho^3} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) + \frac{8a^4}{\rho^5} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{4a^4}{\rho^3} \frac{\text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)} + \frac{8a^6}{\rho^7 \cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\right]}{\left[1 + \frac{2a^2}{\rho^2} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right]^2}$$

$$\frac{d(\text{tg}(\alpha))}{d\rho} = \frac{\frac{1}{\rho^3} \left(\frac{-2a^2}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)} + 4a^2 + 4a^2 \text{tg}^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{8a^6}{\rho^4 \cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\right)}{\left(1 + \frac{2a^2}{\rho^2} \text{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right)^2} =$$

ponendo il numeratore = 0 $\rightarrow \frac{d(\text{tg}(\alpha))}{d\rho} = 0$ (flesso)
e moltiplicando per $\left(\rho^3 \cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right)$ si ha:

$$-2a^2 + 4a^2 \left(\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right) = \frac{8a^6}{\rho^4}$$

$$\rho^4 = 4a^4 \quad \text{da cui: } \boxed{\rho = a\sqrt{2}}$$

$\left(\theta = \frac{1}{2} \text{ rad} = 28^\circ 38' 52''{,}4\right)$ il raggio del punto di flesso è la diagonale del quadrato di lato a ed è bisettore dell'angolo fra o ed e il raggio = a .

Raggio di Curvatura:

$$R = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{(r^2 + 2r'^2 - rr'')} \quad (\text{in funzione di } r)$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}; \quad r^2 = \frac{a^2}{\theta}; \quad r' = \frac{-2a}{\theta\sqrt{\theta}}; \quad r'^2 = \frac{4a^2}{\theta^3}; \quad r'' = \frac{5a}{\theta^2\sqrt{\theta}}; \quad rr'' = \frac{5a^2}{\theta^3}$$

$$R = \frac{(\frac{4a^2}{\theta^3} + \frac{a^2}{\theta})^{3/2}}{(\frac{a^2}{\theta} + \frac{8a^2}{\theta^3} - \frac{5a^2}{\theta^3})}$$

$$R = a \frac{(4/\theta + \theta)^{3/2} \cancel{(\frac{1}{\theta^3})}}{(\theta^2 + 2) \cancel{\theta^3}} = \frac{4 + \theta^2}{\theta} \frac{\sqrt{4 + \theta^2}}{(2 + \theta^2)}$$

$$\boxed{R = a \frac{(4/\theta + \theta)^{3/2}}{(2 + \theta^2)}} \quad (\text{in funzione di } \theta)$$

$$\text{per } \theta = \frac{1}{2} \text{ rad.} \quad R = a \frac{(8 + \frac{1}{2})^{3/2}}{(2 + \frac{1}{4})} = (11,0140)a$$

$$\theta = 1 \text{ rad} \quad R = a \frac{(5)^{3/2}}{3} = (3,72678)a$$

$$\theta = \pi \quad R = a \frac{(4/\pi + \pi)^{3/2}}{(2 + \pi^2)} = (0,7815109)a$$

$$\text{Area:} \quad \boxed{A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta} = \frac{a^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\theta} d\theta$$

$$\boxed{A = \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}$$

per: $\theta_1 = \frac{1}{2} \text{ rad}$; $\theta_2 = (2\pi + \frac{1}{2}) \text{ rad}$; (1 giro senza sovrapposizioni)

$$A = \frac{a^2}{2} \ln(4\pi + 1) = a^2 (1,303797)$$

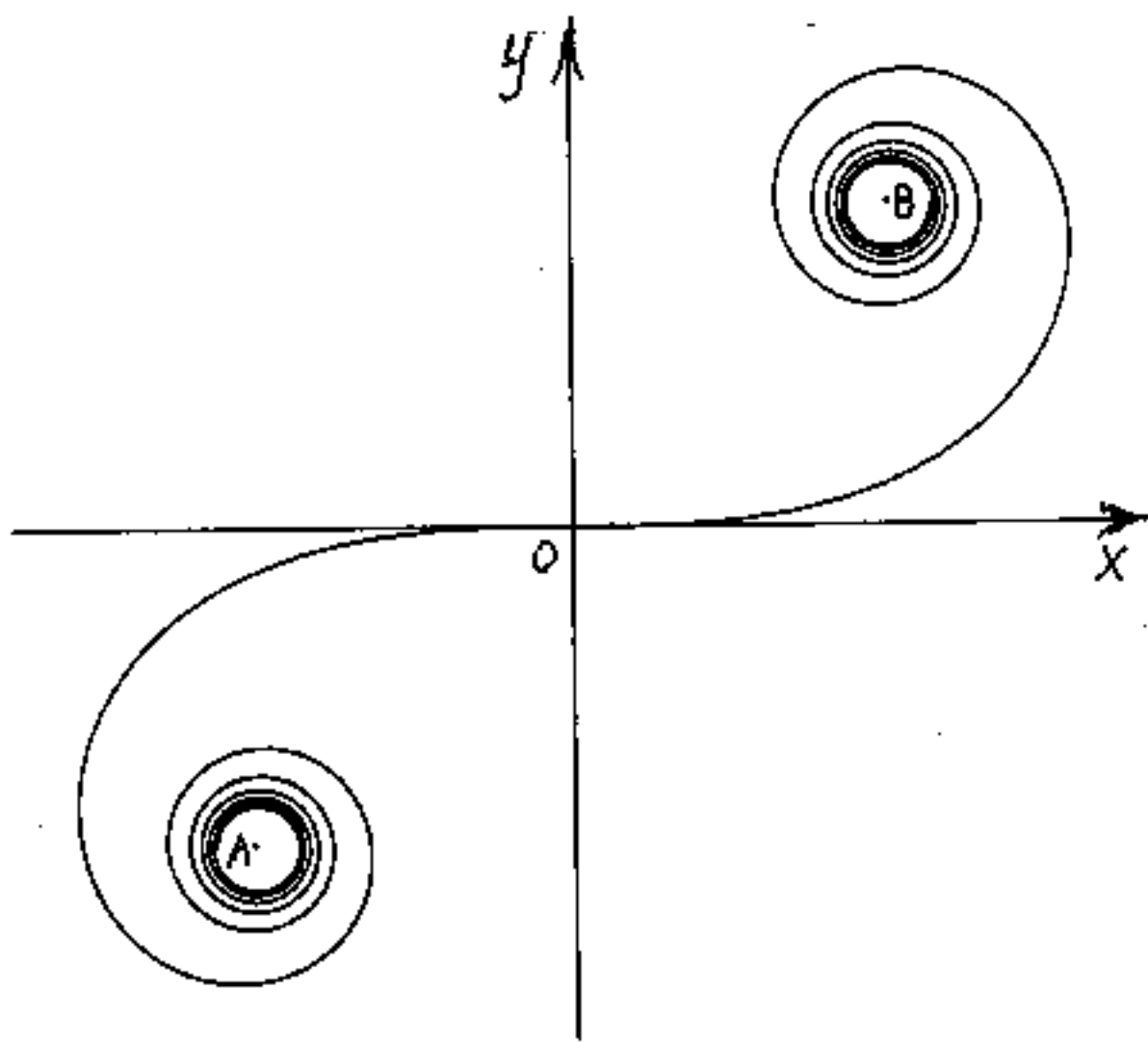
$$\text{per } \theta_1 = \pi; \quad \theta_2 = 3\pi \rightarrow A = \frac{a^2}{2} \ln(3) = a^2 (0,549306)$$

$$\text{per } \theta_1 = (0,52486842)\pi; \quad \theta_2 = \theta_1 + 2\pi \rightarrow A = \frac{a^2 \pi}{4} \quad (\text{angolo di diametro } a)$$

La Clotoide - Spirale di Cornu

Curva trascendente, detta anche spirale di Cornu, definita come: "Luogo geometrico dei punti per i quali è costante il prodotto fra il raggio di curvatura e la lunghezza dell'arco misurata da una origine fissa".

Si suole anche dire: "Linea il cui raggio di curvatura R è inversamente proporzionale all'arco s ".
O meglio: "Linea la cui curvatura è proporzionale alla lunghezza della linea misurata dall'origine degli assi". (L'origine degli assi è nel punto di flesso ove la curvatura inverte il segno).



$$R \cdot s = \frac{a^2}{\pi}$$

Le equazioni cartesiane parametriche sono:

$$\begin{cases} x = a \int_0^s \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \\ y = a \int_0^s \cos \frac{\pi t^2}{2} dt \end{cases}$$

(Sono integrali di Fresnel)

Via via che si discosta dall'origine la lunghezza aumenta e con essa la curvatura, le spire sono sempre più piccole fino al limite infinito ove A e B sono punti asintotici. (di coordinate: $\pm a/2$)

Il nome Clotoide (dal greco: $\chi\lambda\acute{\omega}\nu\tau\omega$ = filare) è dovuto al matematico italiano Ernesto Cesàro.

Il problema di trovare curve aventi le proprietà della Clotoide risale a Giacomo Bernoulli.

La linea è stata utilmente usata per raccordi ferroviari (l'alta curvatura a bassa velocità che diminuisce all'aumentare della velocità, e viceversa).

La curva interessa la teoria matematica della luce (A. Cornu) e può considerarsi un caso particolare delle curve di Lissajous rappresentate dalle equazioni:

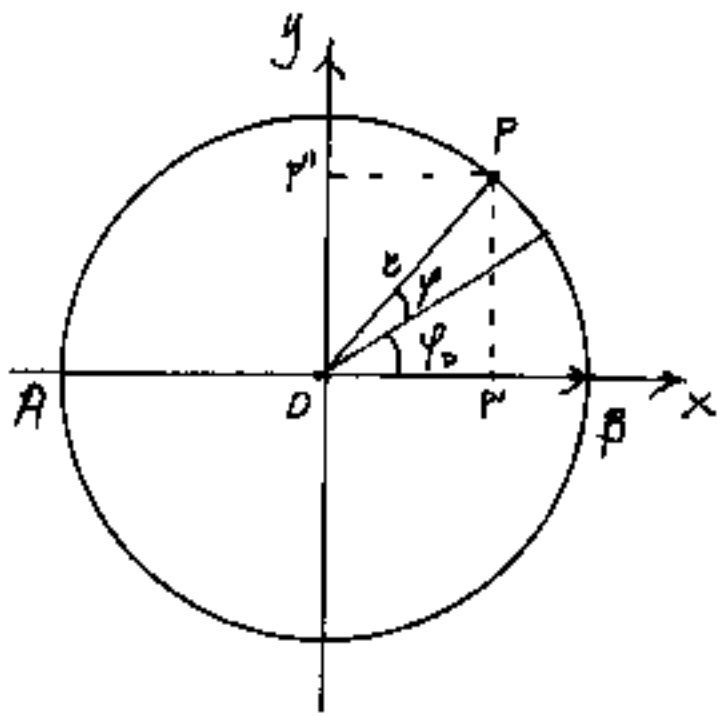
$$x = a \sin(mt + \alpha); \quad y = b \sin(nt + \beta);$$

t è un parametro, $a, b, m, n, \alpha, \beta$ sono costanti ricordando le equazioni dei moti armonici, ovvero delle grandezze sinusoidali, ed in generale grandezze periodiche di ampiezza media: $A_m = \frac{1}{T} \int_0^T a dt = 0$; ove:

$a = A_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right)$; essendo $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ = velocità angolare, si nota che α e β sono "fasi"; se il rapporto m/n è irrazionale si ha la clotoide. (Trattiamo le curve di Lissajous).

Le curve di Lissajous

Il moto armonico



Consideriamo la proiezione sul diametro AB di un punto che si muove con velocità uniforme sulla circonferenza. Sia ω la velocità angolare costante

del raggio \overline{OP} . La rotazione sia antioraria e sia iniziata dall'angolo φ_0 (fase) ove si ha $t_0 = 0$ inizio della misura del tempo. Avremo:

$$\begin{cases} x_p = r \cos(\omega t + \varphi_0) \\ y_p = r \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Il moto di P' (o di P'') è detto moto armonico

Poiché: 2π rappresenta l'angolo giro, T è detto periodo e rappresenta il tempo necessario a compiere un giro completo perciò $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, ove $f =$ frequenza in cicli/sec $= \frac{1}{T}$; quindi la frequenza rappresenta quante volte al secondo il punto mobile occupa la stessa posizione.

Quello esposto è un moto periodico semplice detto anche moto pendolare l'ampiezza \overline{AB} è detta: elongazione.

La velocità istantanea di P' sarà:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -x \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right); \quad \left(\frac{2\pi}{T} = \omega\right)$$

ed anche l'accelerazione:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -x \frac{4\pi^2}{T^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}x = \underline{\underline{-\omega^2 \cdot x}}$$

risulta quindi che l'accelerazione ha verso opposto allo spostamento x di P' .

Consideriamo due moti armonici di uguale periodo T ; se anche $\varphi_1 = \varphi_2$ si dicono in fase.

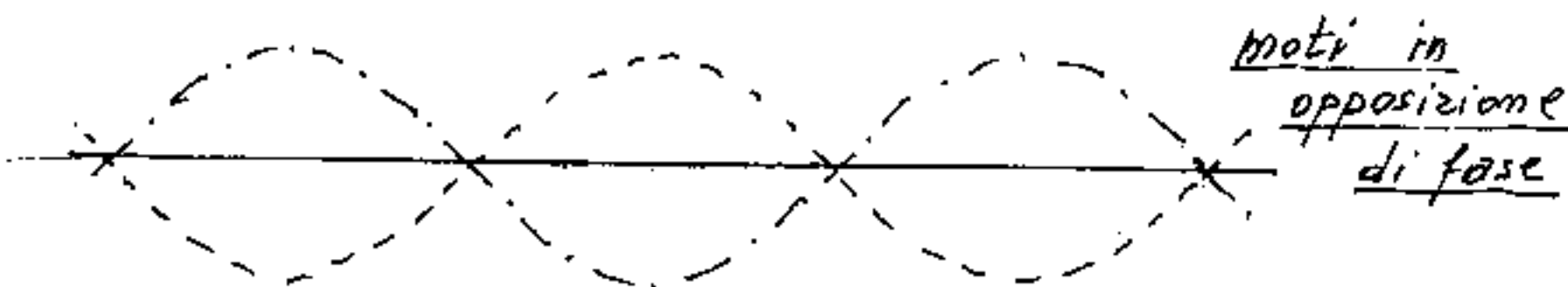
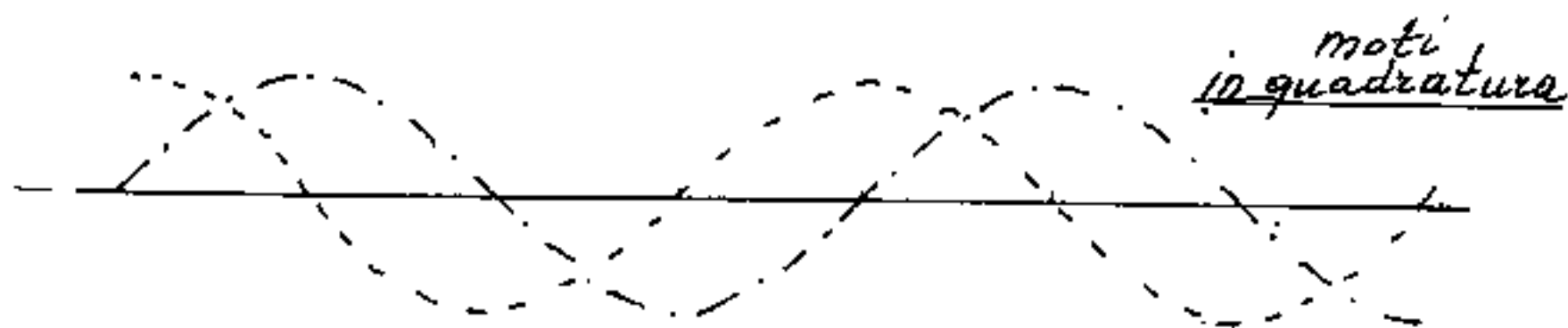
se: $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \neq 0$ si dicono sfasati di $\Delta\varphi$

se: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, i due moti si dicono in quadratura

se $\Delta\varphi = \pi$, i due moti si dicono in opposizione

Vedani Vol II (il problema del pendolo), Vol IV (lo spazio angolare solido)

Se rappresentiamo le sinusoidi dei moti armonici avremo:



Consideriamo ora la composizione di due moti armonici

1) moti di ugual periodo intorno allo stesso centro e sullo stesso

asse: $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$; $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$;

l'elongazione risultante; $x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$ può essere scritta: $A \cos(\omega t + \varphi_0) = x$.

qualora $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}$ e $\tan \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}}$.

2) moti di ugual periodo su assi ortogonali

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \varphi_{0x}) \\ y = b \cos(\omega t + \varphi_{0y}) \end{cases}$$

queste sono le equazioni parametriche del moto.

se eliminiamo il tempo si ottiene l'equazione della

traettoria:

$$\arccos\left[\frac{x}{a}\right] - \varphi_{0x} = \arccos\left[\frac{y}{b}\right] - \varphi_{0y}$$

$$\cos\left\{\arccos\left[\frac{x}{a}\right] - \arccos\left[\frac{y}{b}\right]\right\} = \cos(\varphi_{0x} - \varphi_{0y})$$

$$\frac{x}{a} \frac{y}{b} + \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = \cos(\varphi_{0x} - \varphi_{0y})$$

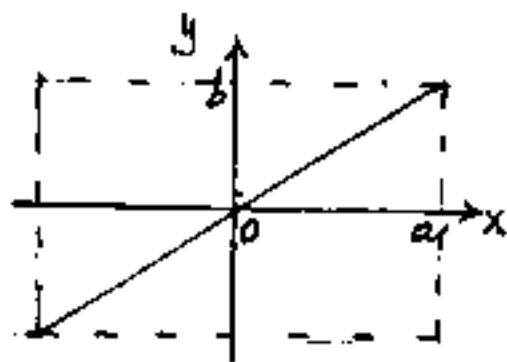
$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} = \cos^2(\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) - 2 \frac{xy}{ab} \cos(\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) + \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos(\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) = \sin^2(\varphi_{0x} - \varphi_{0y})}$$

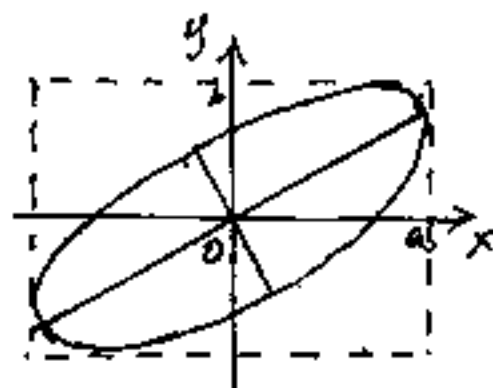
Questa è l'equazione di una ellisse (v. vol II)

Ricordiamo (v. II vol. Coniche) che mancando i coefficienti: a_{13} ed a_{23} l'ellisse è solo ruotata. La ruotazione è determinata dal coefficiente a_{12} che è: $(-2 \cos(\varphi_{0x} - \varphi_{0y})/ab)$ perciò quando $(\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) = 90^\circ = \pi$ l'ellisse non è ruotata: $\cos(90^\circ) = 0$.

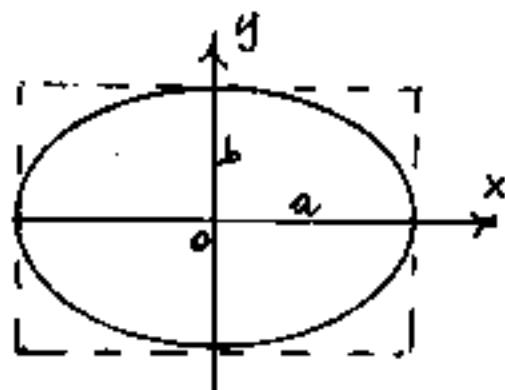
Diamo alcune figure al variare di $(\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) = \Delta$ mantenendo costante il rapporto: $a/b = 3/2$.



Per $\Delta = 0$, $\sin^2(\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) = 0$, per cui l'equazione, (essendo: $\cos(\varphi_{0x} - \varphi_{0y}) = 1$) diventa $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})^2 = 0$; $y = \frac{b}{a}x$.



Per $\Delta = \pi/4$; $\sin^2 \Delta = \frac{1}{2}$; $\cos \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \sqrt{2} \frac{|xy|}{ab} = \frac{1}{2}$; $(\cos \Delta)^2 = \frac{+1}{(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) + \sqrt{(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})^2 + \frac{4}{a^2 b^2}}}$



Per $\Delta = \pi/2$; $\sin^2 \Delta = 1$; $\cos \Delta = 0$

l'equazione diventa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le figure al variare di Δ si ripetono simmetricamente cioè continua la ruotazione fino a che per $\Delta = \pi$ si ha la retta che copre l'altra diagonale. Per $\Delta < 0$ i valori si ripetono con verso di rotazione opposto.

3) Composizione sopra uno stesso asse di moti armonici di periodo diverso

Le equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) \\ x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \end{cases} \quad (\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f)$$

Il moto risultante è ancora periodico se ω_1 ed ω_2 hanno un multiplo comune ω (T_1 e T_2 un multiplo comune θ) il periodo risultante è $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$.
(si hanno i cosiddetti battimenti)

4) Composizione di moti armonici di diverso periodo sopra assi ortogonali

Le equazioni:

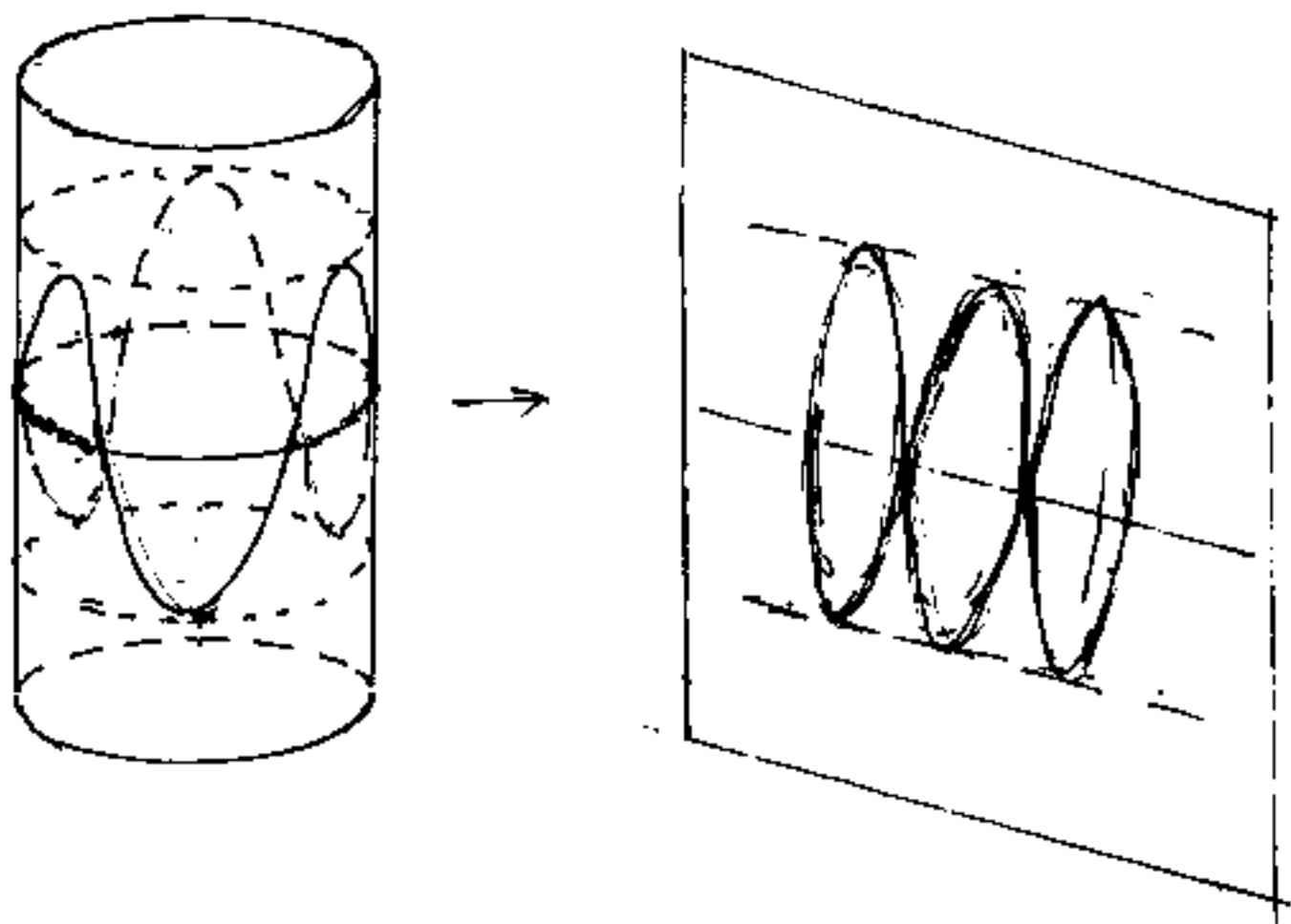
$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \\ y = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0) \end{cases}$$

Varia la differenza di fase e quindi varia la traiettoria del moto risultante, le loro forme sono dette figure di Lissajous.
Affinché le figure di Lissajous siano chiuse è necessario che il rapporto fra i periodi T_1 e T_2 (ω_1, ω_2) sia razionale.

Nel trattare la clotoide abbiamo detto che essa è un caso particolare di curve di Lissajous quando il rapporto fra i periodi è irrazionale.

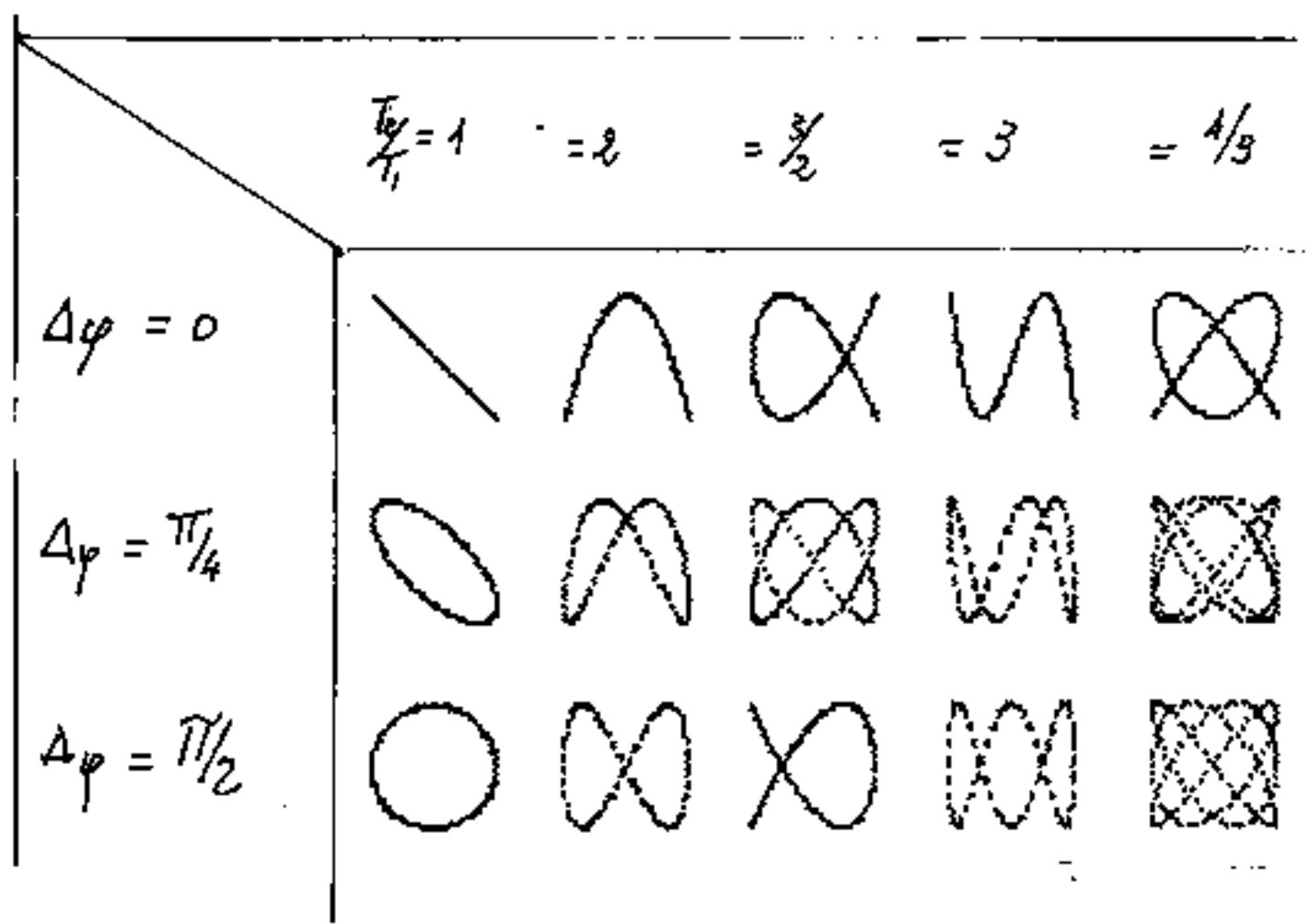
indichiamo simboli diversi: $x = a \cos(mt + \alpha)$; $y = b \cos(nt + \beta)$;
(le curve non cambiano)

Possiamo visualizzare le immagini delle curve di Lissajous, avvolgendo intorno ad un cilindro trasparente, delle sinusoidi. Se la circonferenza del cilindro e la lunghezza d'onda della sinusoidi ammettono un minimo comune multiplo, la figura risultante torna su stessa e si ha una figura di Lissajous.

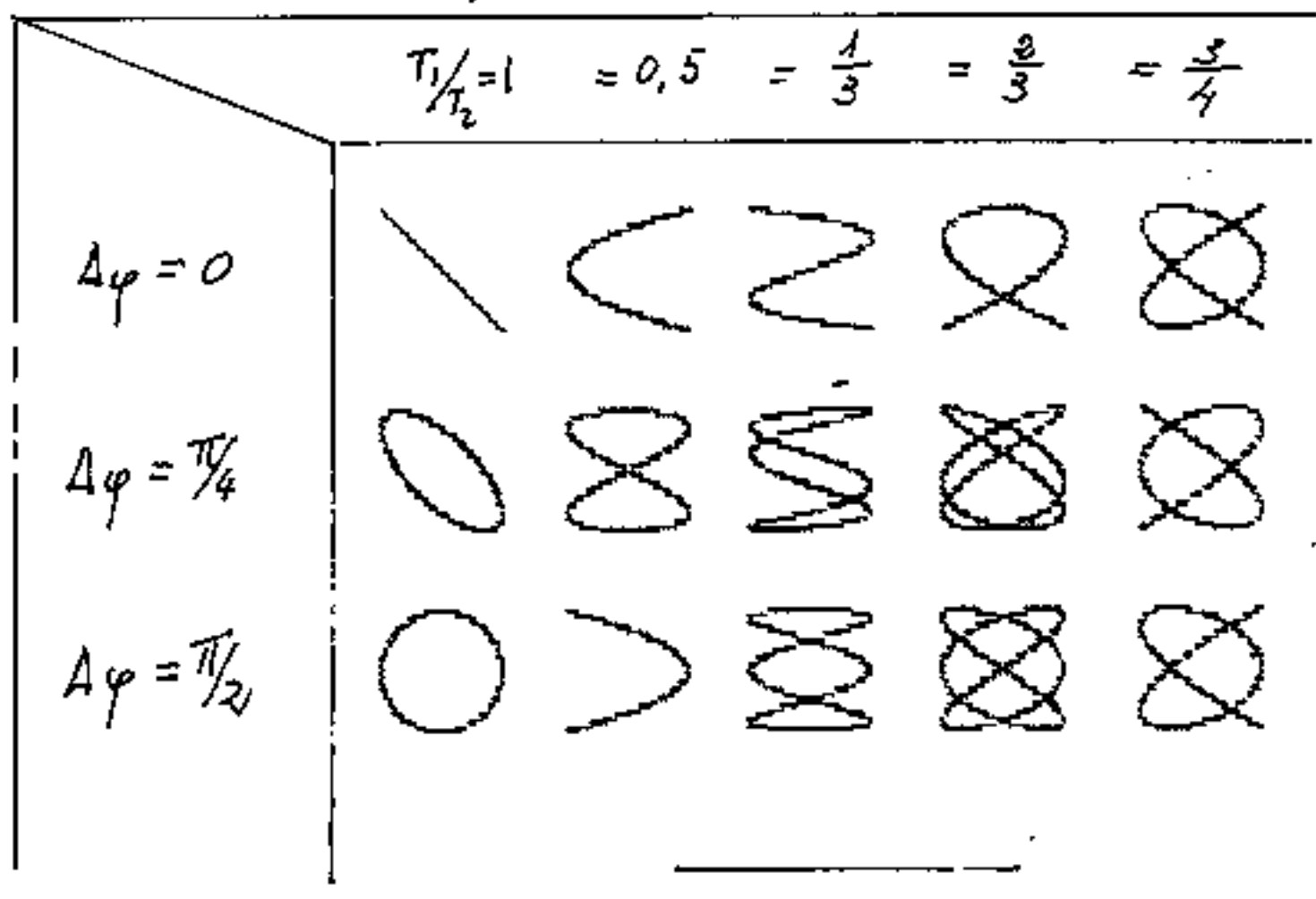


Abbiamo visto che con una impostazione le figure si ripetono simmetriche da $\frac{\pi}{2}$ a π rispetta quelle da 0 a π . Però non è esatto pensare che una volta definito il rapporto razionale fra i due periodi, e la differenza di fase Δ si abbiano gli stessi risultati. A giustificazione di ciò,

presentiamo due gruppi di figure di Lissajous
 ove la: $x = \cos(\omega_1 t)$ con $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 1$ e fase $\varphi_0 = 0$
 mentre la $y = \cos(a\omega_1 t + \varphi)$, cioè abbiamo fatto
 ricadere in y il rapporto. $T_2/T_1 = 0$ e $\Delta = (-\varphi_0 - 0) = \varphi_0$



e invertendo: T_0/T_1



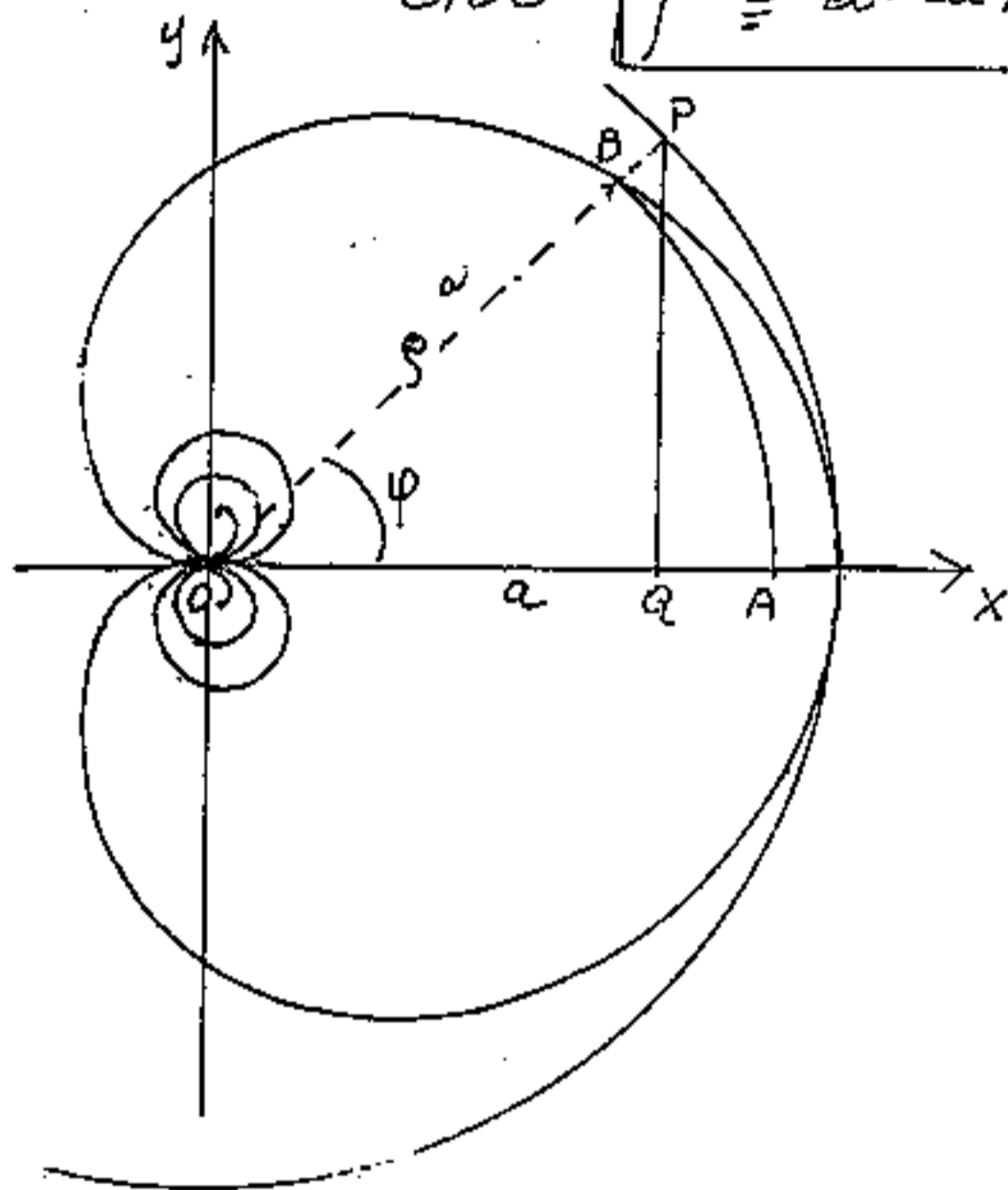
Torneremo su questo argomento fondamentale in problemi fisici.

cocleòide

È una curva piano di equazione in coordinate polari:

$$\rho = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

cioè: $\rho = a \cdot \text{caten} \varphi$



È una curva connessa con la quadratura del cerchio.

Infatti se scriviamo:
 $\rho \varphi = a \sin(\varphi)$
(vedi figura) vuol dire che l'arco $\widehat{AB} = \rho \varphi$ equivale al segmento $\overline{PQ} = a \sin \varphi$.

Si noti che:

$$x = a \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\varphi} = a \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{2 \varphi} = \boxed{x = (a) \text{caten}(2\varphi)}$$

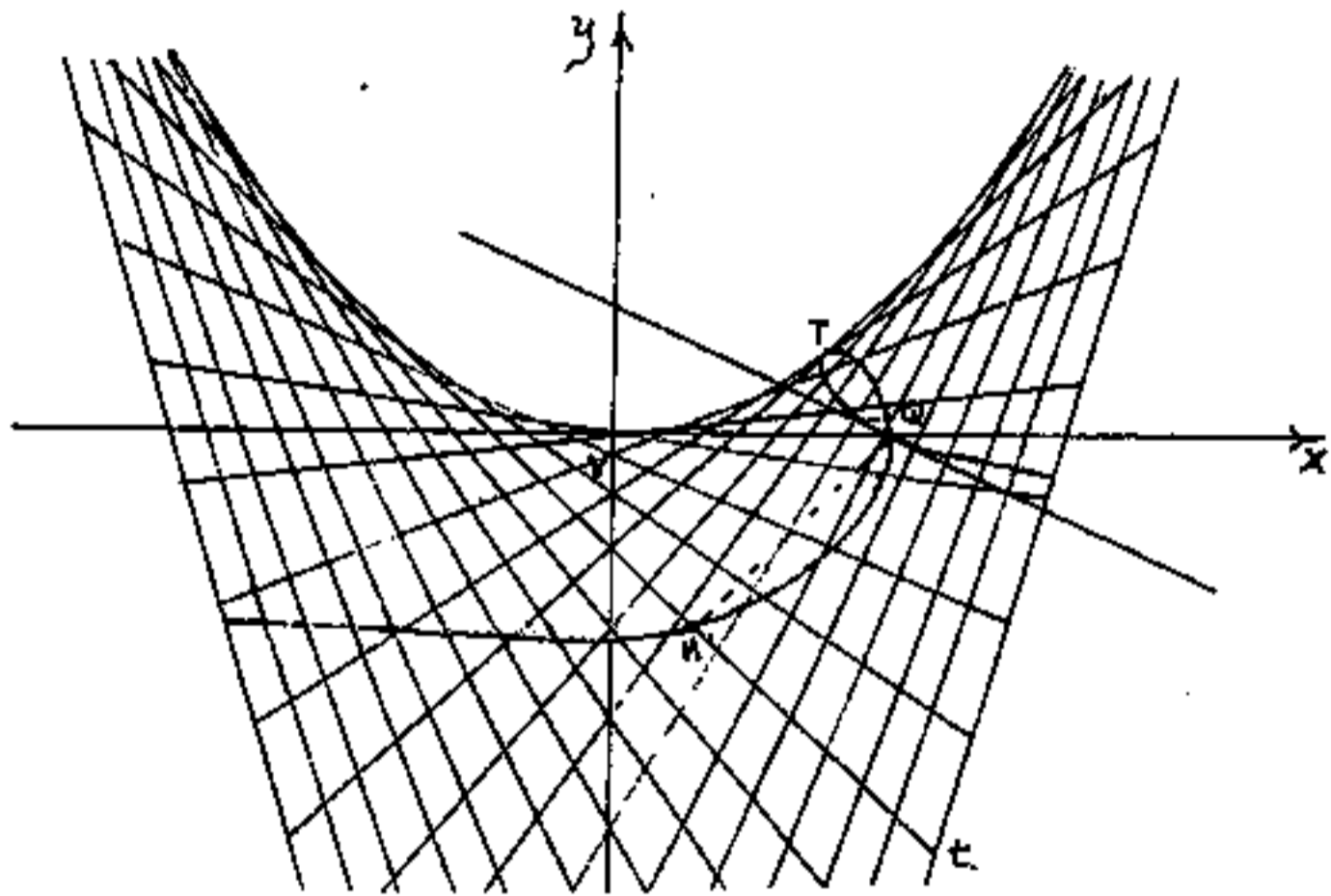
$$y = a \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} = a \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2\varphi} = \boxed{y = (a) \text{cavers}(2\varphi)}$$

Cocleòide - dal latino *coclēa* = chiocciola, e dal greco: $\epsilon\tilde{\iota}\delta\omicron\varsigma$ = aspetto, è una particolare quadratrice di Ippia.

ofiüride

Si definisce ofiüride una curva di 3° grado podaria della parabola relativamente ad un punto sulla retta tangente nel vertice la parabola.

Se la parabola è al centro, la tangente nel



vertice V è l'asse delle x , se la parabola è costruita per tangenti, preso un punto Q sulla tangente in V (la x) da Q si tracciano le normali alle tangenti, i piedi delle normali (curva pedale o podaria) cioè i vertici retti sulle tangenti (come M per la tangente t) costituiscono la curva ofiüride.

Il nome deriva dal greco: ὄφις = serpente ed ὄψα = coda; cioè: ofiüride = coda di serpente.
La costruzione che noi abbiamo presentato ha

al centro assi la parabola, mentre l'ofiuride ha il punto Q (è un nodo) spostato.

Se avessimo preso Q coincidente con V avremmo trovato la Cissoide di Diocle, (podaria di una parabola) curva che abbiamo già trattato.

Ordinariamente l'equazione dell'ofiuride è presentata:

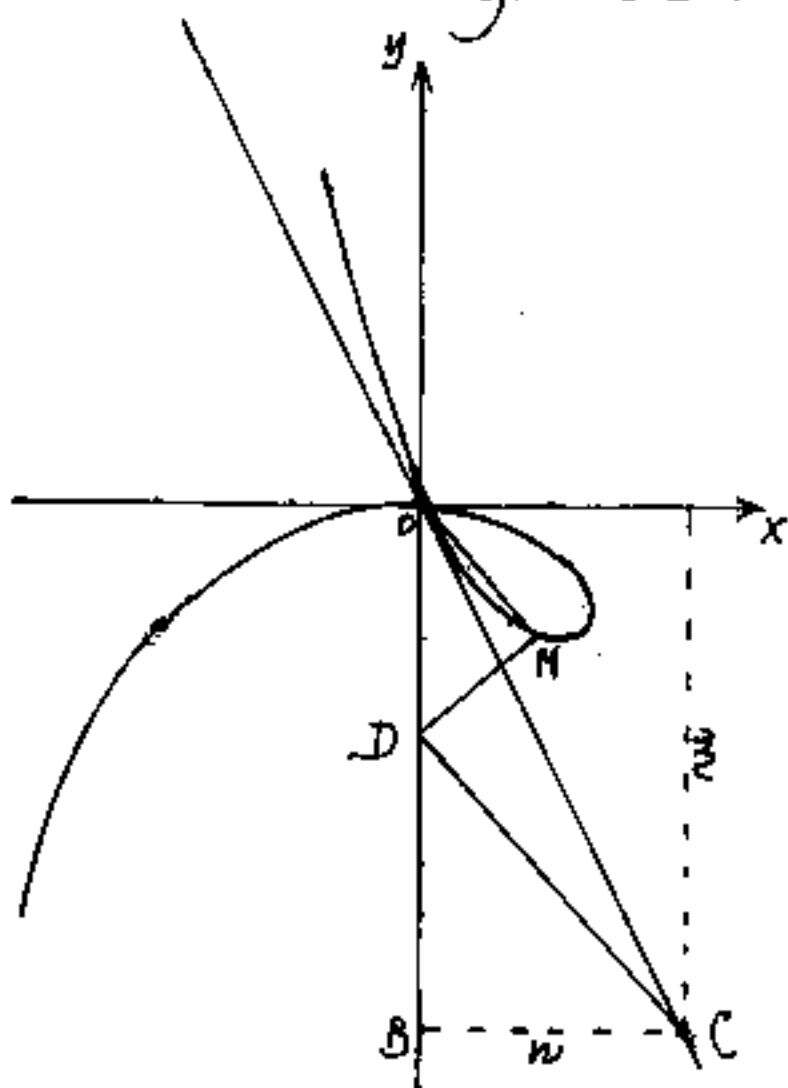
$$x(x^2 + y^2) = y(mx - ny)$$

è però esplicitabile in y

$$y = x \left[\frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4x(n+x)}}{2(m+x)} \right]$$

L'enciclopedia delle matematiche elementari (ed Hoepli) al xxxvii capitolo riporta la costruzione dell'ofiuride di D. Uhlhorn - (Oldenburg 1802).

Tracciati gli assi x ed y, preso il segmento $\overline{OB} = m$,



il segmento $\overline{BC} = n$, la retta \overline{CO} sarà la tangente alla curva nell'origine O. Da C tracciamo una retta qualsiasi \overline{OD} , o la parallela ad \overline{OD} e da D la normale fino ad M (punto dell'ofiuride). I segmenti: m ed n (coordinate di C), sono gli elementi noti dell'equazione.

Le curve di Lamé

Sono considerate la generalizzazione di un conico al centro, in particolare l'ellisse.

La formula delle curve di Lamé è:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

Si noti: con a e b diversi da zero e $m = 0$ si ha un assurdo.

con $m = 1$ si ha una retta

con $m = 2$ ed $a = b > 0$ si ha un cerchio

... " " ed $a \neq b > 0$ si ha un'ellisse

" " ed $a \neq b$ di segno opposto un'iperbole

con $m = \frac{2}{3}$ ed $a = b > 0$ si ha un'asteroide

curve già da noi trattate

con $m = 2$ le curve di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

furono dette dal Lamé: "Coniche omofocali"

con $m = -2$ l'equazione diventa:

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

che è la curva cruciforme già da noi trattata chiamata Kreuzkurve da P.H. Schoute, ma

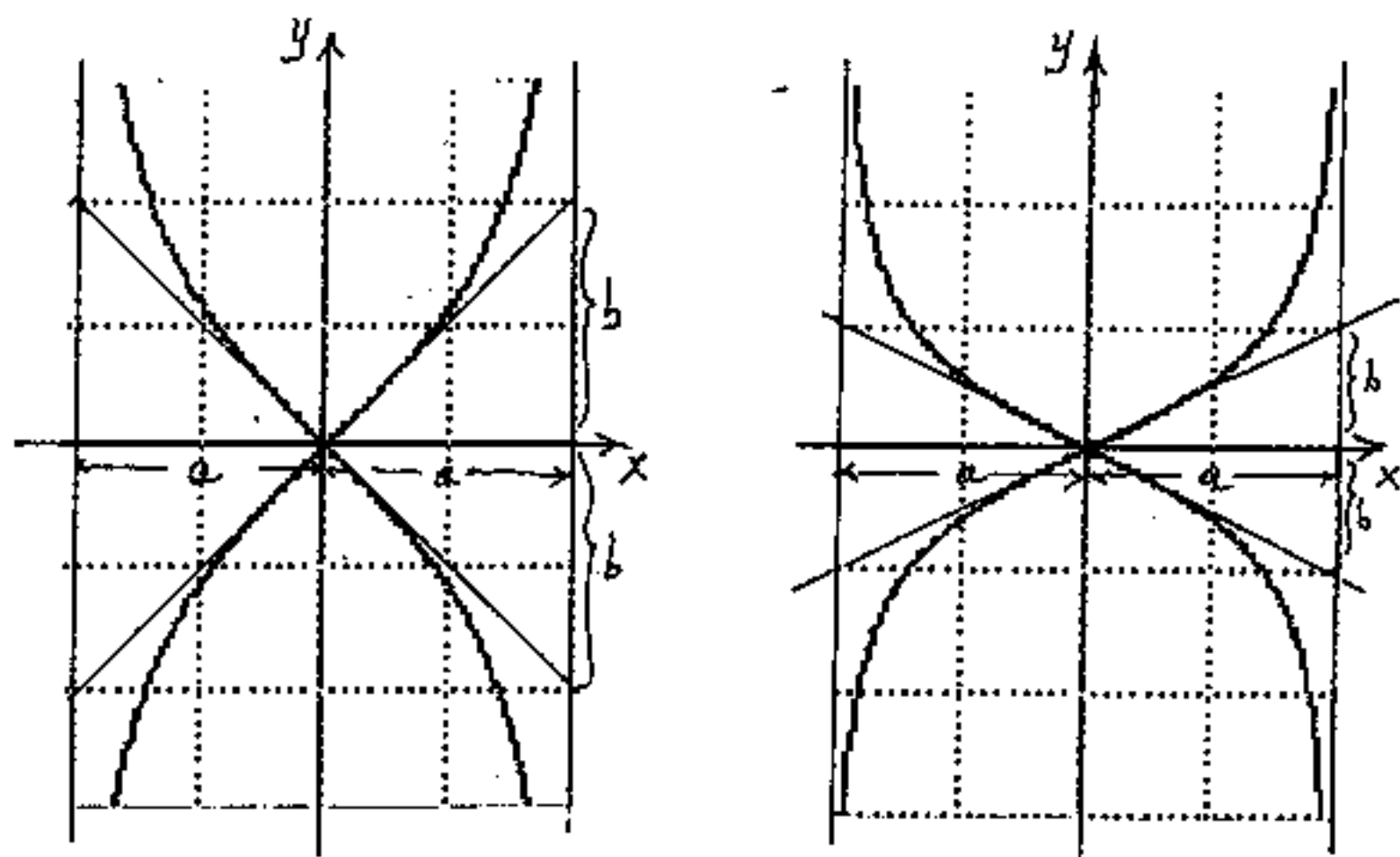
fu studiata la prima volta da F. Siacci. (1860)

(cfr. Enciclopedia delle Matematiche elementari ed. Hoepli,

vol. 2° parte 2ª pag. 422)

P.H. Schoute chiamò: "Kohlenspiz Kurve"
 la curva risultante dall'equazione:

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$



anche questa equazione può essere in forma
 esplicita:

$$y = \frac{x}{b \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Le curve di Lamé si distribuirebbero in nove
 distinte categorie (cfr. Gloria Atti Acc. Pontan., 33 (1909))
 fra di esse si trovano oltre le curve citate compreso
 la Kohlenspiz Kurve e la Kreuz Kurve. ed inoltre le lemni-
 scate che ora tratteremo.

Nello spazio vi sono le superfici di Lamé che
 tratteremo con le linee e le superfici nello spazio.

La curva bisaccia

La curva è detta anche lemniscata di Gerono

la sua equazione cartesiana è: $x^2 y^2 = x^2 (c^2 - x^2)$

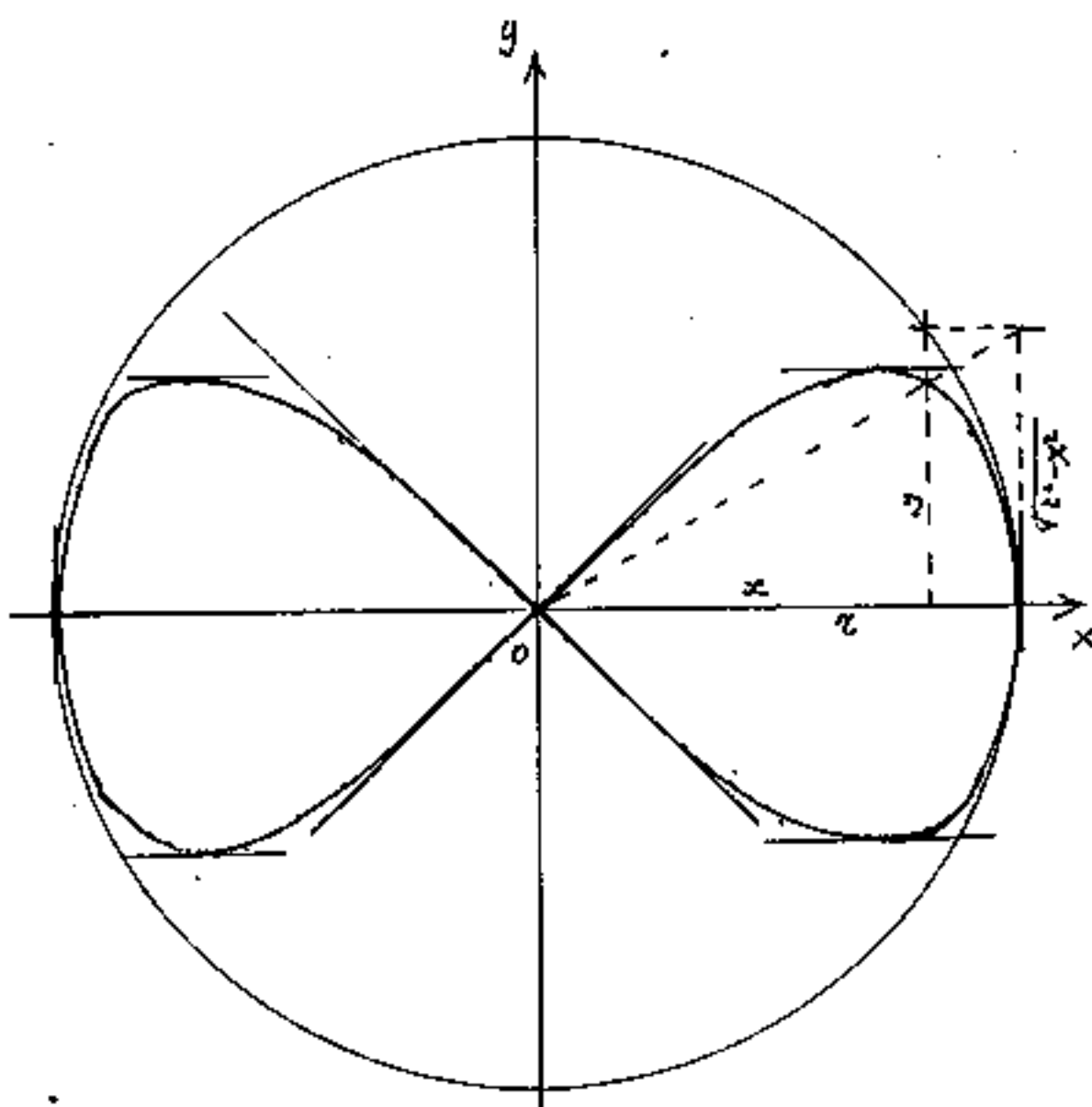
si può esplicitare: $y = \frac{x}{c} \sqrt{c^2 - x^2}$ poiché $-c \leq x \leq +c$

la curva è contenuta in una circonferenza. Si

può scrivere:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{c}$$

cioè: "l'ordinata del cerchio sta al suo raggio come l'ordinata della bisaccia sta all'ascissa comune". Questa osservazione consente una costruzione



per punti della curva. $y' = \frac{1}{c} \left(\frac{c^2 - 2x^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} \right) = \frac{1}{c} \left(\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} \right)$

cioè per $x = \pm c$ si ha una tangente verticale, per $x = \pm c/\sqrt{2}$ si ha una tangente doppia, per $x = 0$ si ha un punto doppio con tangenti $y = \pm x$ cioè a $\pm 45^\circ$. L'equazione in coordi-

nate polari: $\rho = c \cdot \frac{\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos^4(\theta)}$ $\rho = c \frac{\sqrt{2\cos^2\theta - 1}}{\cos^4\theta}$

L'area del cappio = $2 \int_0^c y dx = 2 \int_0^c \frac{x}{c} (c^2 - x^2)^{1/2} dx = - \int_0^c \frac{(c^2 - x^2)^{1/2}}{c} d(c^2 - x^2)$

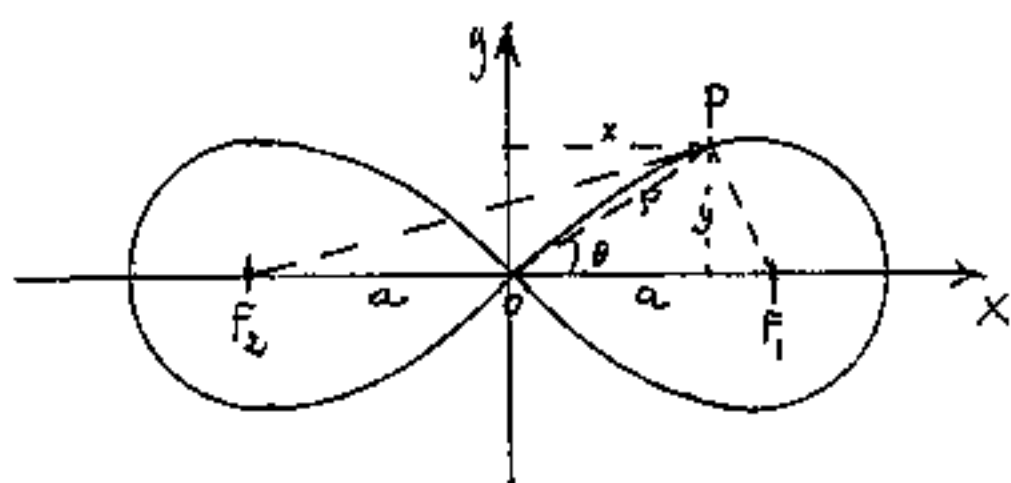
$$A_{\text{(cappio)}} = \left[\frac{2}{3c} (c^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^c \quad \boxed{A = \frac{2}{3} c^2}$$

$$\text{Area dei due cappi} = \frac{4}{3} c^2$$

Lemniscata di Bernoulli.

Dati due punti sull'asse delle ascisse, F_1, F_2 simmetrici rispetto all'asse y , distanti dall'origine rispettivamente $\pm a$; $F_1 = (a; 0)$
 $F_2 = (-a; 0)$

Definiamo la Lemniscata il luogo dei punti per i quali è costante il prodotto delle distanze da F_1 ed F_2 . cioè: $(\overline{PF_1})(\overline{PF_2}) = a^2$ (costante).



$$\overline{PF_1}^2 = (a-x)^2 + y^2$$

$$\overline{PF_2}^2 = (a+x)^2 + y^2$$

$$((a-x)^2 + y^2)((a+x)^2 + y^2) = a^4$$

sviluppiamo interamente i prodotti:
abbiamo:

$$(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)(a^2 + 2ax + x^2 + y^2) = a^4$$

$$\begin{array}{r} a^4 - 2a^3x + a^2x^2 + a^2y^2 \\ + 2a^3x - 4a^2x^2 + a^2x^2 + a^2y^2 - 2ax^3 + 2axy^2 \\ + a^2x^2 + a^2y^2 - 2ax^3 - 2axy^2 + x^4 + x^2y^2 \\ + x^2y^2 + y^4 = a^4 \end{array}$$

$$-2a^3x^2 + 2a^3y^2 + 2x^2y^2 + x^4 + y^4 = 0$$

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)}$$

Equazione in cartesiane della lemniscata

ponendo $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$

$$\rho^4 = 2a^2 \rho^2 \cos 2\theta$$

$$\boxed{\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta}$$

Equazione in polari della lemniscata

Si noti che per: $\theta > \frac{\pi}{4}$ (45°) si ha $\cos(2\theta) < 0$

quindi: $\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ è immaginario finché $\theta > \frac{3}{2}\pi$

perciò facciamo variare θ : $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ per

il cappio sulle x positive e $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$ per

il cappio sulle x negative (simmetrico).

L'area del cappio: $A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$

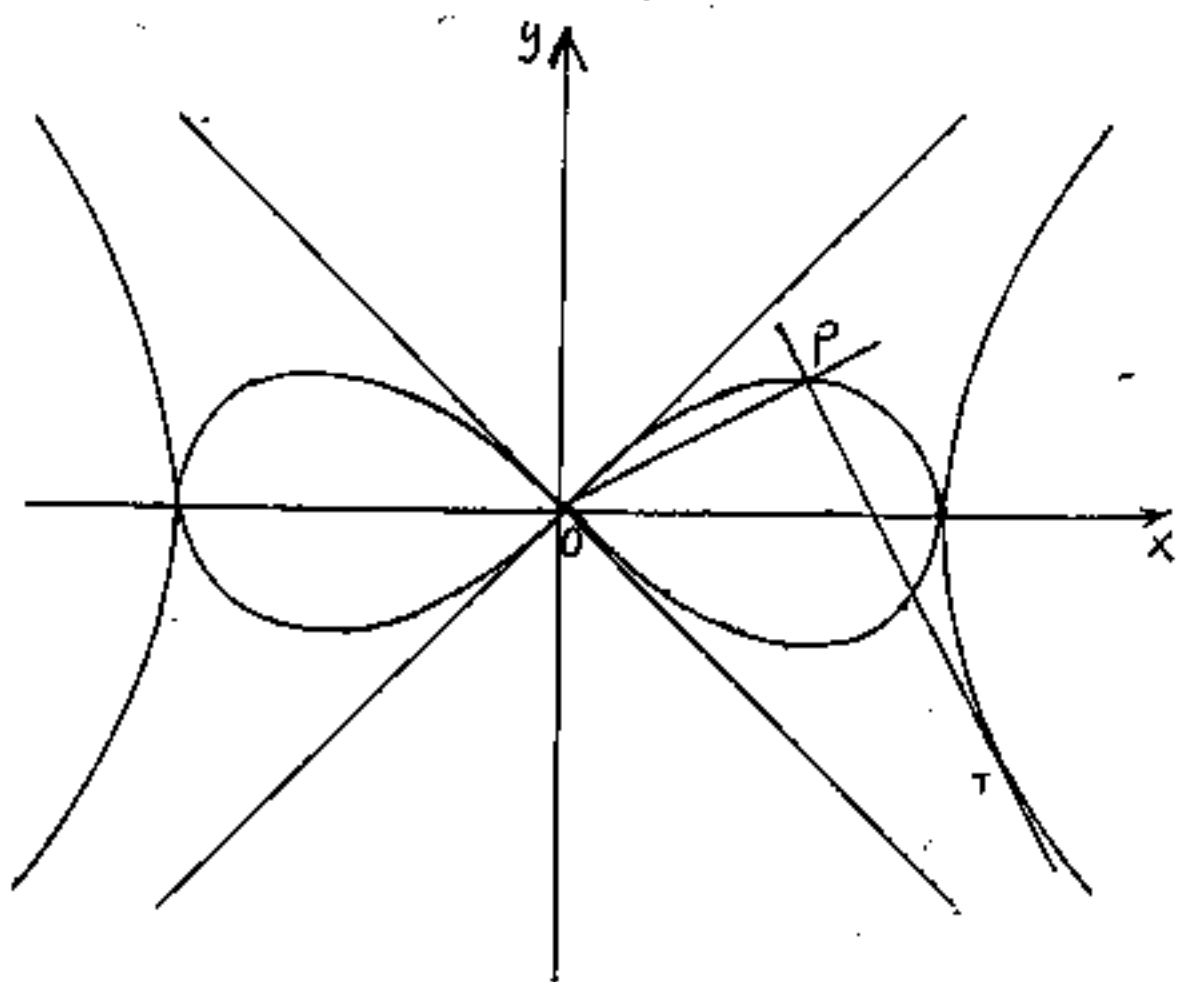
$$A = \frac{a^2}{2} \left[\sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2} (1 + 1)$$

$$\boxed{A = a^2}$$

L'area di un cappio di lemniscata, equivale al quadrato di lato $\overline{OF} = a$.

La lemniscata di Bernoulli si può definire anche come la podaria all'iperbole equilatera di equazione

$f(x^2 - y^2 - 2a^2) = 0$, rispetto al centro assi.



$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} = x ; \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = y.$$

l'equazione della tangente:

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

l'equazione della normale

$$(x - 0) \frac{\partial f}{\partial y} + (y - 0) \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

dalle quali sostituendo e

risolvendo otteniamo:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \text{ è}$$

la lemniscata.

Raggio di curvatura della lemniscata

Il raggio di curvatura in coordinate polari è:

$$R = \frac{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

L'equazione della lemniscata in coordinate polari

$$\text{è } \rho = a\sqrt{2\cos 2\theta} \quad ; \quad \rho' = a\sqrt{2} \frac{-2\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \quad ;$$

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad \rho'^2 = 2a^2 \frac{1 - \cos^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \left(\frac{2a^2}{\cos 2\theta} - 2a^2 \cos 2\theta \right)$$

$$(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2} = \left(\frac{2a^2}{\cos 2\theta} \right)^{3/2} = \left[a^3 \frac{2\sqrt{2}}{(\cos 2\theta)^{3/2}} \right]$$

$$\rho'' = -a\sqrt{2} \left[\frac{+2\cos(2\theta)\sqrt{\cos(2\theta)} + \frac{+\sin^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}}{\cos(2\theta)} \right] = \frac{-a\sqrt{2}(2\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)}{(\cos 2\theta)^{3/2}}$$

$$\rho'' = -a\sqrt{2} \frac{(\cos^2 2\theta + 1)}{(\cos 2\theta)^{3/2}} \quad \rho\rho'' = -2a^2 \frac{\cos^2 2\theta + 1}{\cos 2\theta} = \left(2a^2 \cos 2\theta + \frac{2a^2}{\cos 2\theta} \right)$$

$$(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') = 2a^2 \cos 2\theta + \frac{4a^2}{\cos 2\theta} - 4a^2 \cos 2\theta + \frac{2a^2}{\cos 2\theta} + \frac{2a^2}{\cos 2\theta}$$

$$R = \frac{2a^3\sqrt{2}/\cos(2\theta)\sqrt{\cos 2\theta}}{6a^2/\cos 2\theta} = \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{2a^2}{3a\sqrt{2\cos 2\theta}}$$

$$\boxed{R = \frac{2a^2}{3\rho}}$$

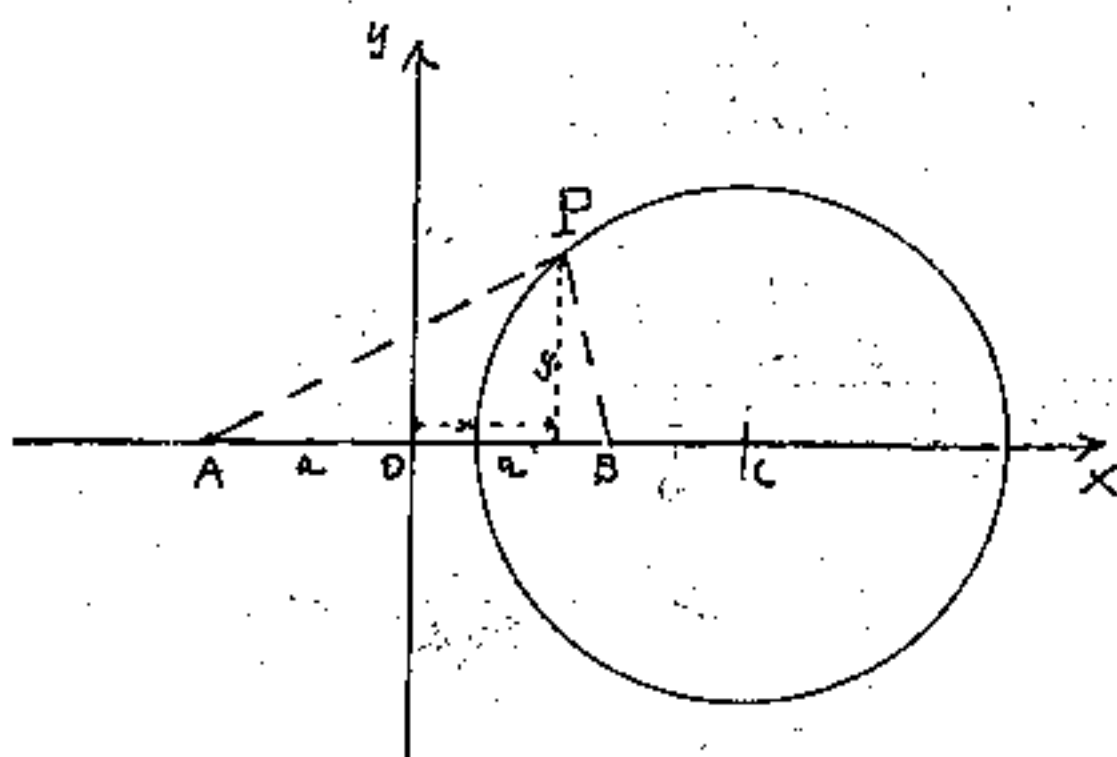
nei vertici del cappio $\theta = 0$; $\theta = 180^\circ$; $\rho = a\sqrt{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Cerchio di Apollonio (relativo a due punti)

(Apollonio Pergeo, III sec a.C. fondò la teoria delle coniche sono di Apollonio i teoremi sui diametri coniugati.) (V. cerchi relativi a trian-
goli)

Il cerchio di Apollonio è definito come:

"luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti dati hanno rapporto costante"



Poniamo i due punti A e B sulle ascisse e simmetrici rispetto all'asse y.

Sia P un qualsiasi punto del piano, per

esso dovrà passare almeno un cerchio di Apollonio.

che per definizione dovrà essere: $\overline{PA}/\overline{PB} = K = \text{cost.}$

Le coordinate di P siano x, y avremo: $\overline{PA}^2 = (x+a)^2 + y^2$;

$\overline{PB}^2 = (a-x)^2 + y^2$ perciò: $[(a+x)^2 + y^2] = K^2 [(a-x)^2 + y^2]$ cioè:

$$x^2 + y^2 - 2a \left(\frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right) x + a^2 = 0$$

equazione di un cerchio di

centro: $C \equiv \left(a \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}; 0 \right)$ e di raggio $R = \sqrt{x_c^2 - a^2} = R = a \frac{2K}{K^2 - 1}$

Per $K=2$ (come in figura) la $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{BP}$ per ogni punto della circonferenza, (con l'avvertenza che \overline{BP} non può essere inferiore a: $\frac{1}{3}a$). Ove A, D, B, E = gruppo armonico: $K = \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB}$; D, E = punti armonici

Cassinòide (ovale di Cassini)

La linea cassinòide è definita come: "il luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti fissi, hanno prodotto costante"

Si noti che, mentre nel cerchio di Apollonio, il rapporto delle distanze da due punti fissi è un numero puro; nell'ellisse e nell'iperbole, rispettivamente la somma e la differenza delle distanze da due punti fissi è un segmento; nella cassinòide il prodotto delle distanze da due punti fissi è il quadrato di una lunghezza, cioè un'area. Per cui, una volta fissato il quadrato, le distanze saranno i lati di tutti i rettangoli equivalenti a tale quadrato. Si verificano tre casi: La semidistanza "a" dei due punti fissi può essere $a \geq l$ ove "l" è il lato del quadrato.

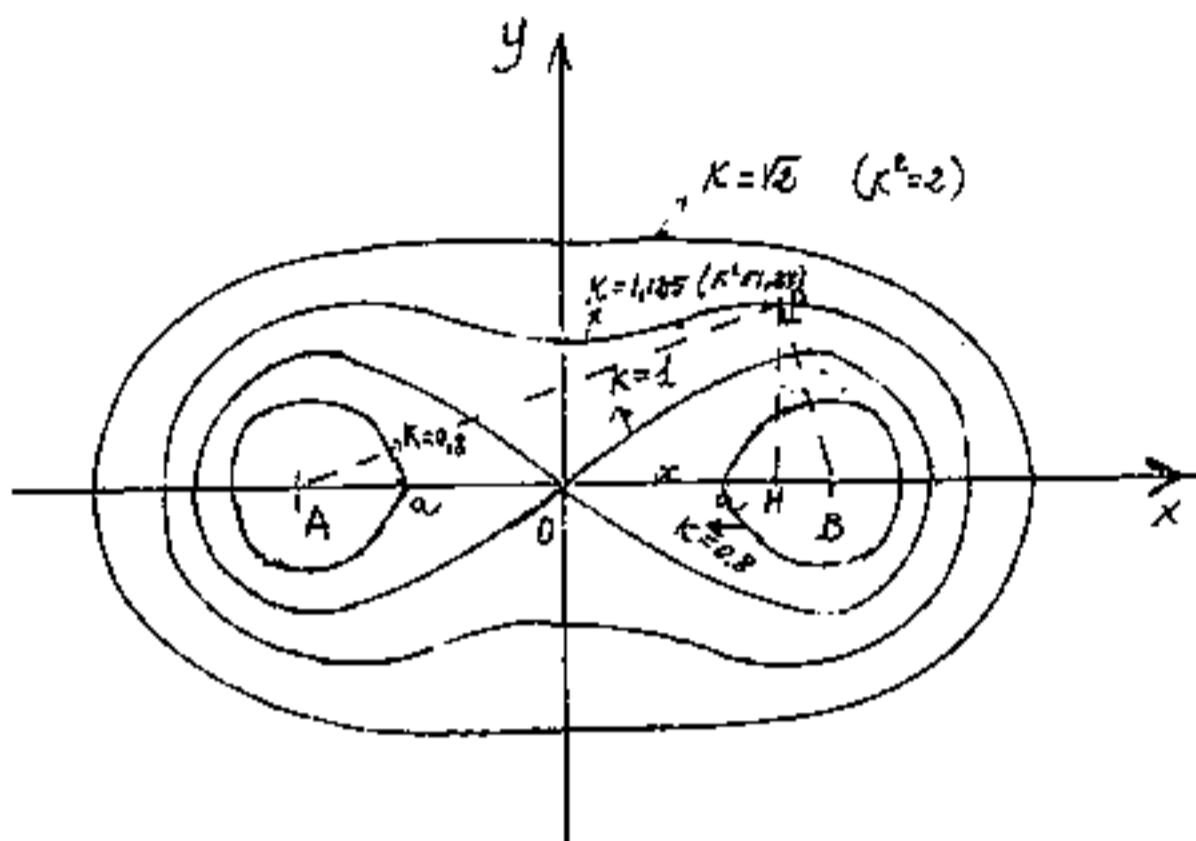
(Ricordiamo il secondo teorema di Euclide per costruire i rettangoli equivalenti al quadrato dell'altezza.)

Noi porremo $l = Ka$, in tal modo K è un numero puro ed "a" il modulo grafico cioè i tre casi diventano: $K \geq 1$

Poniamo i due punti fissi sull'asse x , simmetrici rispetto ad y cioè: $A \equiv (-a, 0)$; $B \equiv (+a, 0)$.

Se P è un punto della cassinioide di parametro κ , per definizione si ha:

$$(AP)(BP) = \kappa^2 a^2$$



essendo: $\overline{OA} = a$; $\overline{OB} = a$

$\overline{OH} = x$; $\overline{HB} = (a-x)$

$\overline{AH} = (a+x)$ ovrano.

$\overline{AP}^2 = (a+x)^2 + y^2$

$\overline{BP}^2 = (a-x)^2 + y^2$

$(\overline{AP}^2)(\overline{BP}^2) = \kappa^4 a^4$

$(a+x)^2 + y^2)(a-x)^2 + y^2) = \kappa^4 a^4$

sviluppando: $[(a+x)^2 + (a-x)^2]y^2 + (a+x)^2(a-x)^2 + y^4 - \kappa^4 a^4 = 0$

$$y^4 + 2(a^2+x^2)y^2 + (a^2-x^2)^2 - \kappa^4 a^4$$

$y^2 = -(a^2+x^2) \pm \sqrt{(a^2+x^2)^2 - (a^2-x^2)^2 + \kappa^4 a^4} = -(a^2+x^2) + \sqrt{4a^2x^2 + \kappa^4 a^4}$

$$y = a \sqrt{\sqrt{4\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \kappa^4} - \left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}$$

ove a = modulo grafico

$4\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \kappa^4 \geq 1 + 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 : \kappa^4 \geq \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1 : \kappa^2 \geq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1$

L'equazione può anche scriversi: $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + (1-\kappa^4)a^4 = 0$

che è la forma ordinaria dell'equazione in coordinate cartesiane dell'ovale di Cassini (cassinioide). se in essa poniamo:

$a = a/\sqrt{2}$; $\kappa^2 = 1$, otteniamo la lemniscata di Bernoulli.

Per $\kappa^2 > 1$ gli ovali inizialmente schiacciati, tendono al cerchio per $\kappa^2 \rightarrow \infty$ per $\kappa^2 < 1$ l'ovale si scinde in due curve chiuse.

Ovale di Cartesio

L'ovale di Cartesio è definita come il luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti fissi, moltiplicate per due costanti arbitrarie λ, μ , hanno somma costante K .

Se P è il punto generico, F_1 ed F_2 i punti fissi, (detti fuochi). avremo:

$$\boxed{\lambda \overline{F_1 P} + \mu \overline{F_2 P} = K = (\text{cost.})}$$

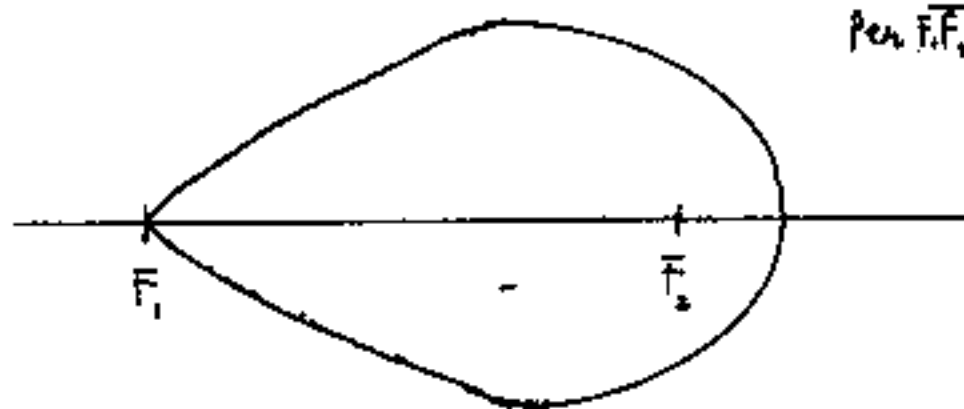
per $\lambda = \mu$ si ha una ellisse ($2a = K/\lambda$)

per $\lambda = -\mu$ si ha una iperbole.

$$\boxed{\overline{F_2 P} = \frac{K}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} \overline{F_1 P}}$$

Facciamo un esempio: Poniamo: $\overline{F_1 F_2} = 4$; $K = 12$

$$\mu = 3; \lambda = 2 \quad \overline{F_2 P} = \frac{12}{3} - \frac{2}{3} \overline{F_1 P}$$



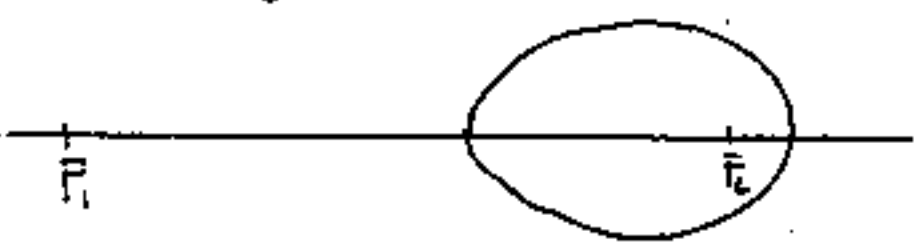
immagini
per $\overline{F_1 F_2} = 4$

$\overline{F_1 P}$	$\overline{F_2 P}$
6	0
5,4	0,4
5	0,66
4,8	0,8
4	1,33
3	2
2,4	2,4
2	2,67
1	3,33
0	4

Vediamo ora di porre qualche limitazione all'arbitrarietà di: $\lambda; \mu; K, \overline{F_1 F_2}$.

Nell'esempio precedente abbiamo posto $\overline{F_1 F_2} = \overline{F_2 P}$ quando $\overline{F_1 P} = 0$.
 Se conveniamo che valgono solo distanze ≥ 0 ; nell'esempio precedente per $\overline{F_1 F_2} = 6$ la curva diventa il punto isolato F_2 .

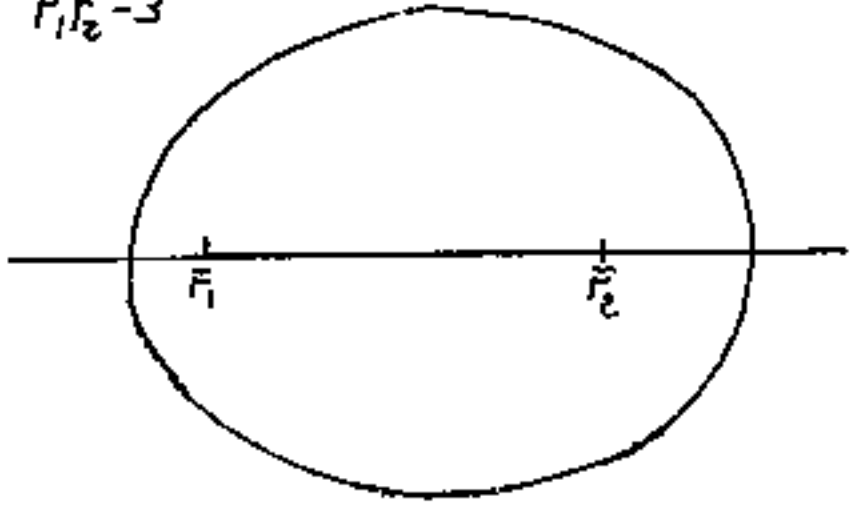
$$\overline{F_1 F_2} = 5$$



Per $\overline{F_1 F_2} = 5$ la curva a forma di uovo ha F_2 interno ed F_1 esterno.

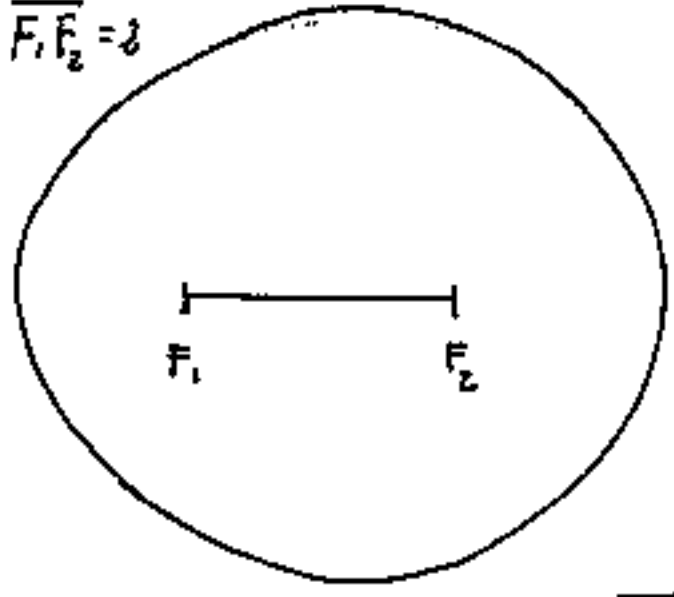
Abbiamo visto per $\overline{F_1 F_2} = 4$, per $\overline{F_1 F_2} = 3$, abbiamo entrambi i punti fissi

$$\overline{F_1 F_2} = 3$$



interni alla curva ovoidale. Al decrescere di $\overline{F_1 F_2}$ la curva si approssima sempre più ad una circonferenza, che raggiunge per $F_1 = F_2$ con raggio 2,4 nel caso numerico trattato.

$$\overline{F_1 F_2} = 2$$



Analiticamente: $\overline{F_2 P} = \overline{F_1 P} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{F_1 P}$ $\overline{FP} = \frac{K}{\lambda + \mu} = R$

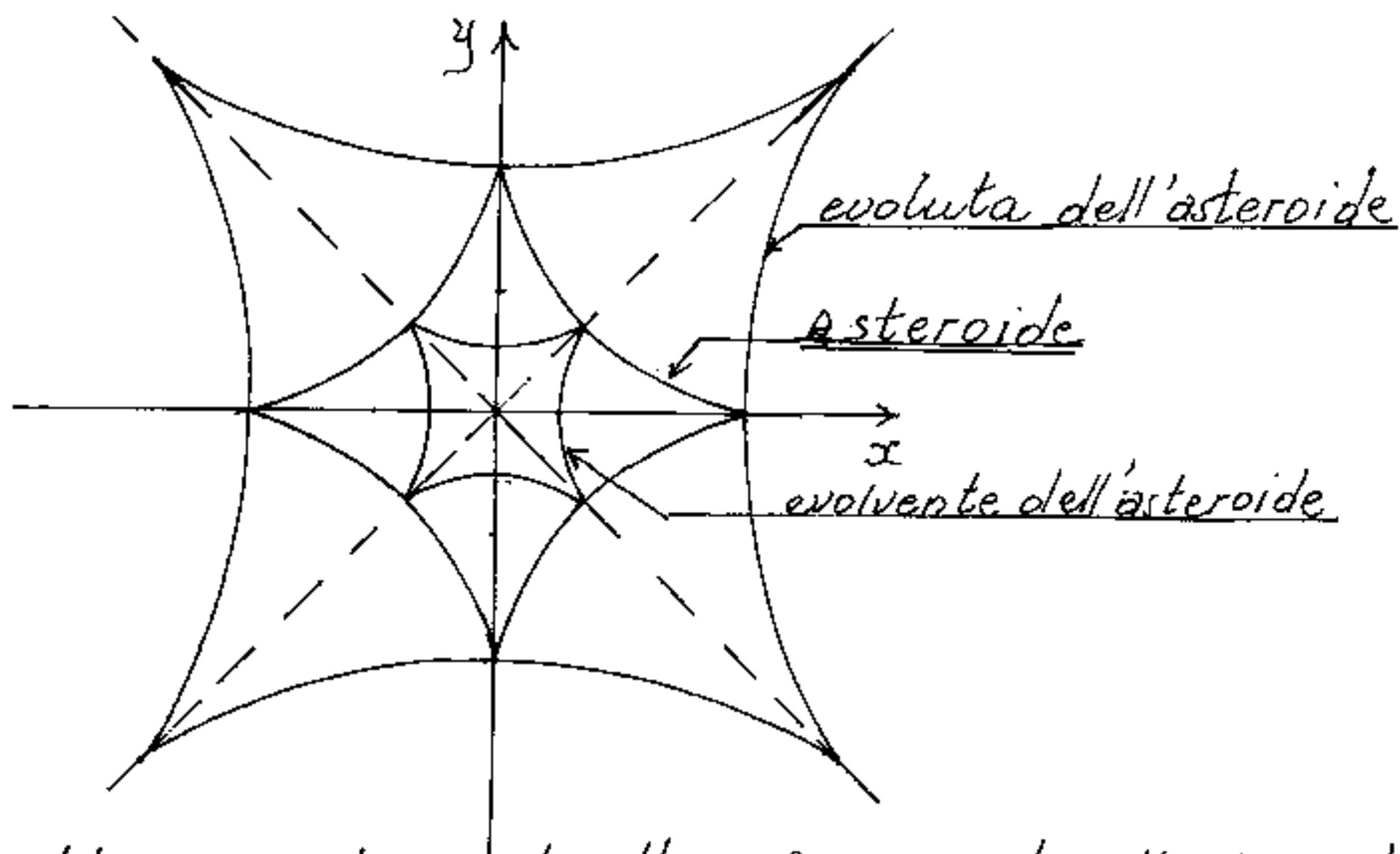
L'ordinata nel punto medio fra F_1 ed F_2 sarà $\frac{y}{H} = \sqrt{R^2 - f^2}$

ovvero: $f = \frac{\overline{F_1 F_2}}{2}$. - L'equazione in coordinate bipo-

lari sarà: $\lambda \rho_1 + \mu \rho_2 = \text{cost.}$

Le podarie (o pedali) dell'asteroide

Abbiamo già dimostrato che l'evolvente e l'evolvente dell'Asteroide sono ancora asteroidi ad assi ruotati di $\pm \pi/4 = (\pm 45^\circ)$ con modulo "a" rispettivamente doppio oppure metà.



Abbiamo visto anche l'involuzione di rette tangenti per costruire l'Asteroide. Se da un punto definito F tracciamo le perpendicolari alle rette tangenti l'asteroide, i punti d'intersezione (piedi delle normali) costituiscono le podarie o pedali dell'Asteroide. Una classe di queste sono denominate "scarabeo" che tratteremo dopo aver trattato il bifolium e le rodonee.

Bifolium

L'equazione cartesiana: $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$

è una equazione biquadratica in x :

$$x^4 - (ay - 2y^2)x^2 + y^4 = 0$$

$$x^2 = \frac{(ay - 2y^2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ay - 2y^2}{2}\right)^2 - y^4} \quad ; \quad x = \sqrt{\frac{y}{2} \left[(a - 2y) \pm \sqrt{a^2 - 4ay} \right]}$$

da cui si rivela che la curva non può avere punti sulle $y < 0$ e che $y \leq \frac{a}{4}$; (con $a > 0$).

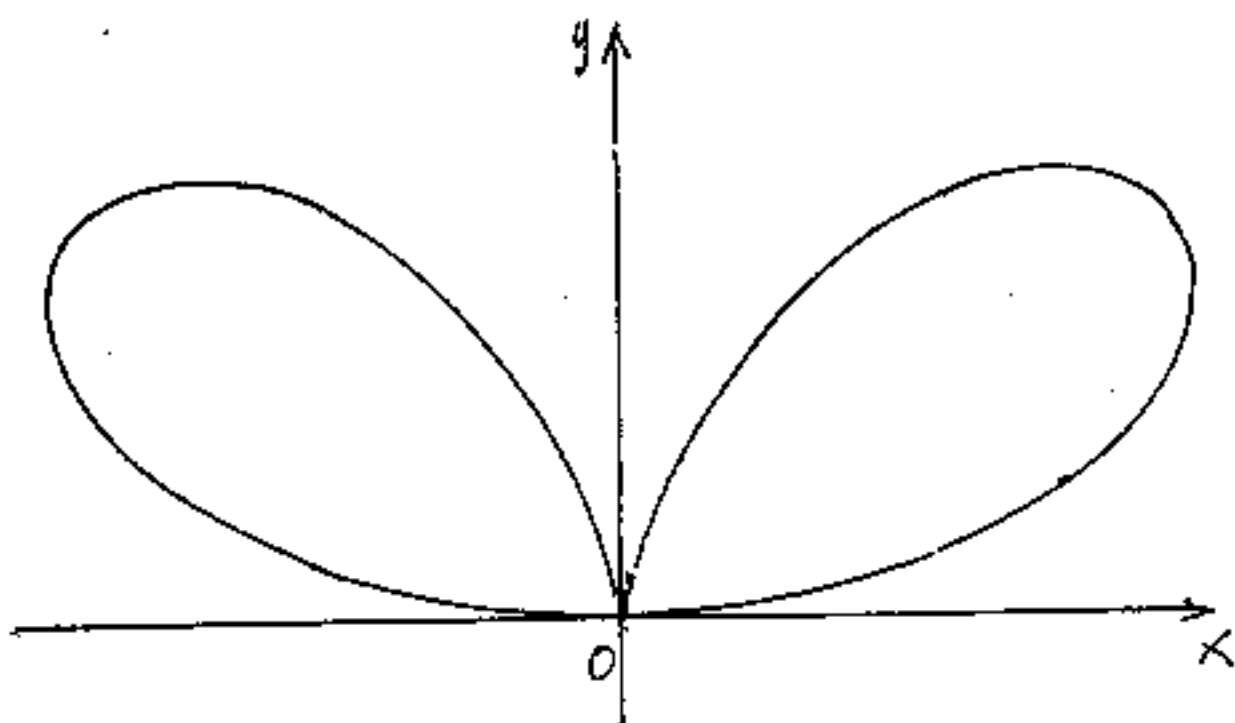
L'equazione in coordinate polari: $\rho = a \sin \theta \cos^2 \theta$

può scriversi: $\rho = a (\sin \theta - \sin^3 \theta)$ cioè $\sin^3 \theta - \sin \theta + \frac{\rho}{a} = 0$

$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = a (\cos \theta - 3\sin^2 \theta \cos \theta) = 0$ per $\cos \theta = 0$ da cui $\theta = 90^\circ$

e per $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ove $\theta = 35^\circ 15' 52'' = 0,615480 \text{ rad}$.

$$\rho_{\max} = a \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \underline{a \frac{2}{3}}$$

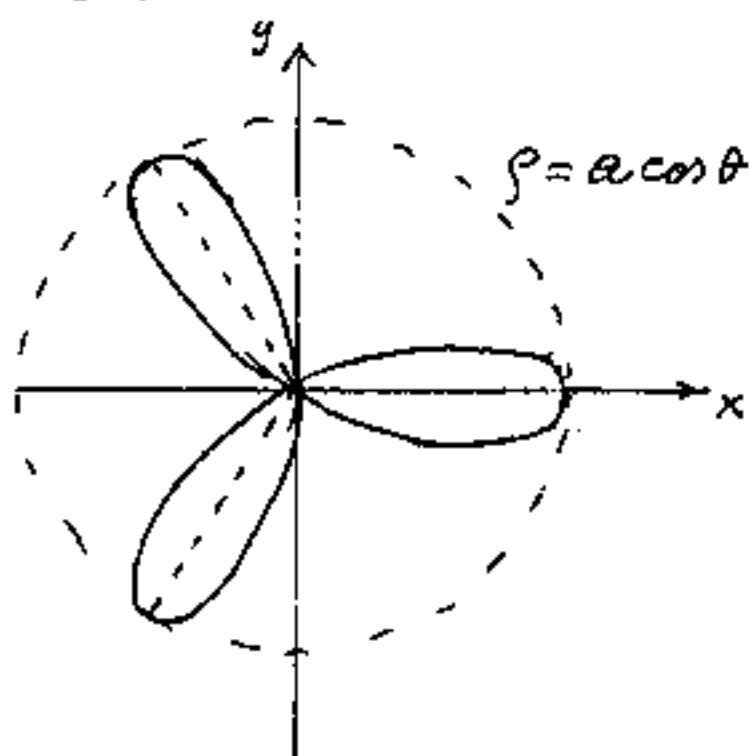
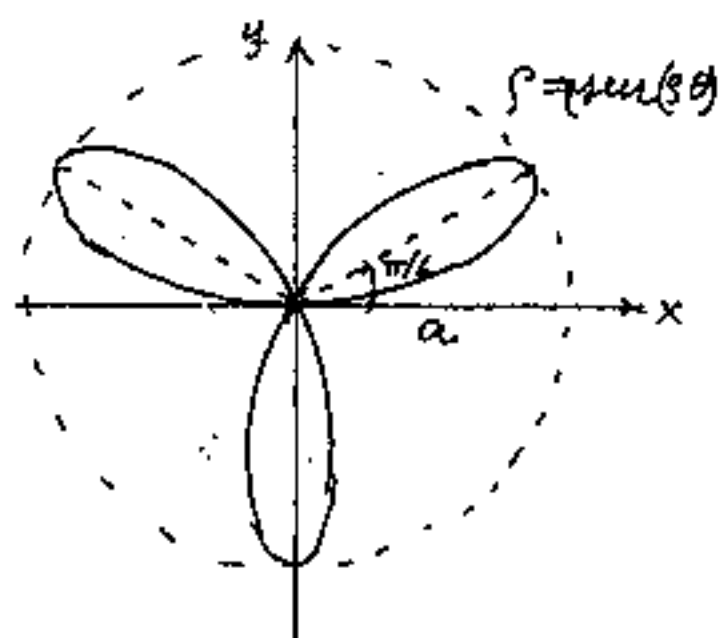


Le Rodonee

Rosa a tre foglie

L'equazione in coordinate polari può essere:

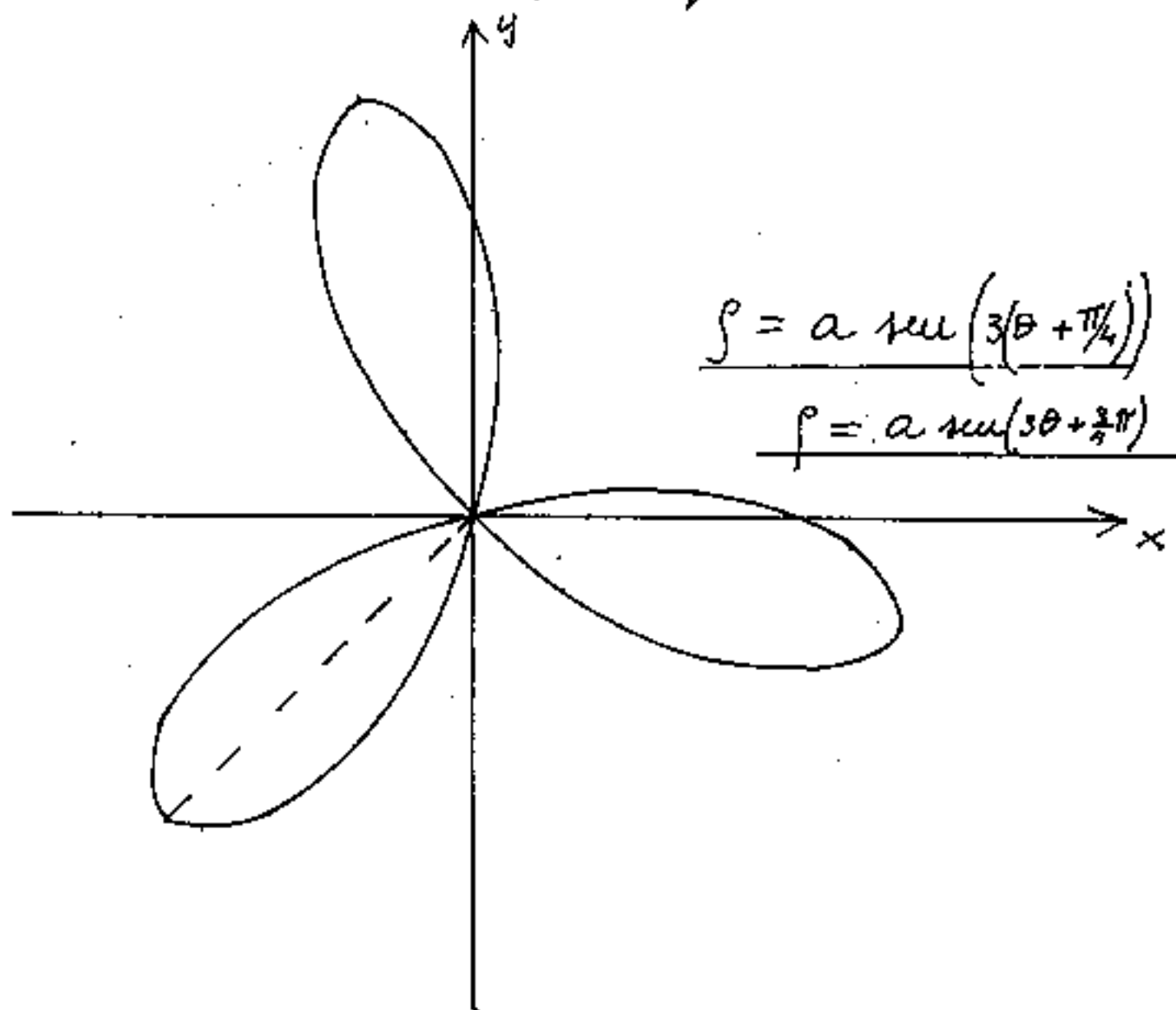
$\rho = a \cos(3\theta)$ oppure: $\rho = a \sin(3\theta)$ se vogliamo che uno dei petali sia sopra un'asse.



La formula si può generalizzare:

$$\rho = a \sin(3(\theta) + \varphi)$$

ove: φ è una costante per far ruotare la rosa



Rosa a quattro foglie

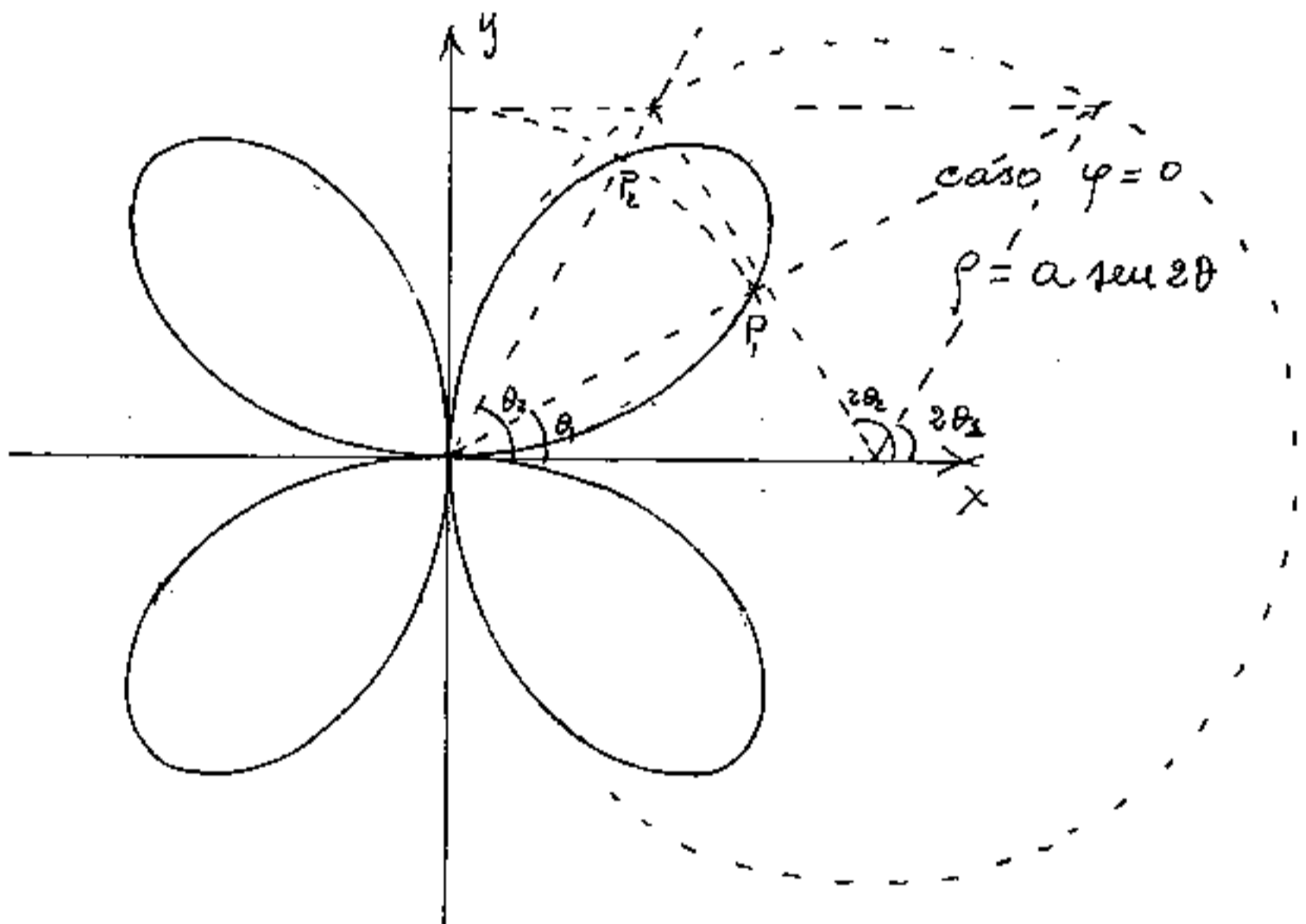
L'equazione può essere generalizzata

$$\rho = a \sin(2\theta + \varphi)$$

ove φ è una costante per far ruotare la rosa.

per: $\varphi = 0$ si hanno le foglie a 45° rispetto agli assi

per $\varphi = \pi/2$ la formula diventa $\rho = a \cos(2\theta)$ e le foglie sono sugli assi.



a tratteggio è indicata la costruzione grafica.

Vedremo che la rosa a quattro foglie è un caso particolare delle podarie dell'asteroide nell'insieme di curve chiamate scarabeo.

La rosa ad n foglie

Che chiameremo margherita; avrà per equazione in coordinate polari:

$$\rho = a \operatorname{sen}(m\theta)$$

per $\theta = 0$; $\rho = 0$

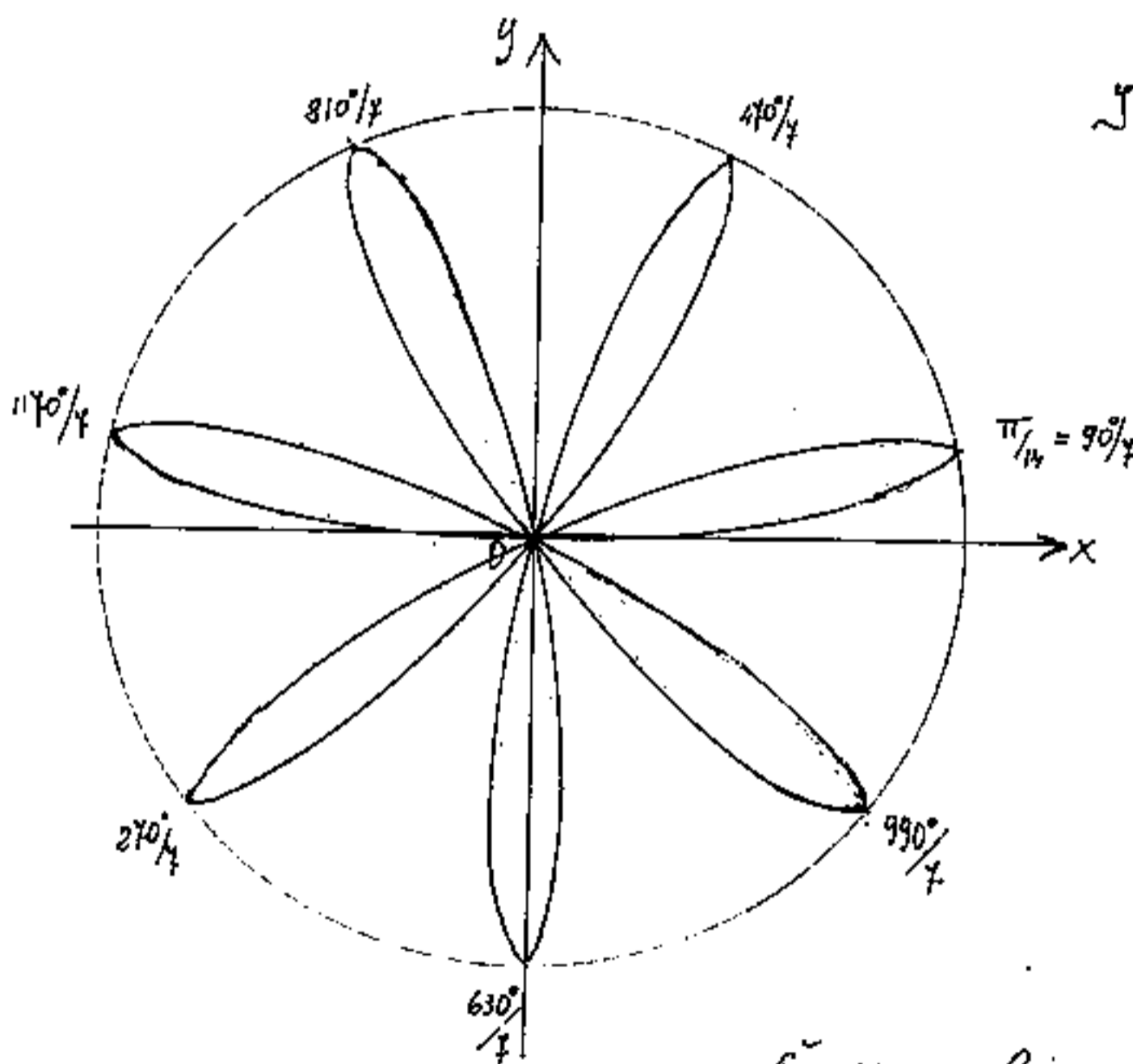
$\theta = \frac{\pi}{2m}$; $\rho = a$

$\theta = \frac{\pi}{m}$; $\rho = 0$

$\theta = \frac{3\pi}{2m}$; $\rho = -a$

$\theta = \frac{\pi}{m}$; $\rho = 0$

Si noti dalla tabella a fianco che i valori negativi di ρ debbono essere presi diametralmente opposti cioè sulla retta: $(\theta + \pi)$; e che per ottenere l'intera margherita basta $0 \leq \theta \leq \pi$



In figura:

$$\rho = a \operatorname{sen}(7\theta)$$

è una linea continua da "0" a $\frac{90^\circ}{7}$ da $\frac{90^\circ}{7}$ a $\frac{270^\circ}{7}$ a $\frac{450^\circ}{7}$...

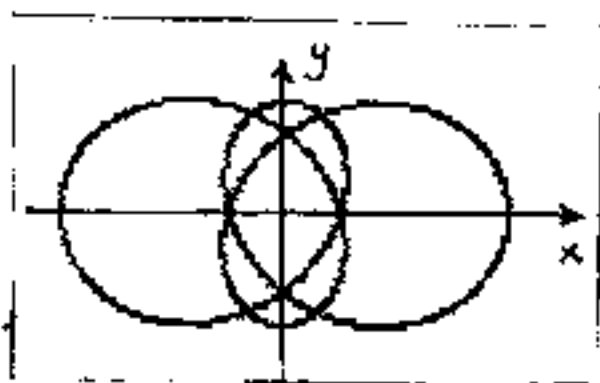
Se prendessimo: $\rho = |a \operatorname{sen}(m\theta)|$ avremmo una margherita a: $2m$ petali.

La Coccinella

Diamo ora una curva, abbastanza divertente che chiameremo Coccinella; l'equazione parametrica è;

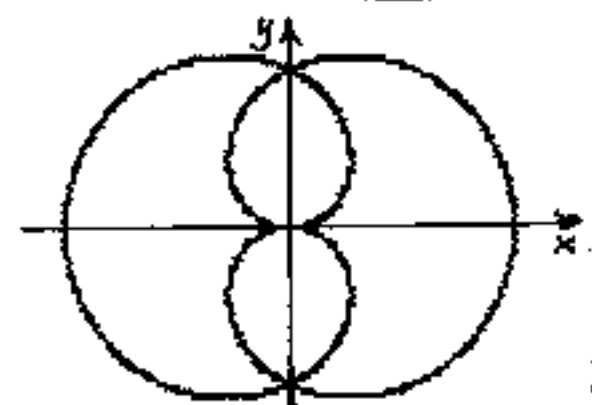
$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \cos 2\varphi \\ y = a \sin \varphi (c + \cos 2\varphi) \end{cases}$$

attenzione "a" è un modulo di scala lineare, "c" è un numero puro, (un rapporto). Il lettore può divertirsi studiando questa curva.

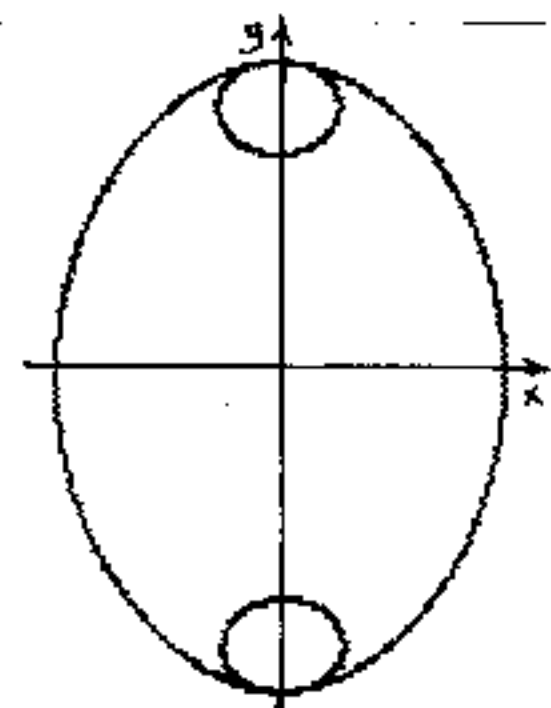


$$a=5; c=0,5$$

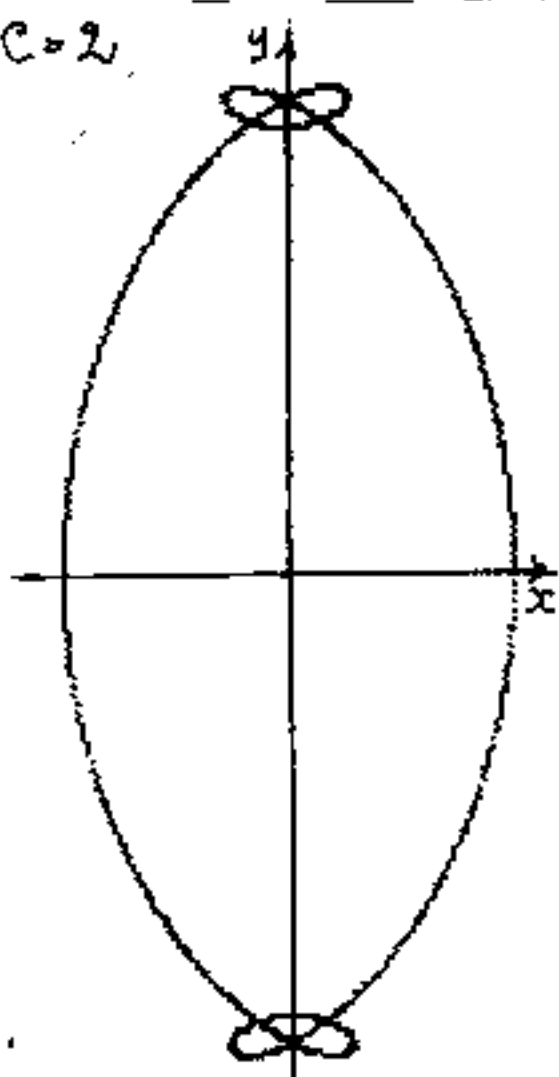
vedi 1:150



$$a=5; c=1$$



$$a=5; c=2$$



$$a=5; c=3$$

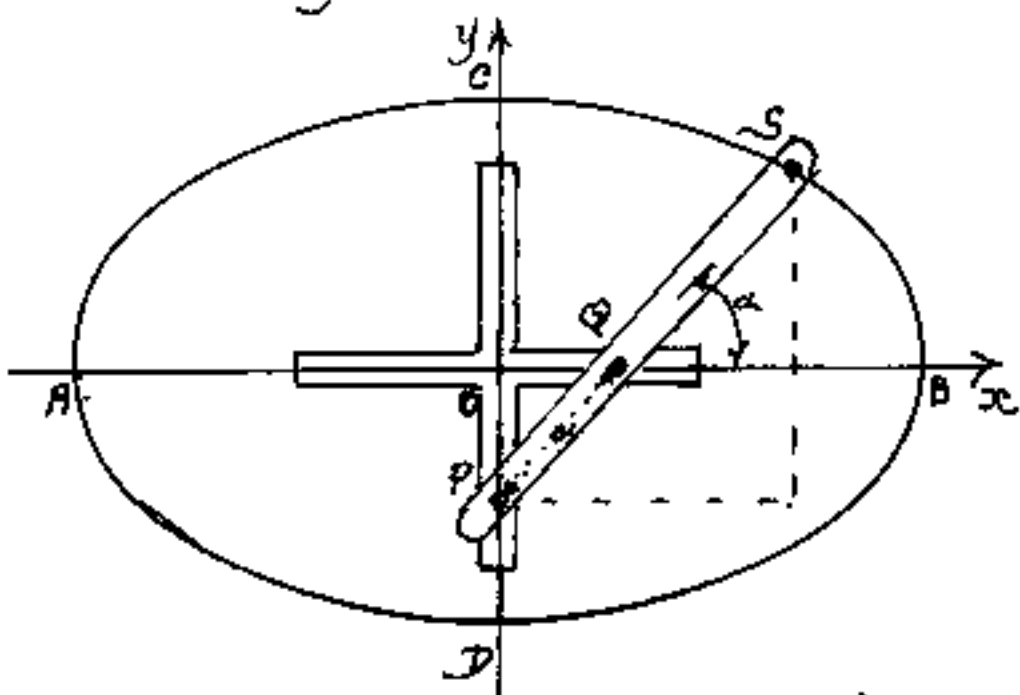
Lo Scarabeo

La curva scarabeo fu pubblicata nel 1858 dal matematico belga Eugène-Charles Catalan.

La parola scarabeo in italiano deriva dal latino *scarabeus* -i; e dal greco: $\chi\acute{\alpha}\rho\alpha\beta\omicron\varsigma$; si riferisce ad una particolare classe di coleotteri la cui forma torza può, in qualche caso, ricreare la curva.

La curva scarabeo è una particolare curva pedale (o podaria) dell'asteroide, costituita dai piedi delle normali alle tangenti l'asteroide provenienti da un punto giacente sulla bisettrice degli assi.

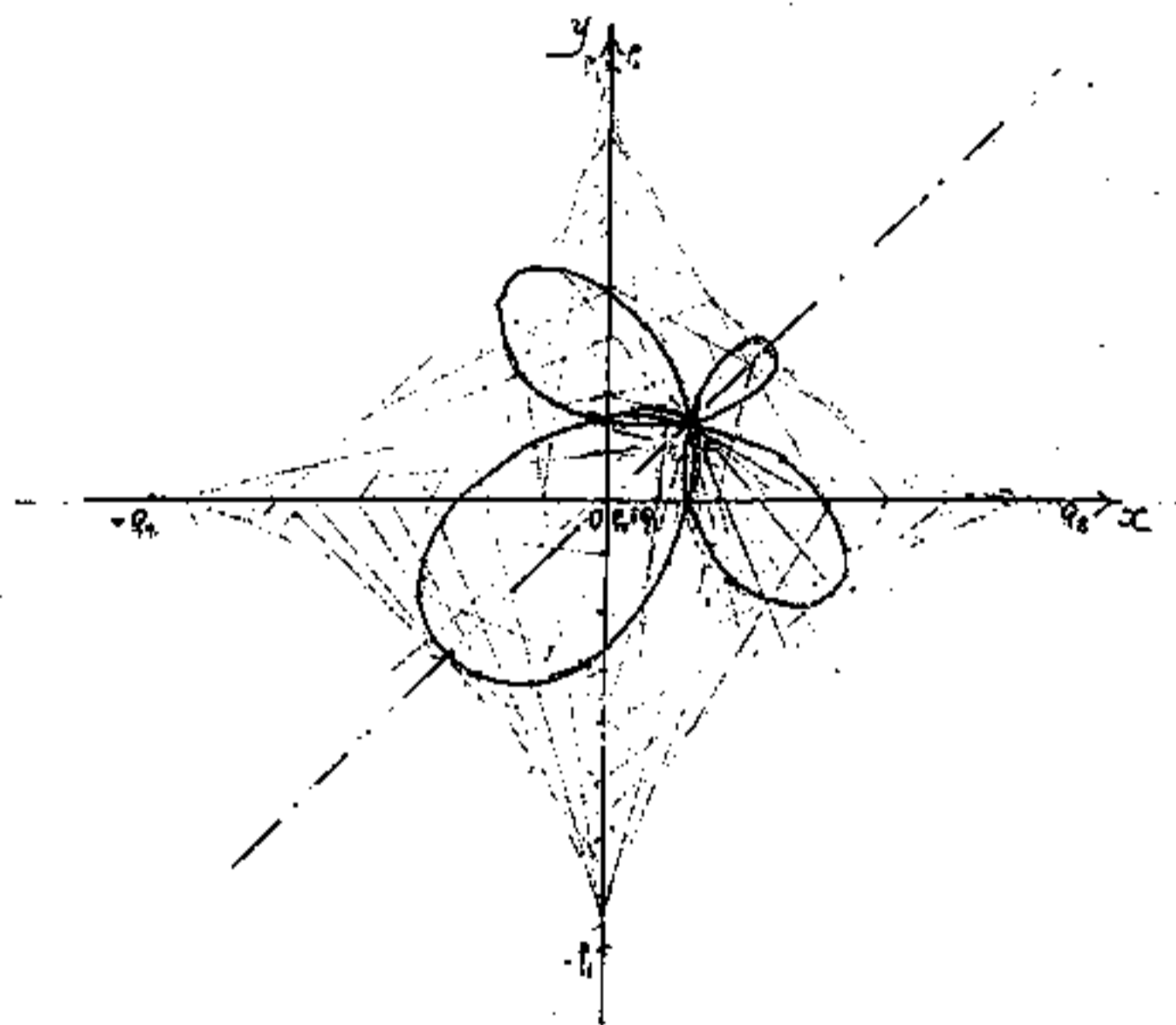
Sappiamo: (v. asteroide) che gli assi ortogonali intercettano, sulle tangenti l'asteroide, segmenti costanti (abbiamo indicato con "a" la lunghezza di tali segmenti: $a = \overline{PQ}$ con P e Q mobili sugli assi).



Un segmento di lunghezza "a" $= \overline{PQ} = \text{costante}$, che si muove mantenendo i suoi estremi: P, e Q sugli assi, ci ricorda l'ellissografo, (che

abbiamo già trattato.) o, nel moto, la punta scrivente "S" traccia un'ellisse.

Dati quindi due assi ortogonali x ed y , ed un segmento \overline{PQ} di lunghezza costante, mobile con P e Q scorrevoli sugli assi. Su una bisettrice dell'angolo retto (per esempio la retta $y=x$) si scelga un punto F da cui tracciare le normali al segmento mobile \overline{PQ} ; i piedi su \overline{PQ} di tali normali è l'insieme dei punti che costituisce la curva Scarabeo.



In figura si sono lasciate, sullo sfondo, le tangenti alla curva asteroide, necessarie per disegnare per punti la curva podaria dell'asteroide. (Lo scarabeo) che si ottiene proiettando sulle tangenti il punto F arbitrario sulla retta: $x=y$.

Ricaviamo l'equazione della curva scarabeo dalla sua definizione di curva pedale (o podaria dell'asteroide).

Sappiamo che il segmento intercettato dagli assi cartesiani sulle tangenti all'asteroide è costante ($\overline{PQ} = a = \text{cost}$).

Le rette che intercettano gli assi nei punti P, Q in forma segmentaria: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$; ove: $a^2 = (p^2 + q^2)$
in forma esplicita:

$$y = \left(\frac{-q}{\sqrt{a^2 - q^2}} \right) x + q$$

Sia F il punto da cui tracciamo le normali alle rette tangenti. Essendo F sulla bisettrice dell'angolo retto degli assi, le sue coordinate sono uguali: $x_F = y_F = c$

L'equazione della retta normale sarà:

$$y = \left(\frac{+\sqrt{a^2 - q^2}}{q} \right) (x - c) + c$$

I punti comuni alle due rette (piedi delle normali) sono i punti dello scarabeo, perciò posto: $y = y_m$

$$\text{avremo: } \left(\frac{+\sqrt{a^2 - q^2}}{q} + \frac{q}{\sqrt{a^2 - q^2}} \right) x = \frac{\sqrt{a^2 - q^2}}{q} c - c + q$$

$$\text{ma: } \underline{q = a \cdot \sin(\alpha)}$$

per cui sostituendo:

$$\left(\frac{\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{a \cos \alpha} + \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha}} \right) X = \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{a \cos \alpha} c - c + a \cos \alpha$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) X = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} c - c + a \cos \alpha$$

moltiplicando per $(\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha)$

$$X = (\operatorname{sen}^2 \alpha) c - (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) c + a (\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$X = \operatorname{sen} \alpha \left[a \cos^2 \alpha + c (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) \right]$$

sostituendo nella:

$$y = \frac{-q}{p} x + q \quad ; \quad y = \frac{-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} x + a \cos \alpha$$

$$y = \cos \alpha \left[a \operatorname{sen}^2 \alpha + c (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) \right]$$

Sono queste le equazioni parametriche dello scarabeo. Se poniamo $\frac{c}{a} = K$

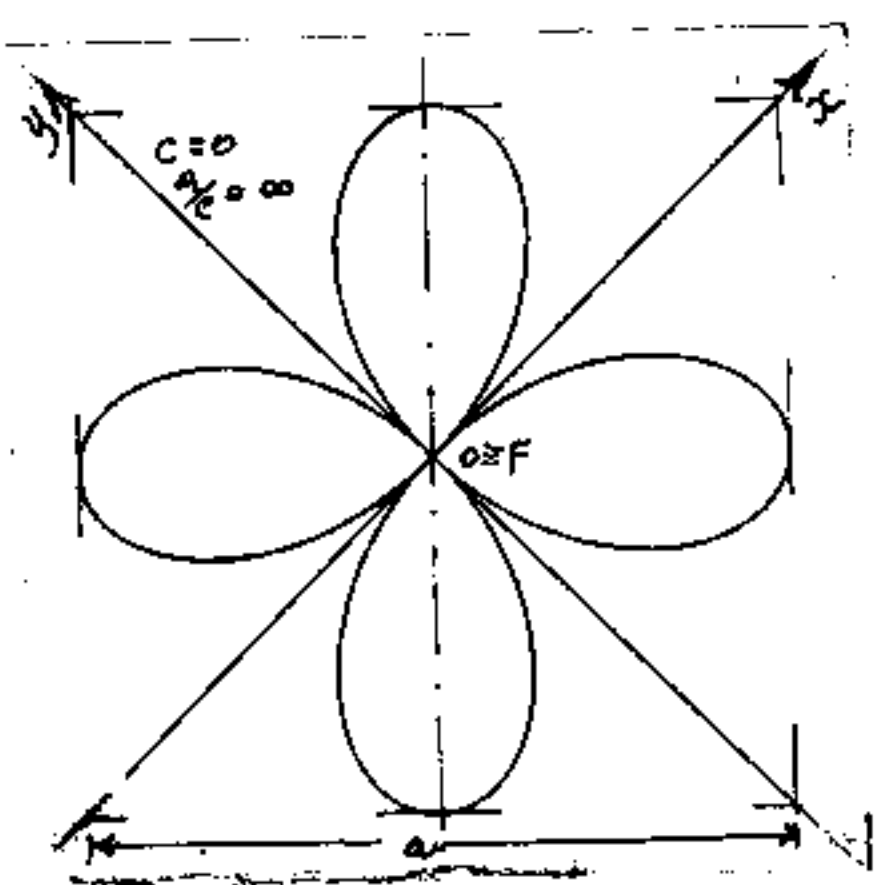
$$\begin{aligned} X &= a \operatorname{sen} \alpha \left[\cos^2 \alpha + K (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) \right] \\ Y &= a \cos \alpha \left[\operatorname{sen}^2 \alpha + K (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) \right] \end{aligned}$$

La configurazione della curva scarabeo varia molto al variare di K .

In particolare se F è interno all'asteroide si ha: $c\sqrt{2} < a/2$

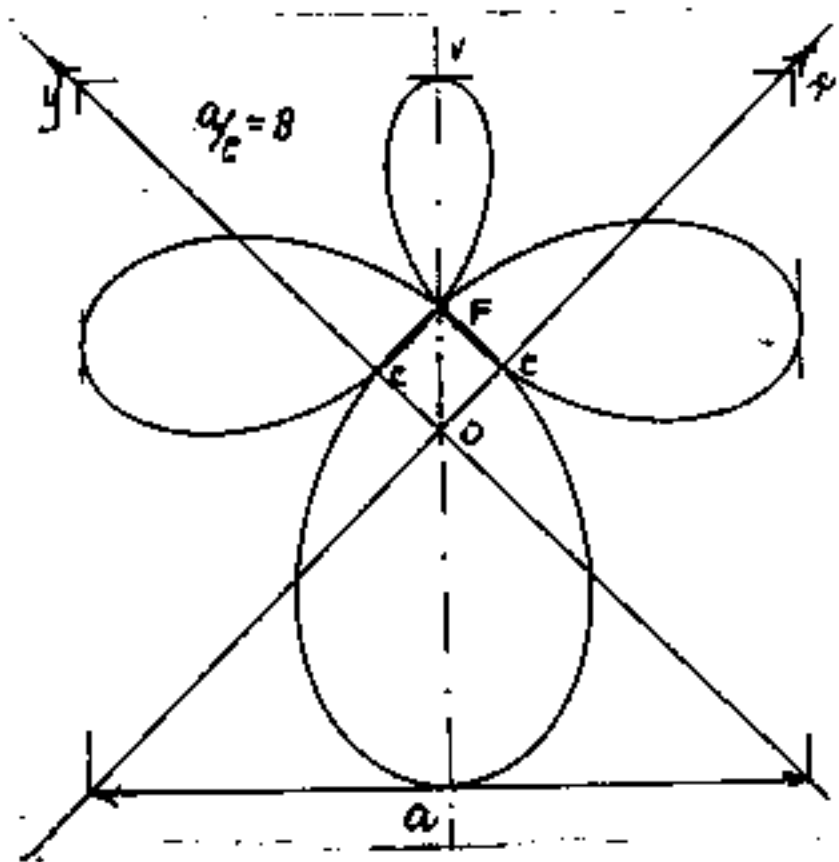
Presentiamo alcune curve al variare di: $\frac{1}{K} = \frac{a}{c}$

Nei disegni si è mantenuto costante il modulo "a",
 si è variata solo la posizione di F. Cioè tutti i di-
 segni sono podarie della stessa asteroide.

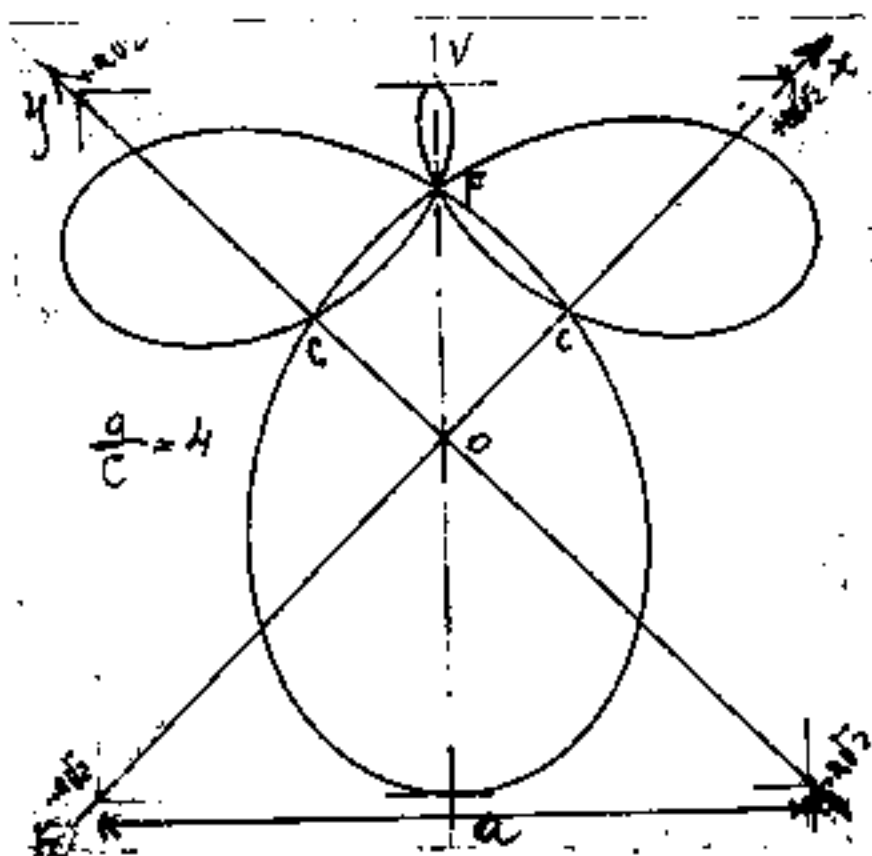


Con F coincidente col centro
 assi (c=0), si entra nella fa-
 miglia delle rodanee e preci-
 samente si ha la rosa a quat-
 tro foglie. (vedi rodanee).

$$\begin{cases} x = a \cos(\alpha) \cdot \sin^2(\alpha) \\ y = a \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) \end{cases}$$

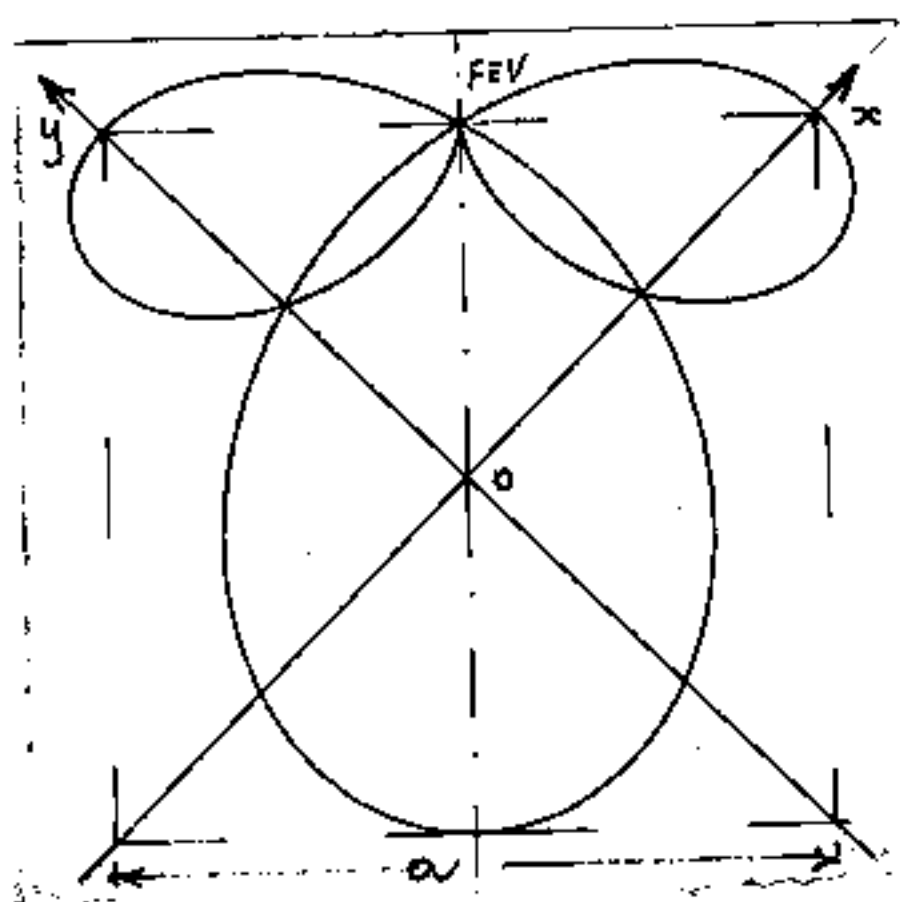


Con $a/c = 8$ la curva ha già
 l'aspetto della curva detta
scarabeo di cui abbiamo da-
 ta la formula generale come
 podaria (opedale) della curva
 asteroide.



Con $a/c = 4$ il coppia supe-
 riore è abbastanza impic-
 colito, mentre è cresciuto
 il coppia inferiore. (E' in
 questo campo che i testi
 presentano la configurazione
 dello scarabeo).

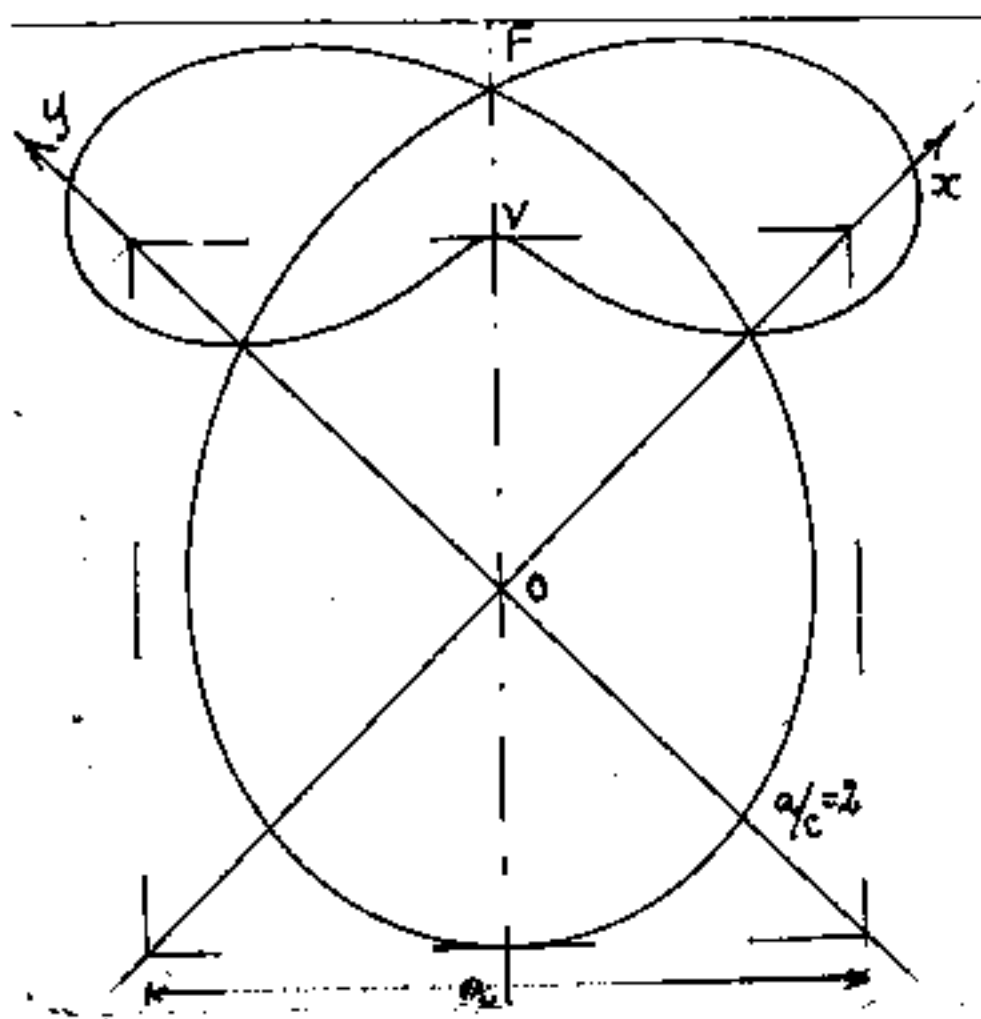
Fin qui F è stato interno alla curva Asteroide; conside-



riamo F sulla tangente l'Aste-
roide: $\frac{a}{2} = c\sqrt{2}$; $(\frac{a}{c} = 2\sqrt{2})$.

Si noti che il coppia superiore è sparito, è ridotto ad un punto coincidente con F .

$$(\overline{OF} = a/2)$$

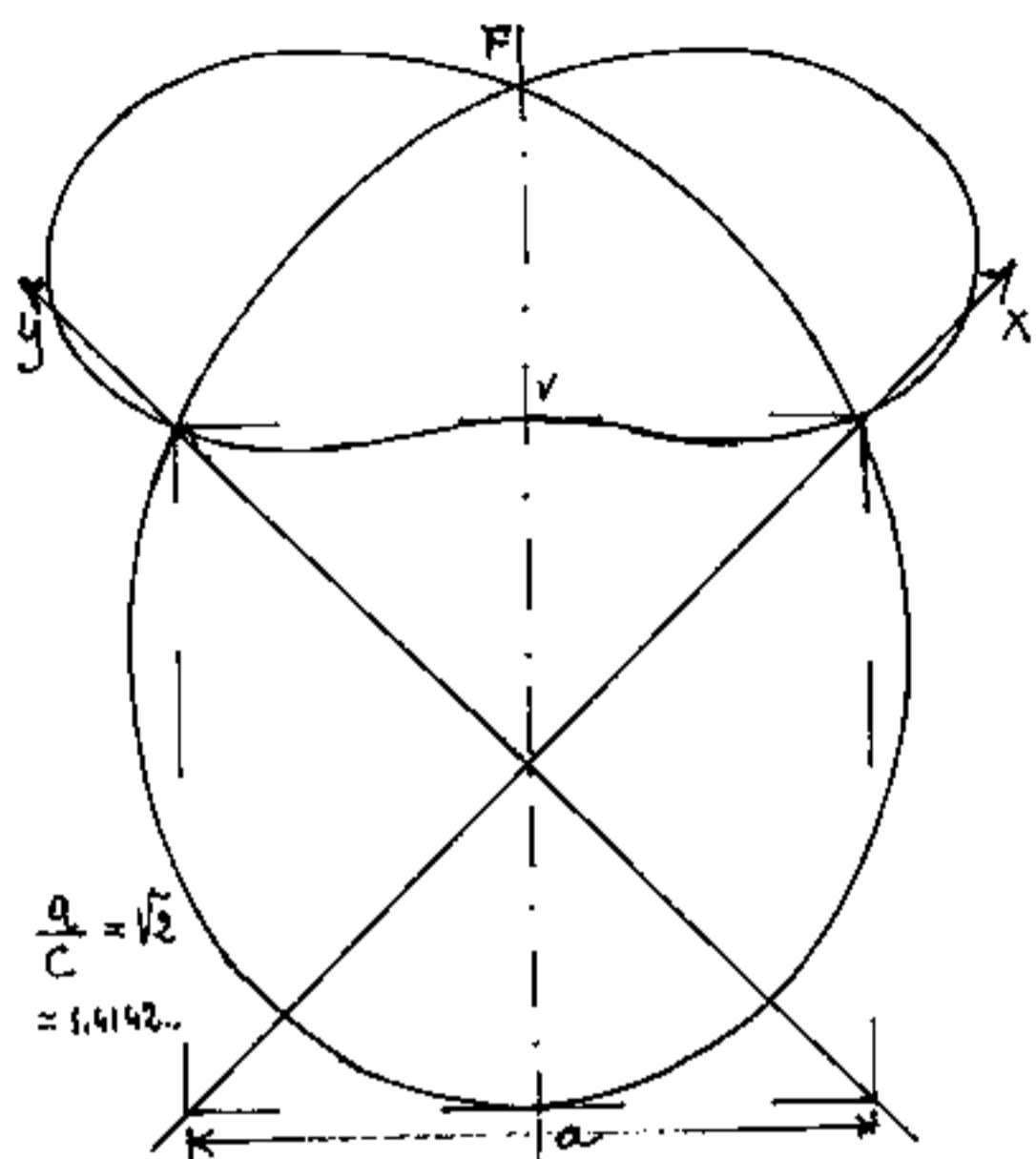


Se iniziamo a porre F esterno alla curva asteroide, il punto F , già quadruplo, si riduce ad un punto doppio, ed il vertice V resta tangente l'asteroide, però dalla parte interna.

Il coppia non si riforma, sull'asse \overline{FV} .

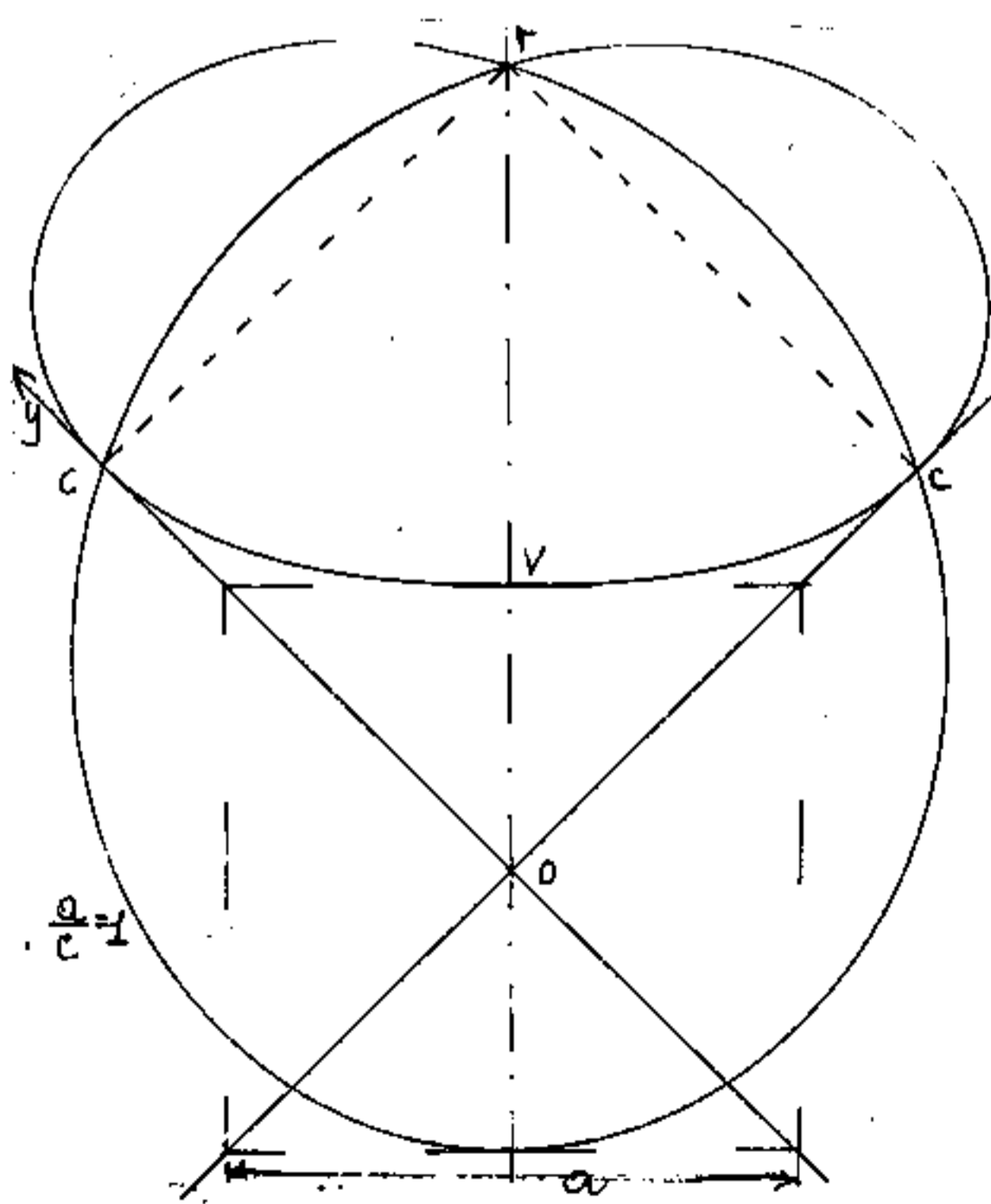
Continuando ad allontanare F dal centro O , ma rispettando l'appartenenza alla retta bisettrice: $y = x$, abbiamo ancora un limite in cui la tangenza in "V" all'asteroide passa da interna ad esterna, cioè nel punto "V" vi sarà una inversione di curvatura. Presentiamo ancora due figure

ottenute allontanando ulteriormente F da O e dove si può notare il cambio di curvatura in V



da verso il basso a verso l'alto, da tangente interno a tangente esterno all'asteroide.

Si noti come "a" sia la stessa per le due curve. cioè il quadrato di lato "a" che delimita l'asteroide rimane lo stesso anche se le figure si ampliano



notevolmente con l'allontanamento di F esternamente all'asteroide.

Con F in campo finito la configurazione è circa la stessa; con $F \rightarrow \infty$ si hanno due rette in campo reale.

La formula dello scarabeo, viene riportata nell'enciclopedia delle Matematiche Elementari (edita Hoepli); e nel Dizionario dei Termini Matematici del Piccato (ed. Bur Rizzoli) nella forma:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx) = a^2(x^2 - y^2)$$

ove c corrisponderebbe al nostro $c \cdot \sqrt{2}$ ed " a " una costante "particolare".

Pero' se nelle nostre formule poniamo $a = 4,25$ ed $c = 1$ otteniamo le figure riprodotte nelle due opere citate. Mentre se nella formula da loro riportata poniamo $x = \text{zero}$ anzichè trovare le quattro radici di cui due uguali all'ordinata di F , una maggiore positiva ed una negativa otteniamo:

$$y^2(y^2) = a^2(-y^2)$$

ove ordinariamente avremmo: $y^2 = \pm 0$

ed a^2 deve essere immaginario $y = \sqrt{-a^2}$

A noi interessa semplificare i problemi e lasciamo ad altri complicarli —

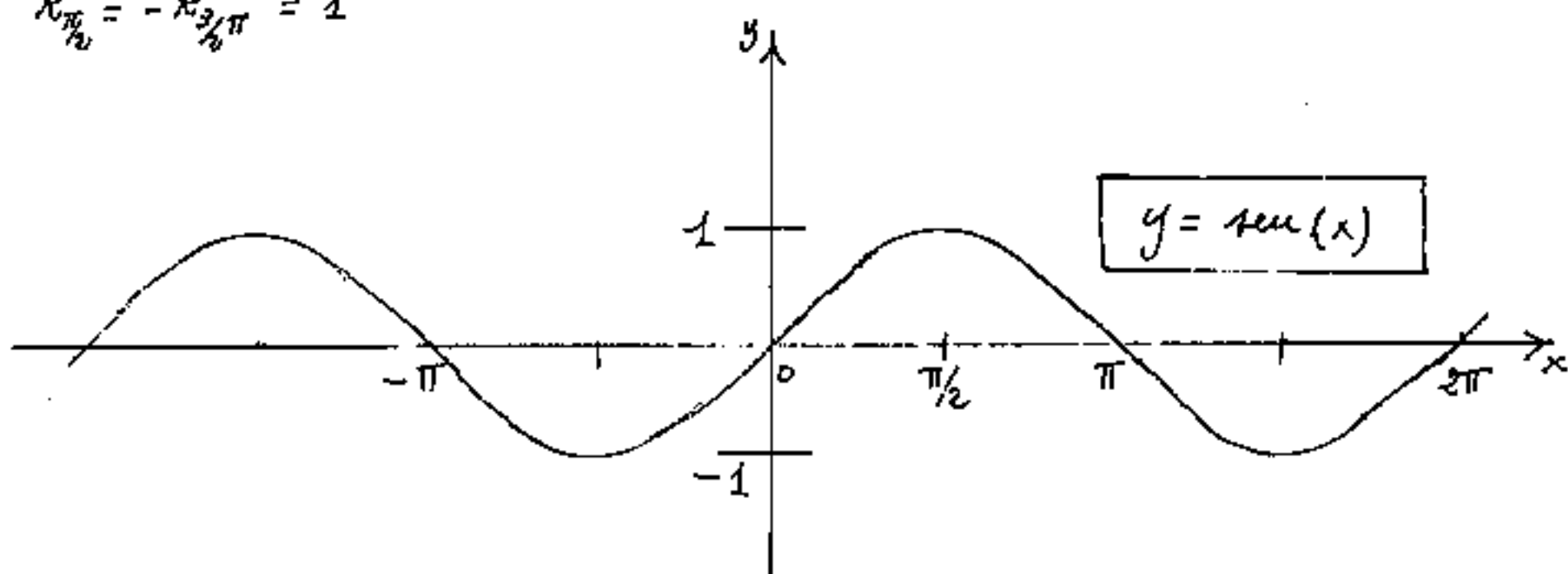
Comunque gli assi sarebbero traslati in F per avere $y = 0$ (ma in figura sono indicati altri assi).
Quindi v'è qualche errore ed abbiamo speso troppo tempo per cercarlo

Grafici delle funzioni trigonometriche circolari

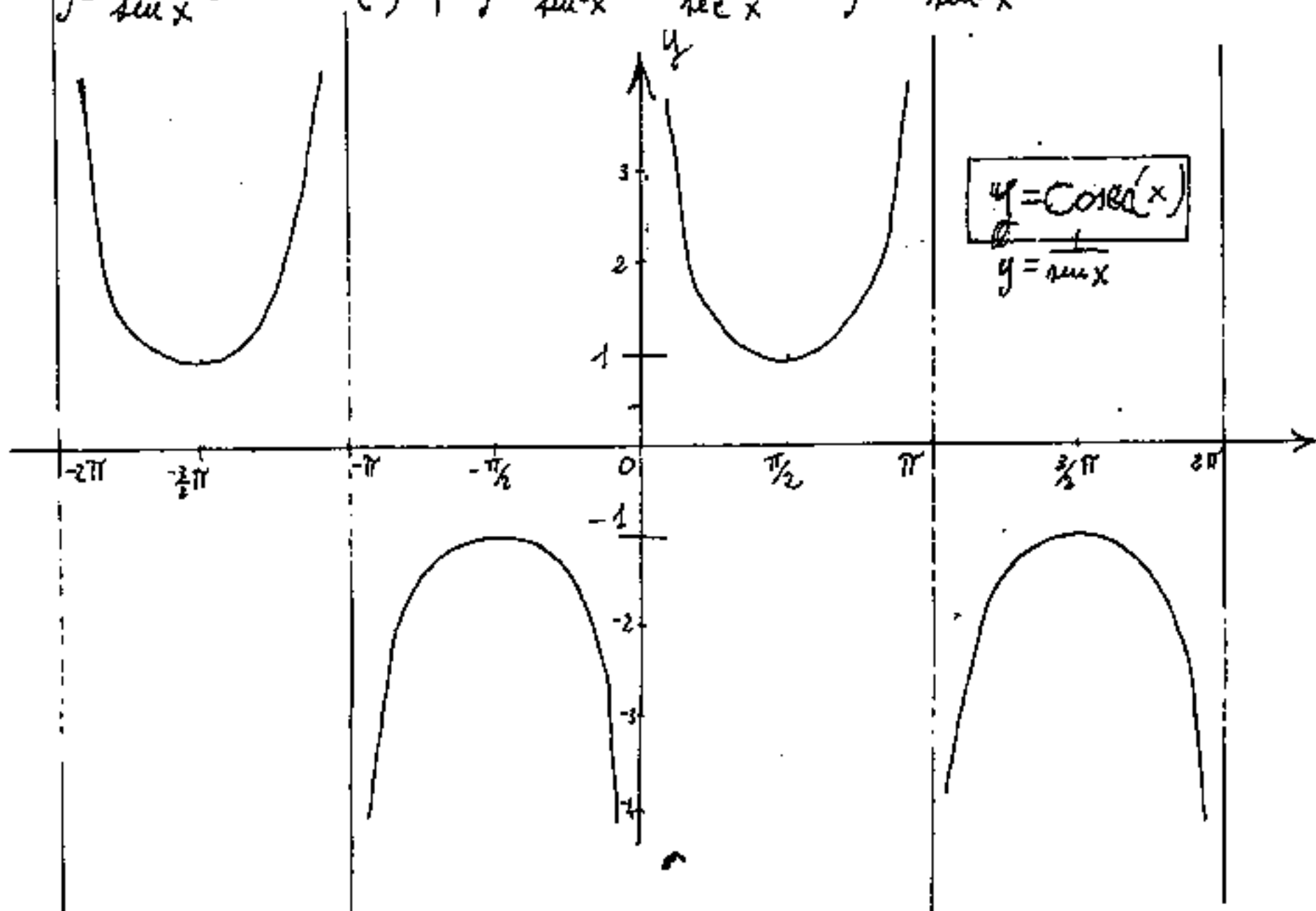
I grafici delle funzioni trigonometriche: $\sin(x)$; $\cos(x)$; $\tan(x)$; sono già stati esposti nel I° volume; tuttavia li ripetiamo per completezza.

$$y = \sin(x); \quad y' = \cos(x); \quad y'' = -\sin(x); \quad y_0' = -y_\pi' = y_\pi' = 1;$$

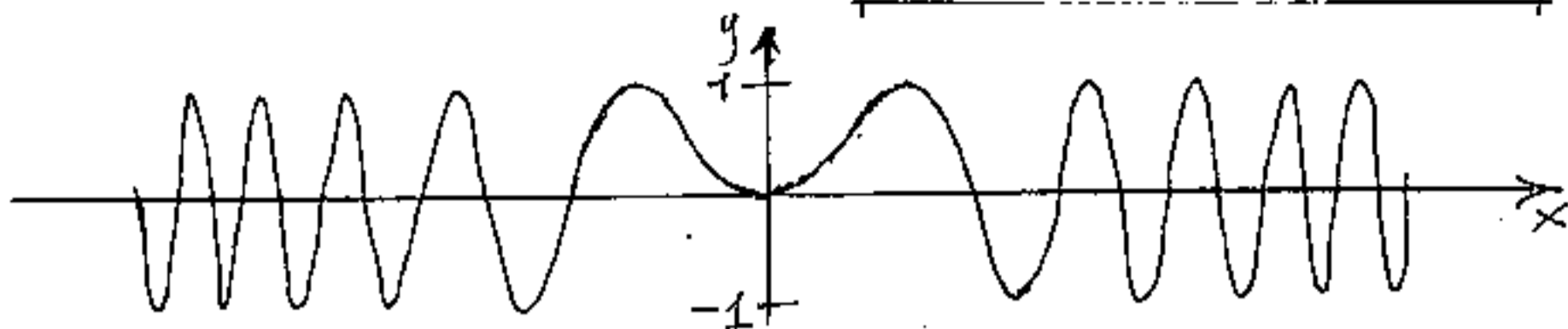
$$R_{\pi/2} = -R_{3/2\pi} = 1$$



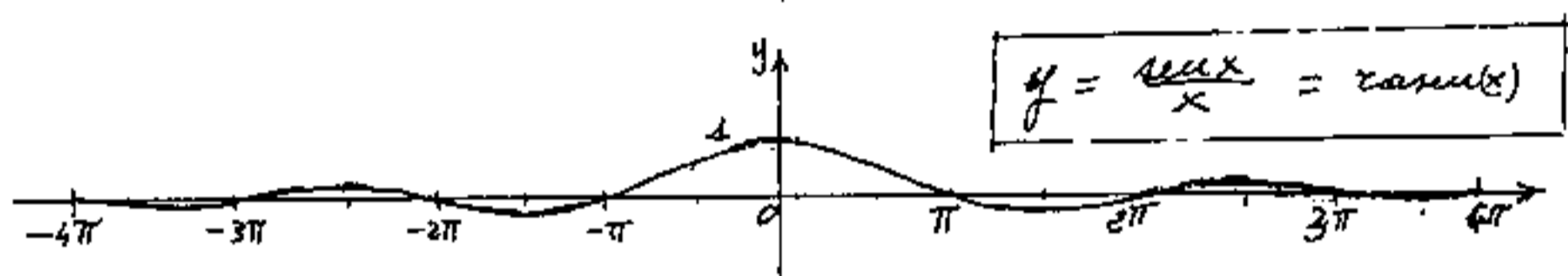
$$y = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec}(x); \quad y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sec x} = y'' = \frac{-2 + \sin x}{\sin^3 x}$$



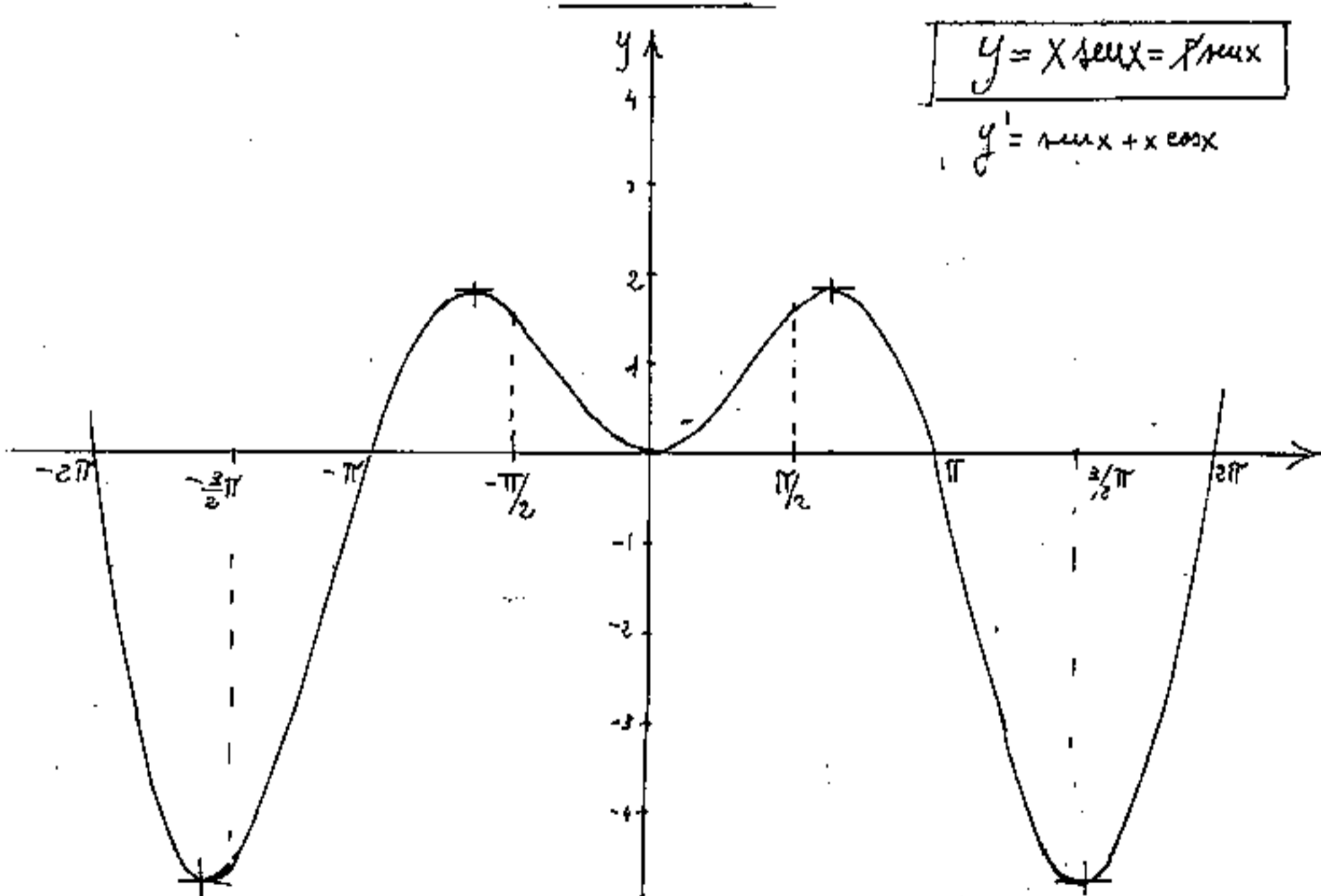
$$y = \text{seu}(x^2) \quad (\text{integrale di Fresnel})$$



funzione che mantiene l'ampiezza, ma diminuisce la lunghezza d'onda (aumenta la frequenza)

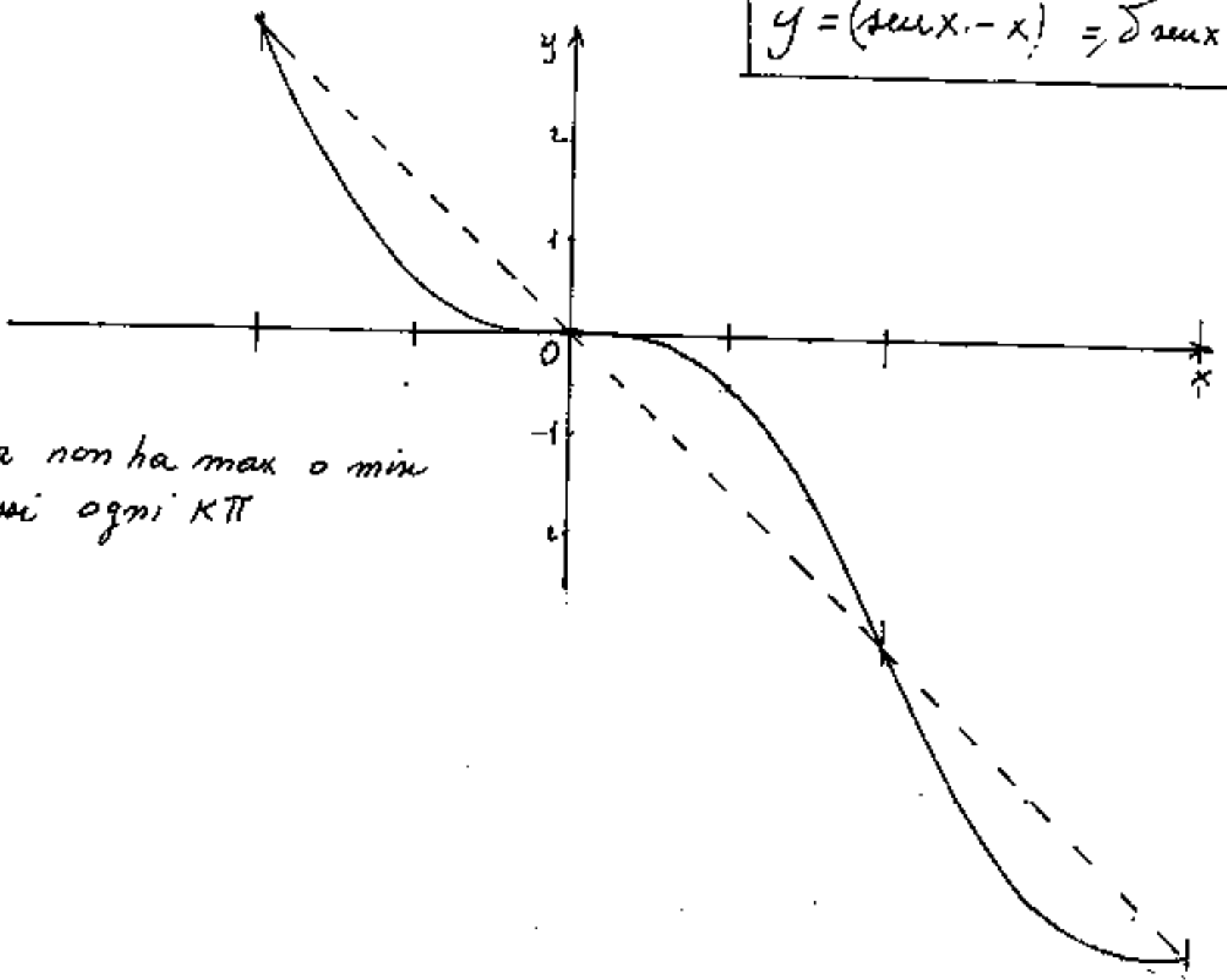


funzione che va velocemente smorzandosi in ampiezza mantenendo costante la lunghezza d'onda



si noti che i max e min sono spostati cioè si hanno per $\text{catu}(x) = \frac{\pi}{2}$ e che a frequenza costante aumenta l'ampiezza.

$$y = (\sec x - x) = \int \sec x$$

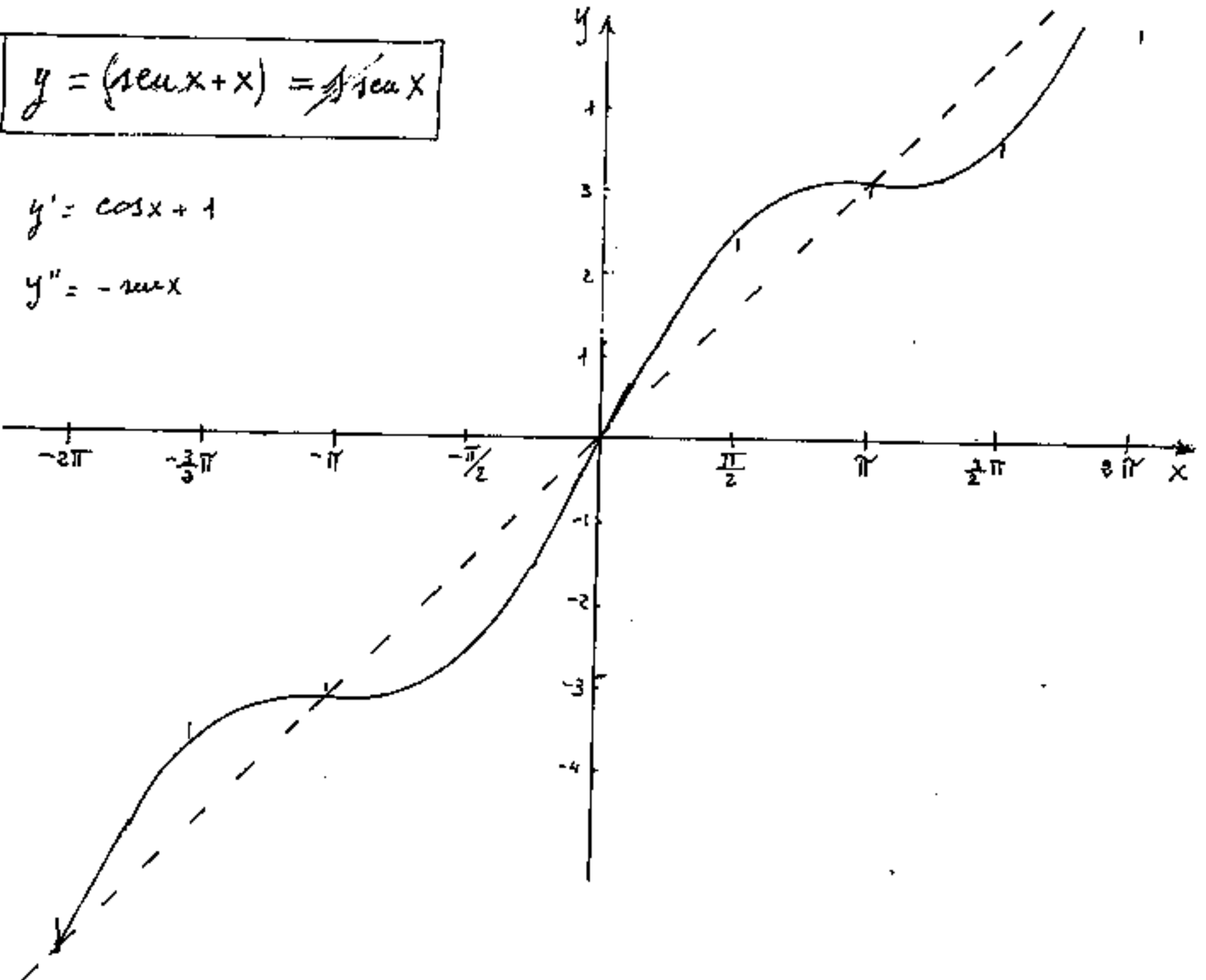


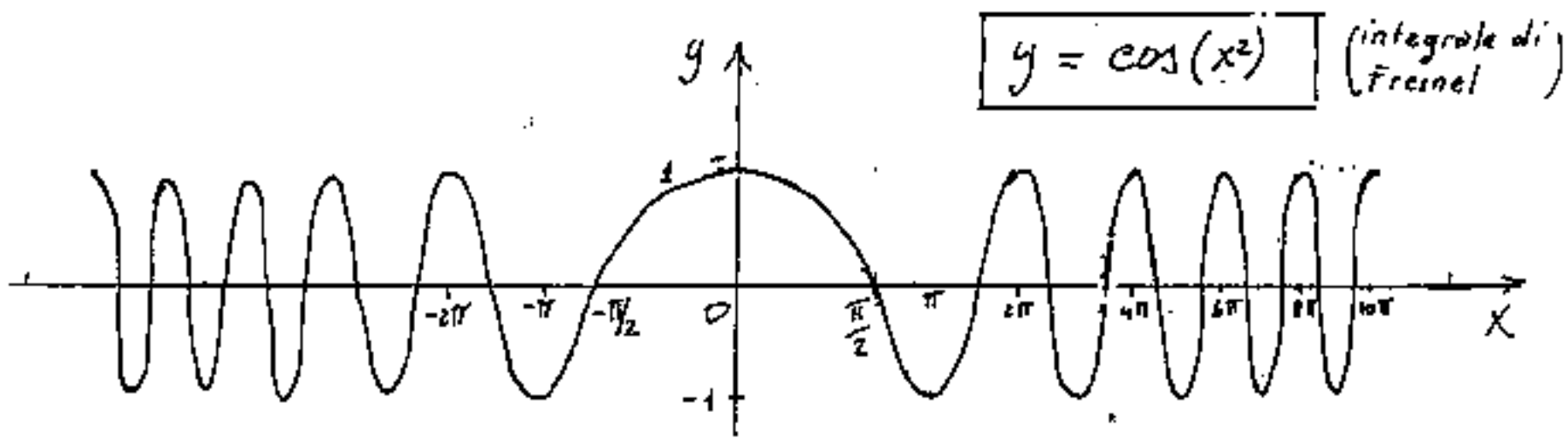
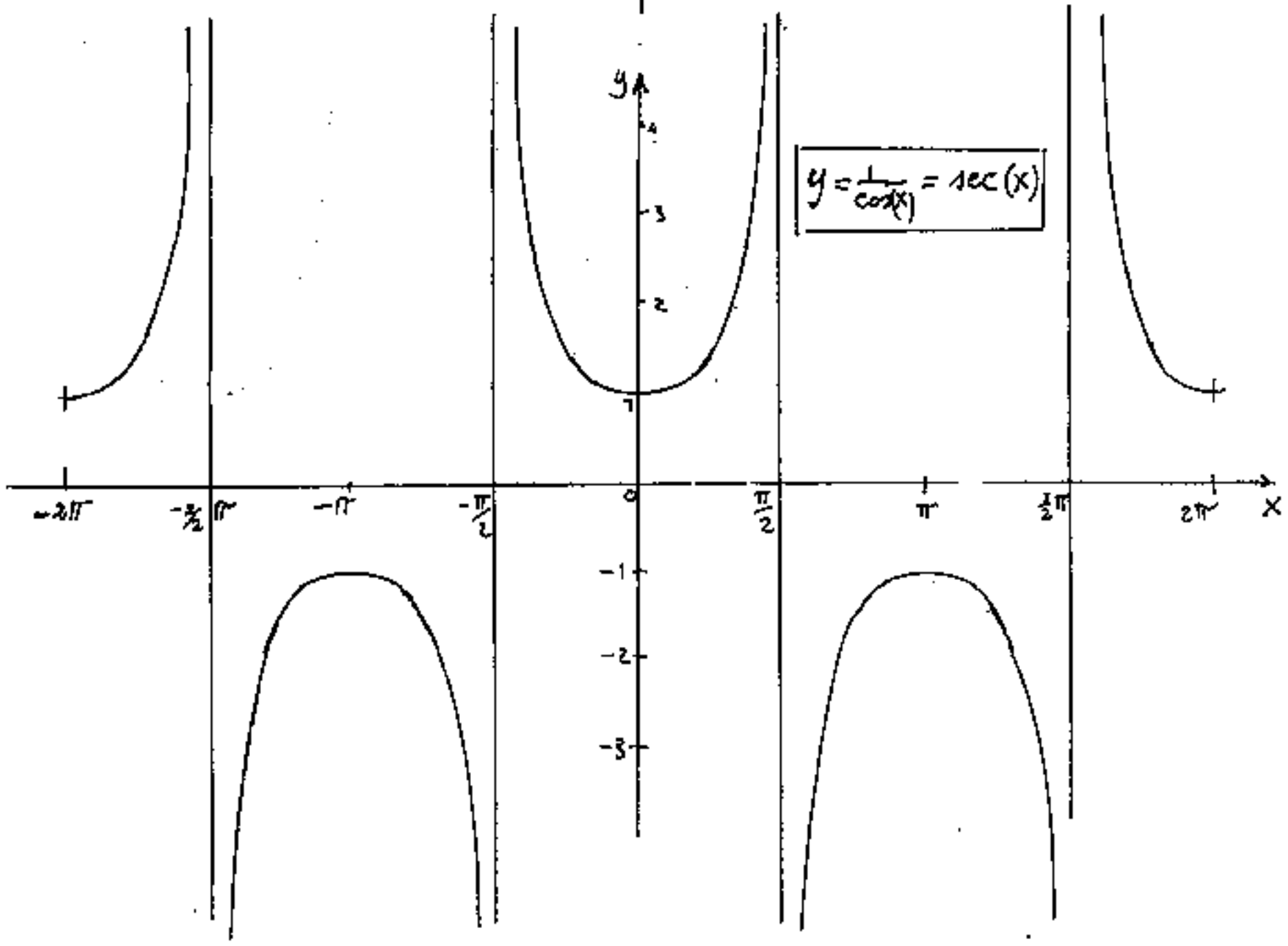
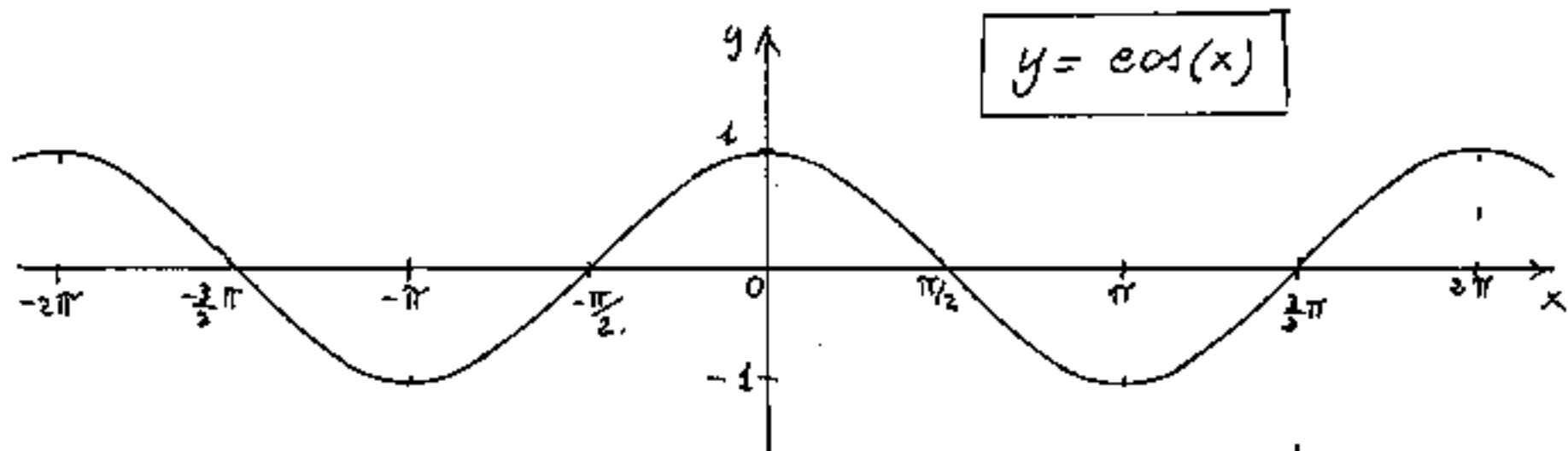
La curva non ha max o min
solo flessi ogni $k\pi$

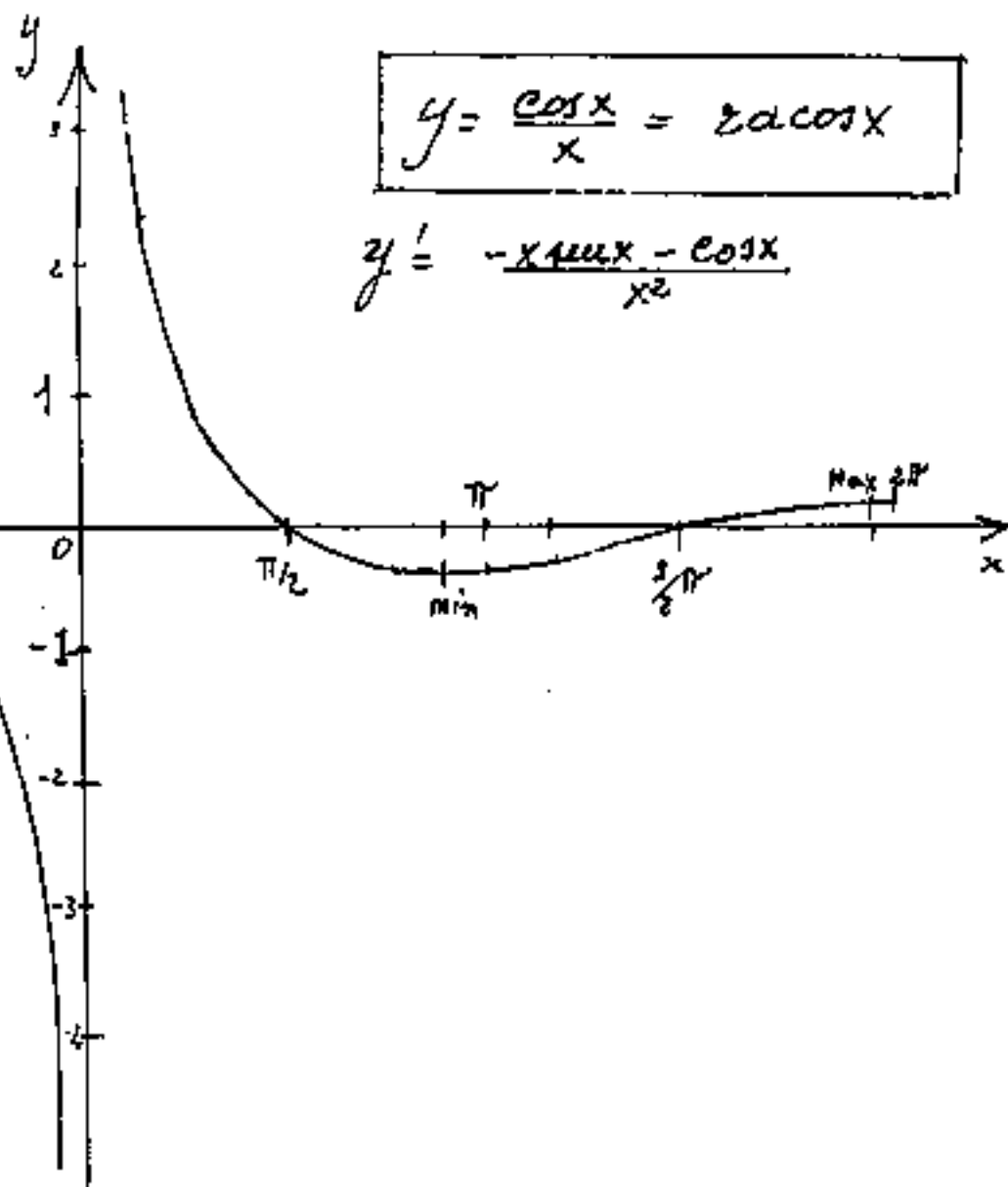
$$y = (\sec x + x) = \int \sec x$$

$$y' = \cos x + 1$$

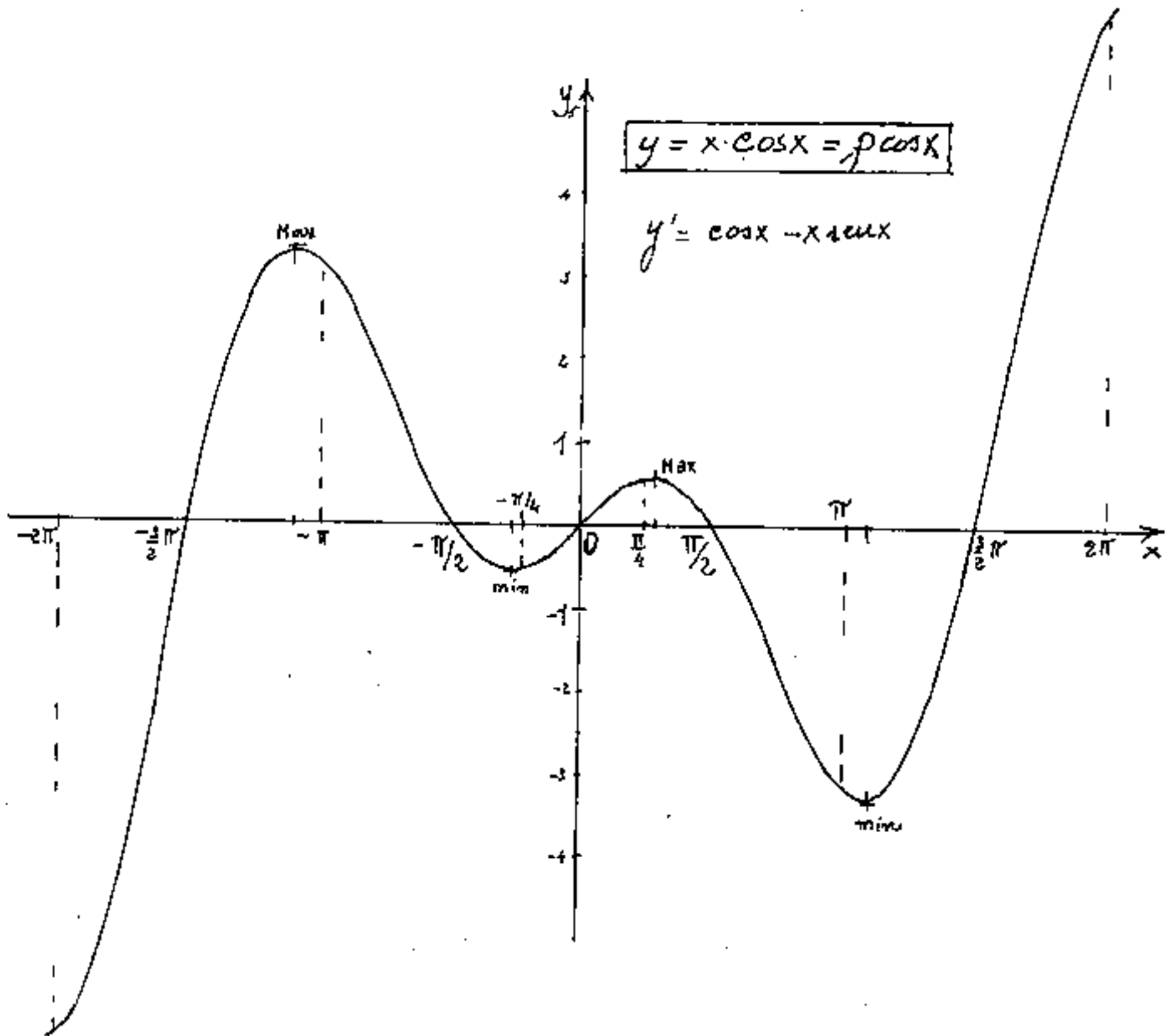
$$y'' = -\sec x$$

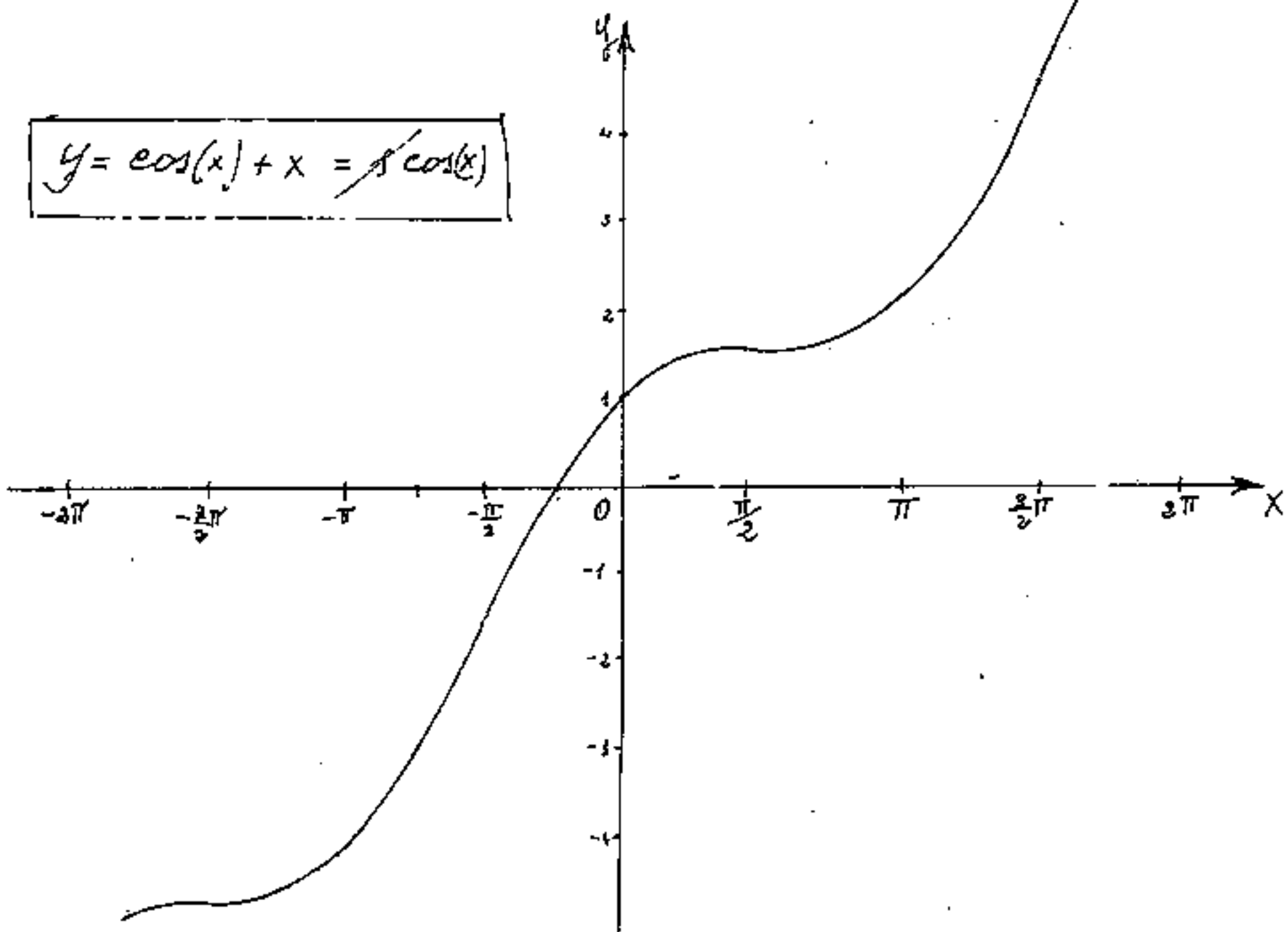
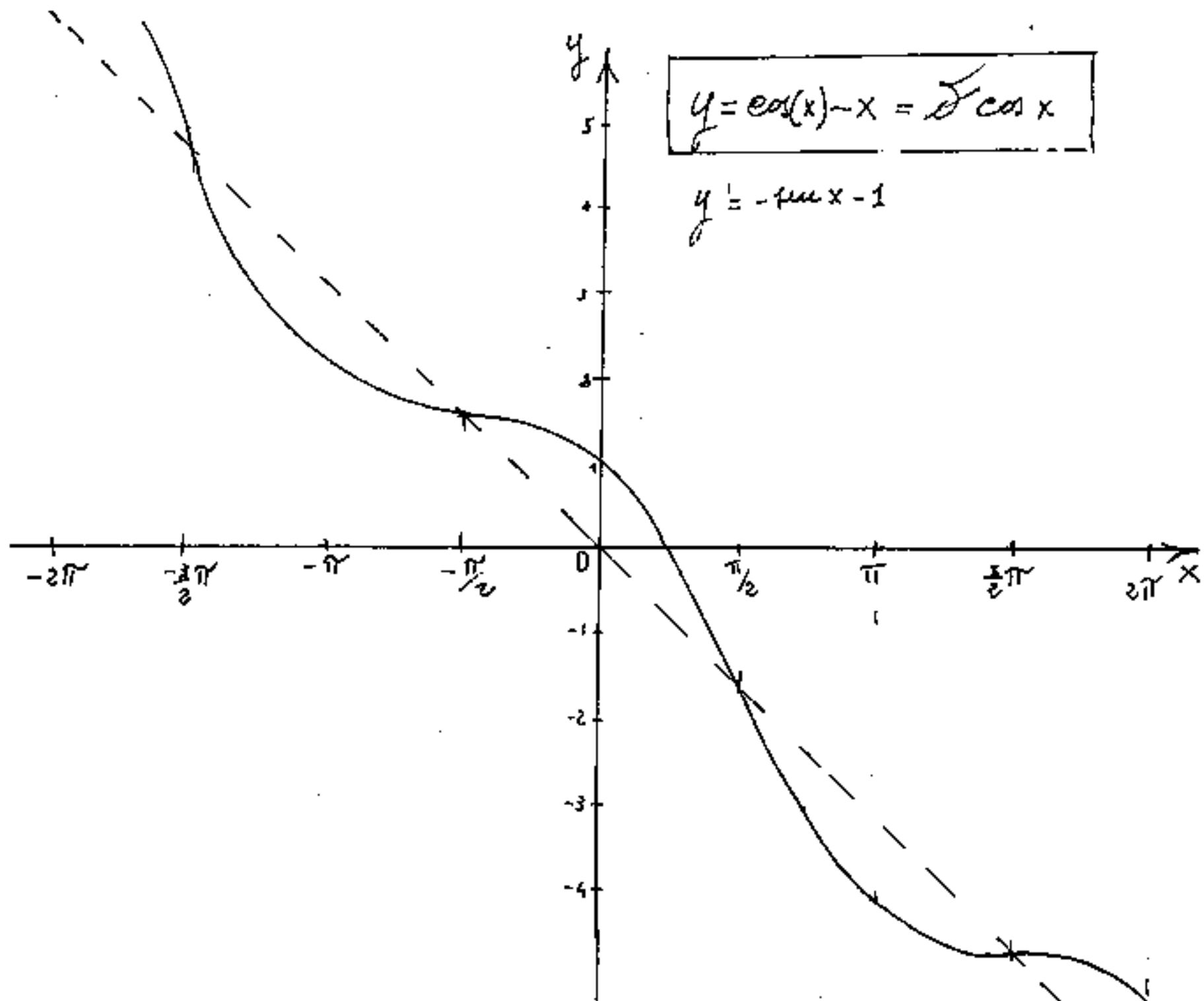


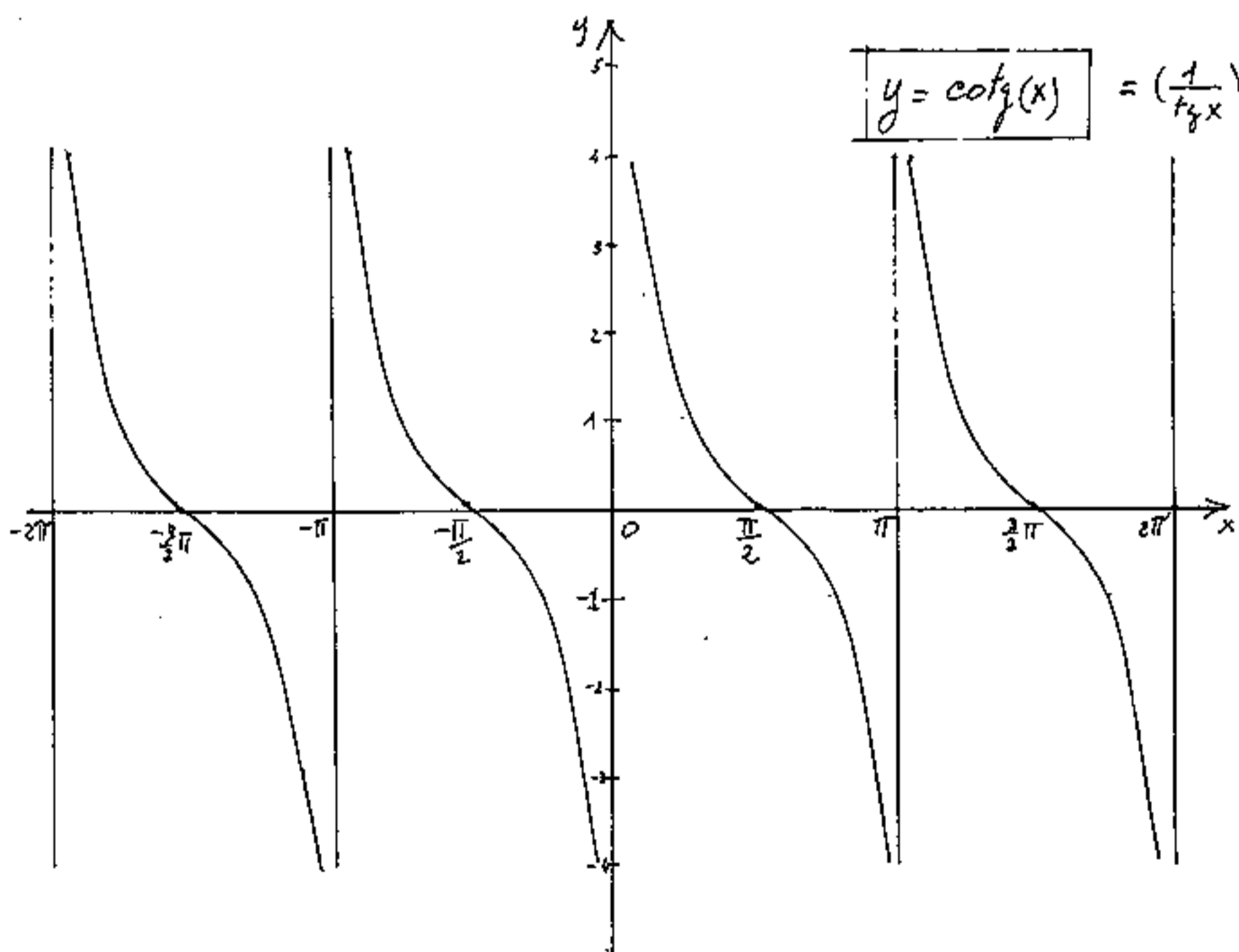
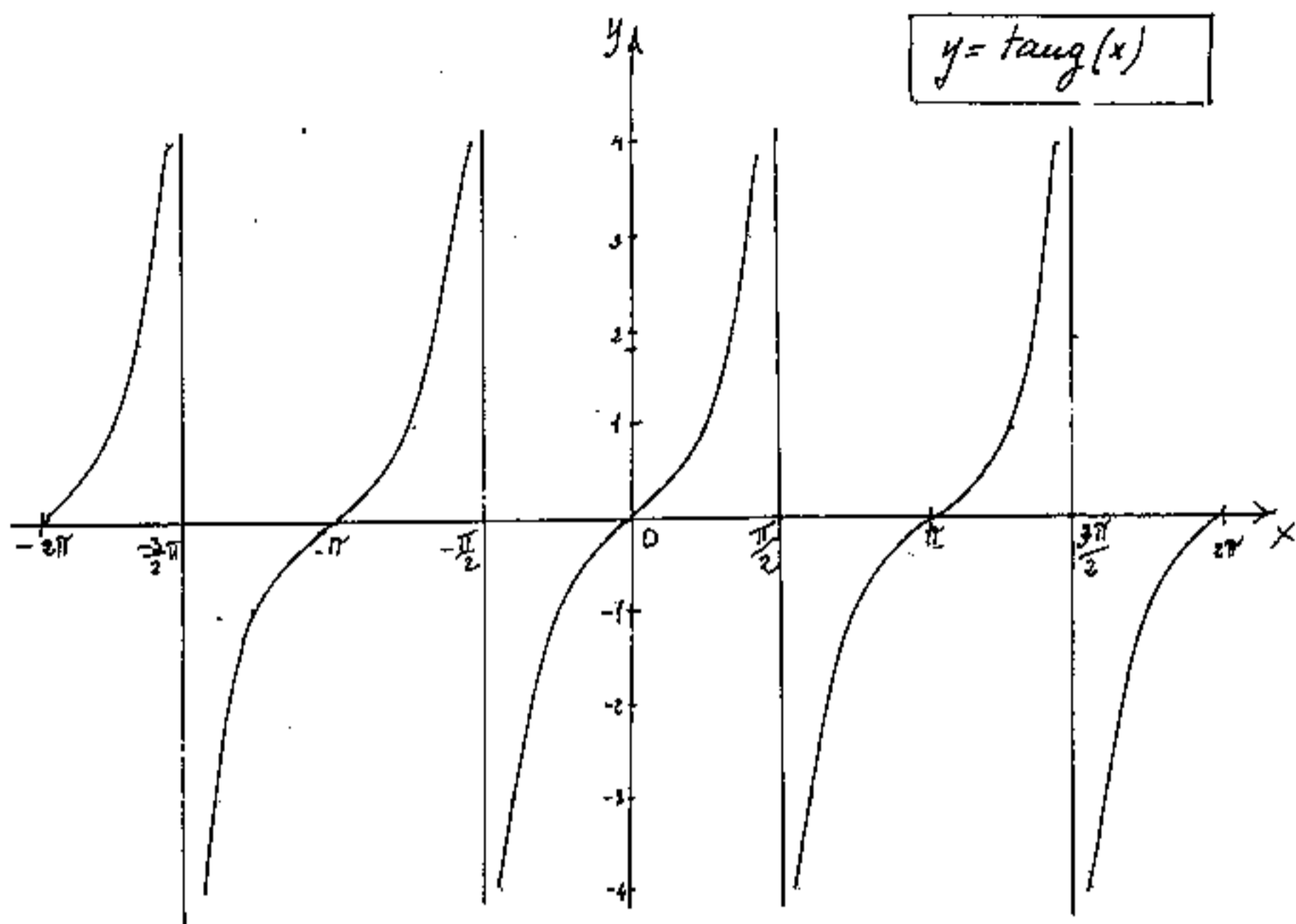




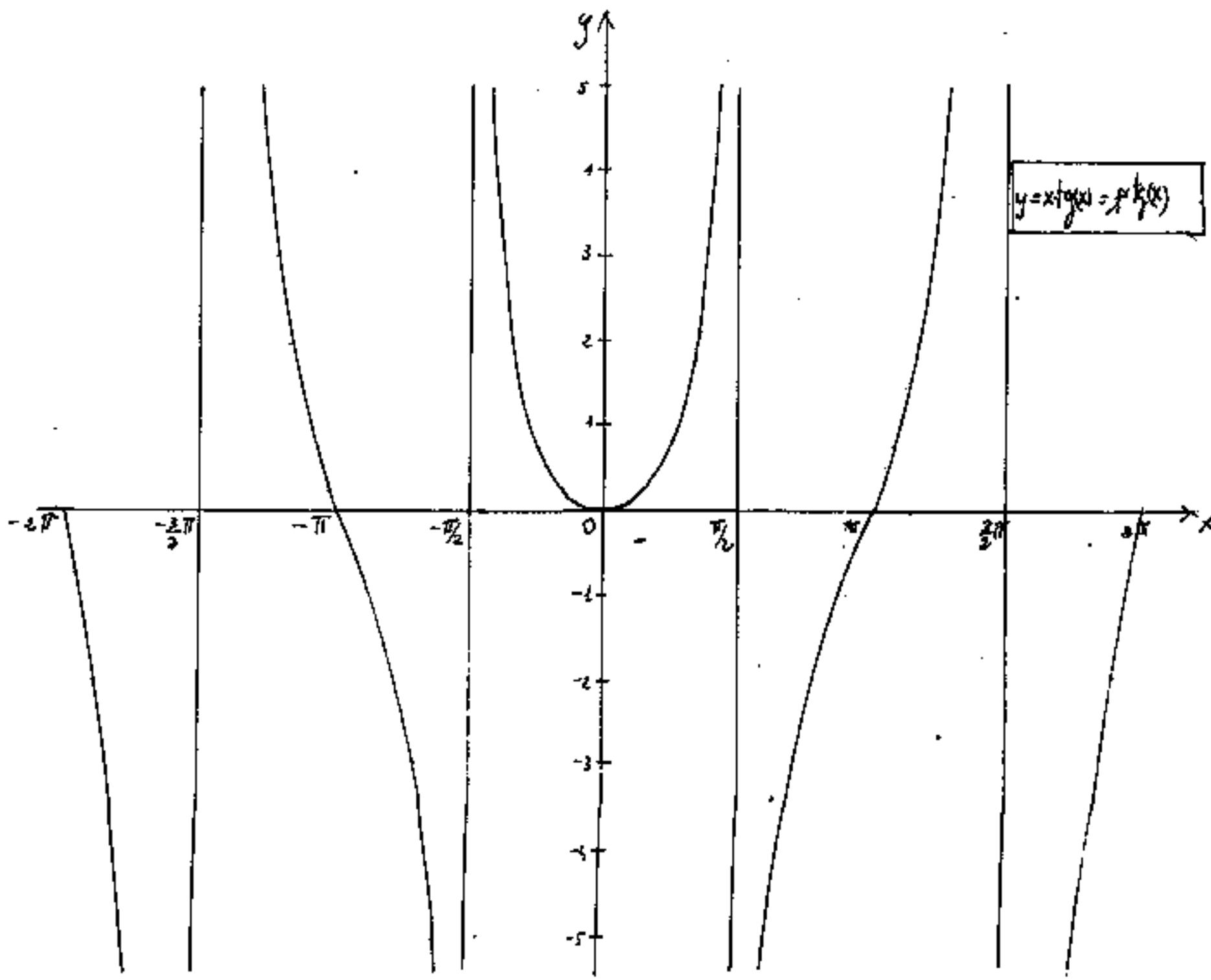
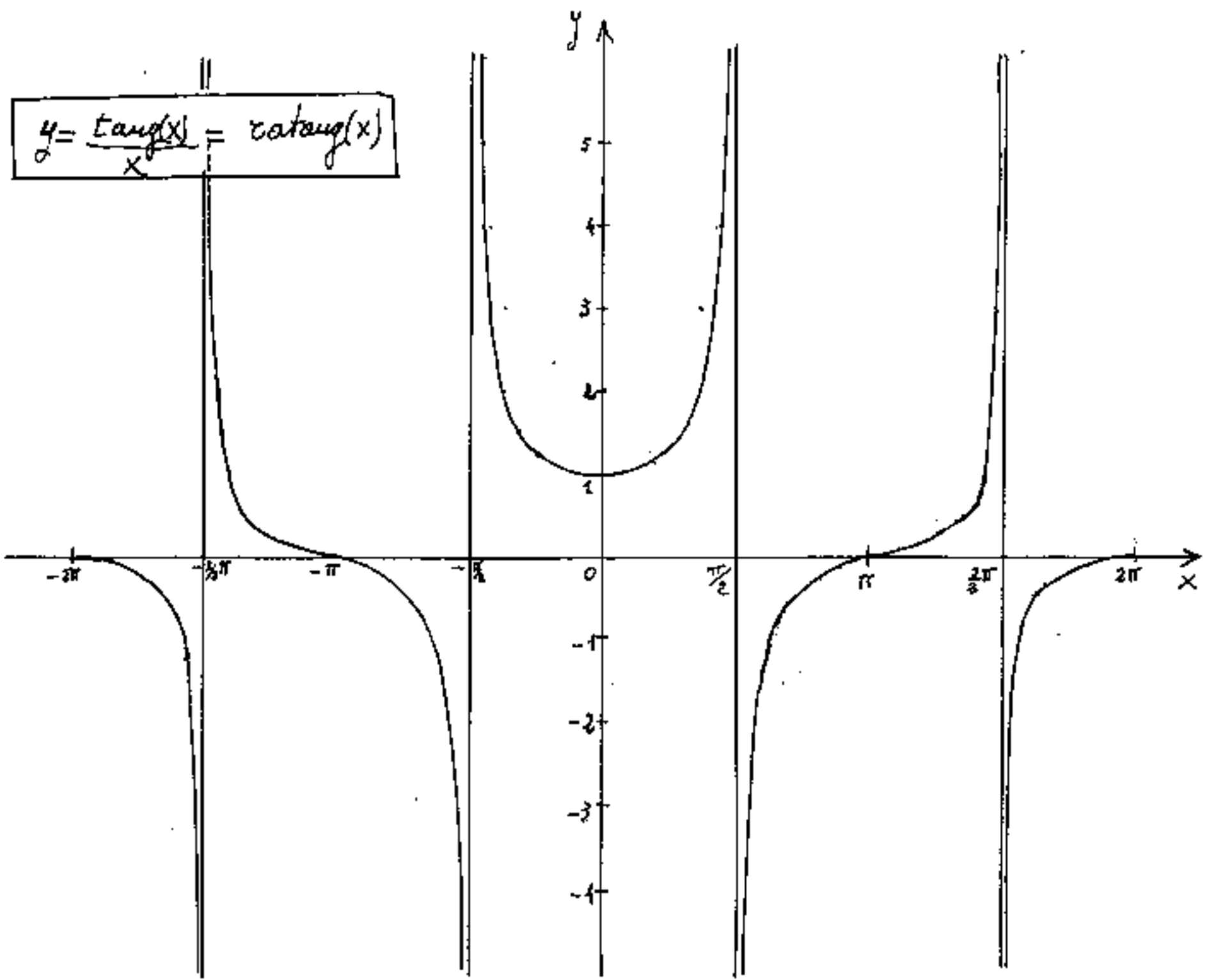
i max ed i min, sono spostati, coincidono in $\rho \cos(x) = -1$.





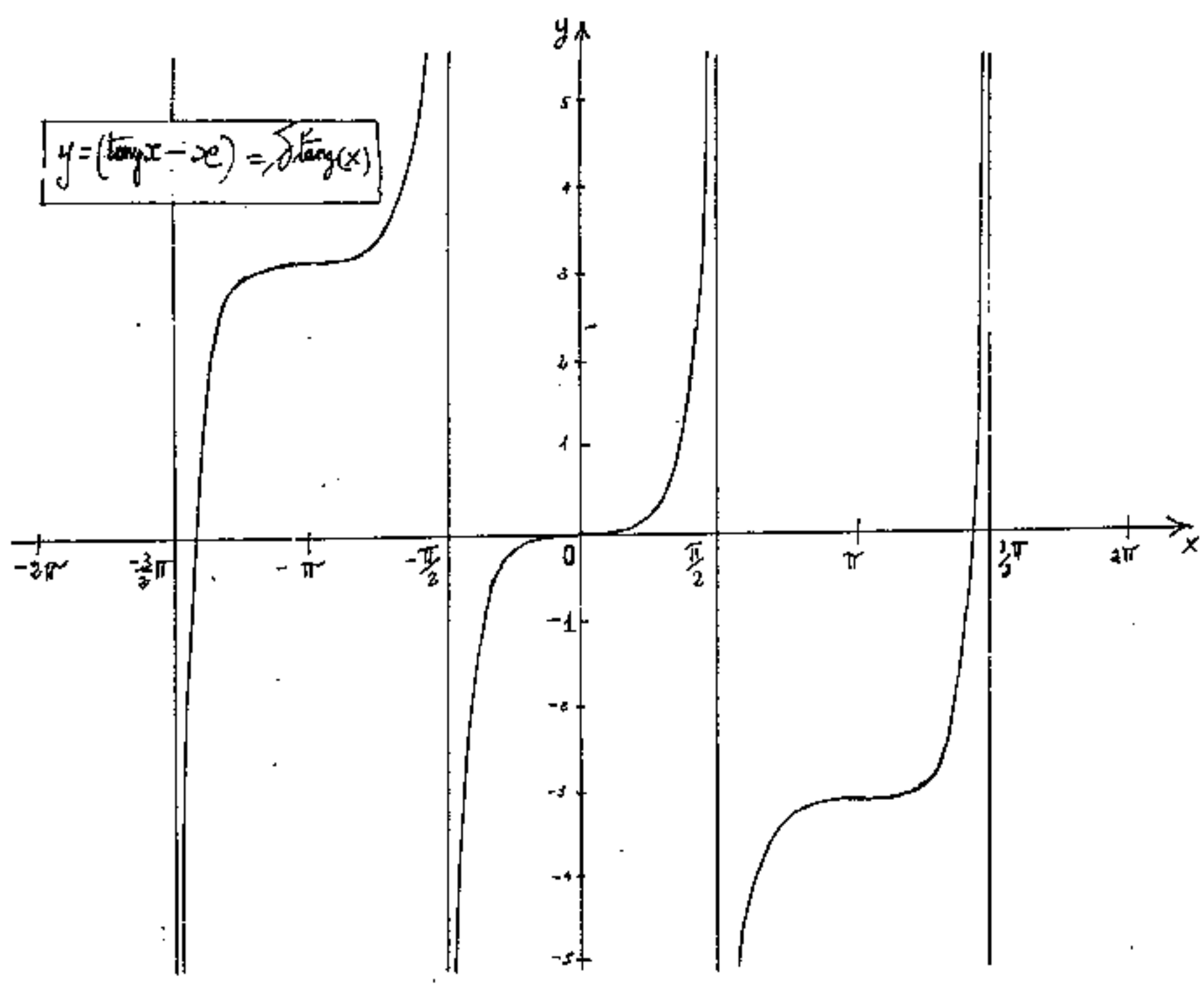


$$y = \frac{\tan(x)}{x} = \operatorname{cosec}(x)$$

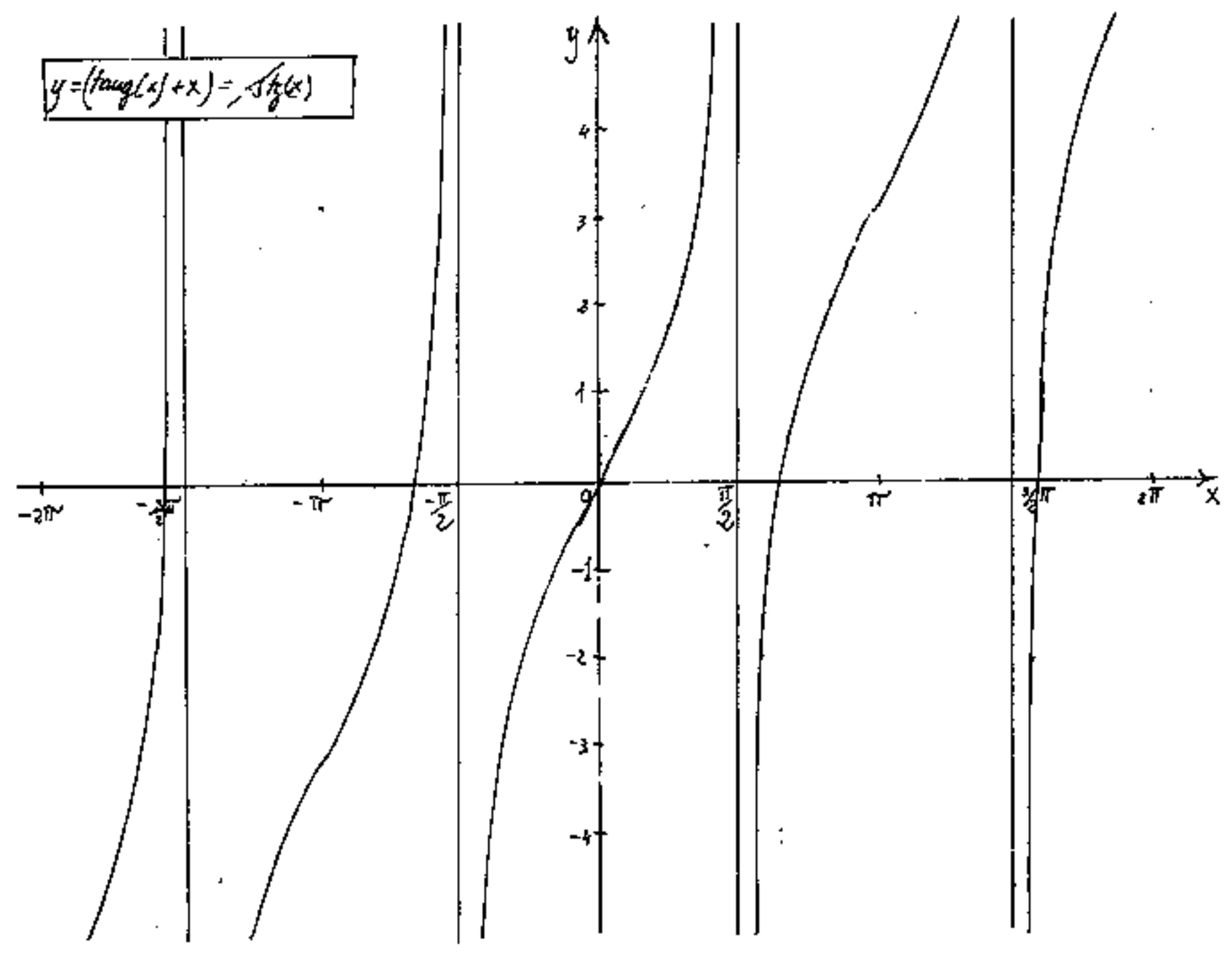


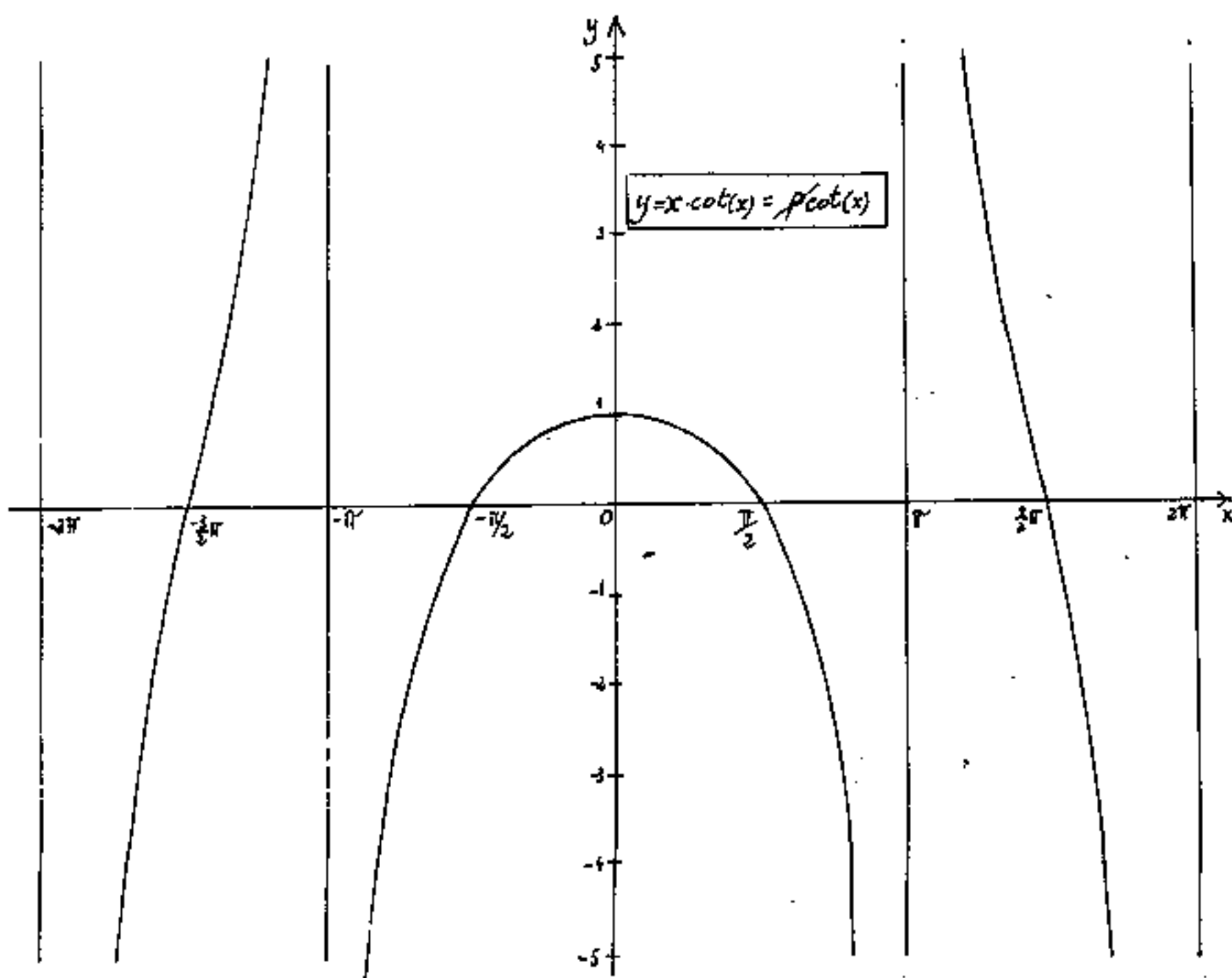
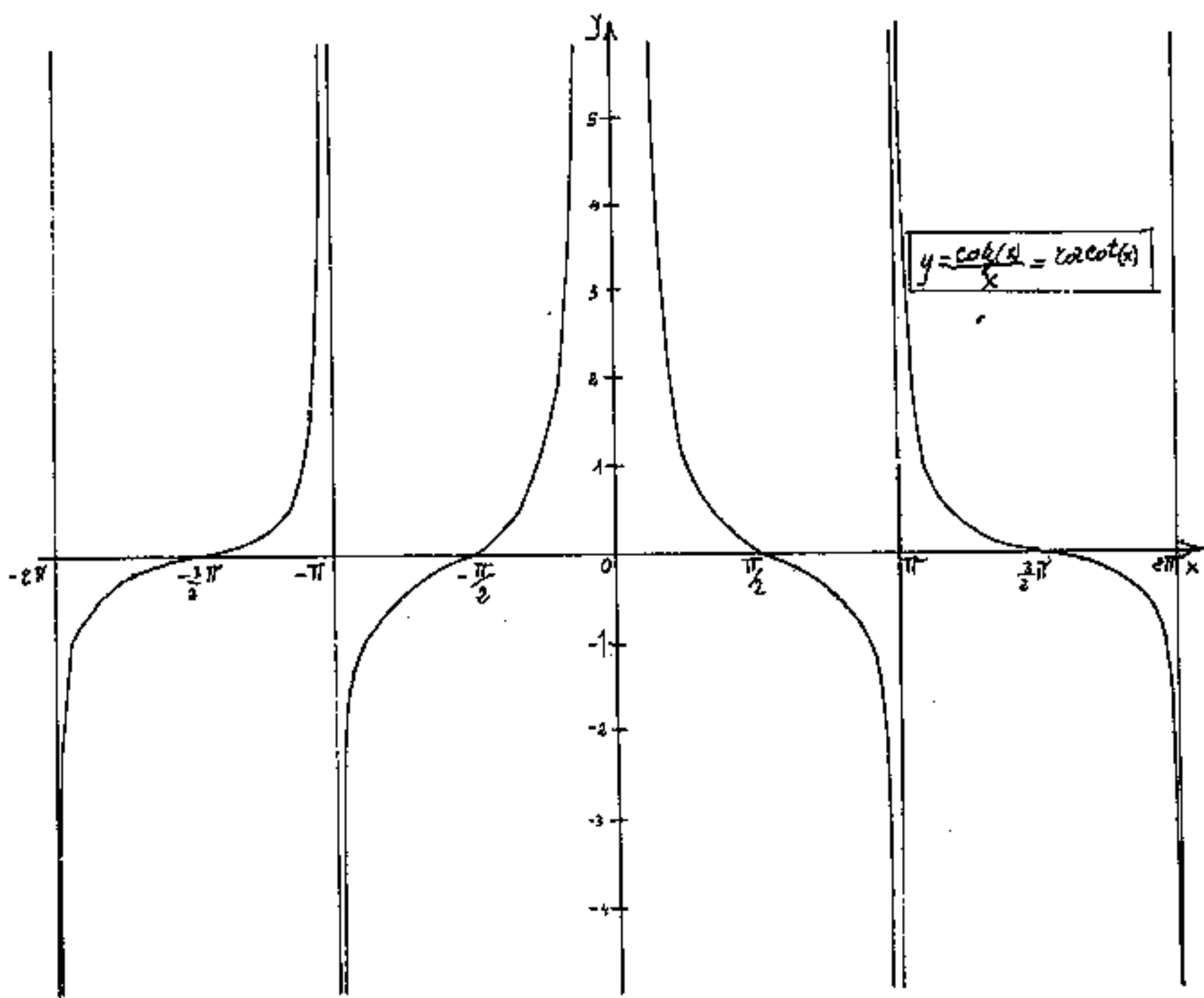
$$y = x \tan(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

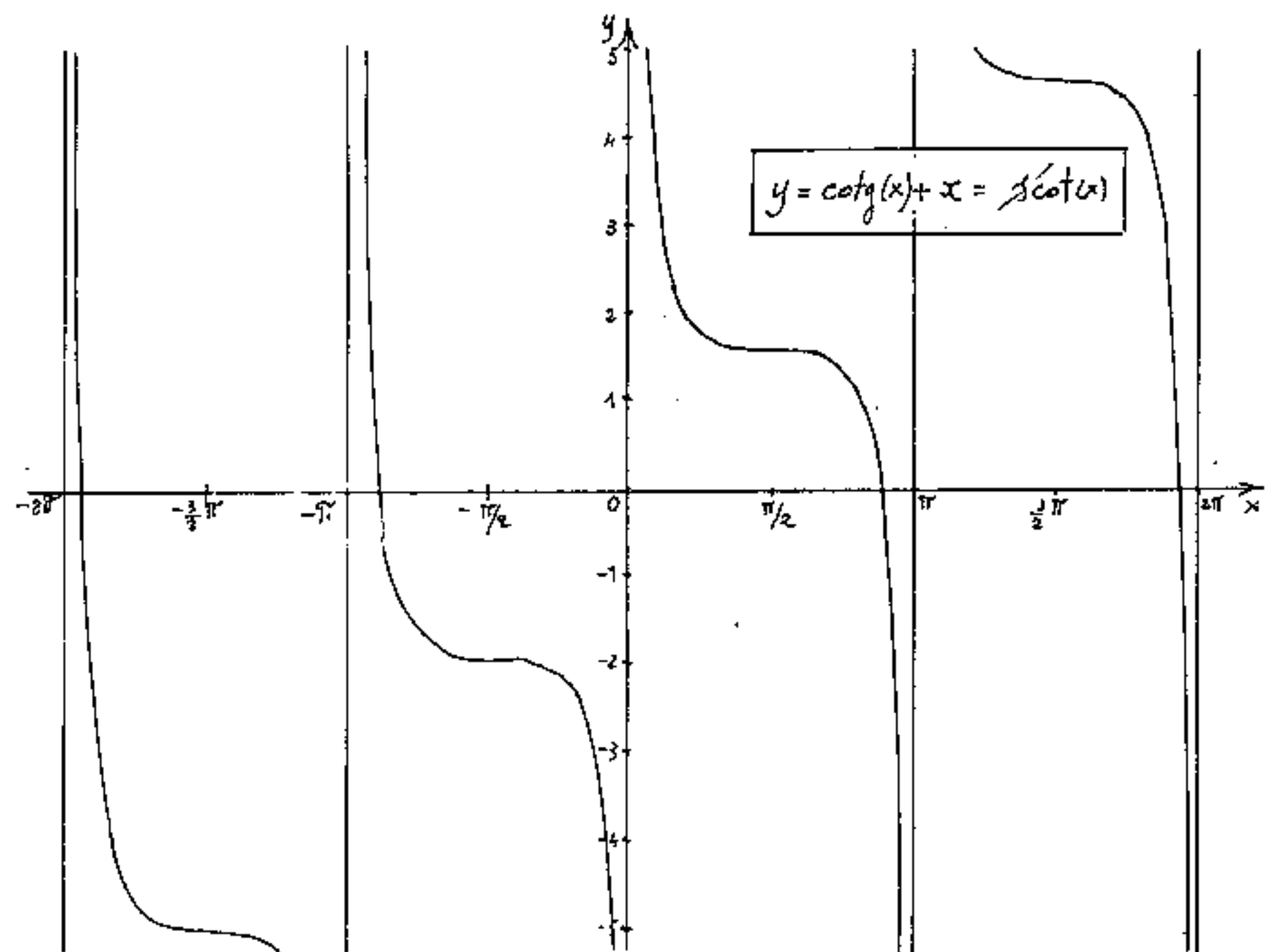
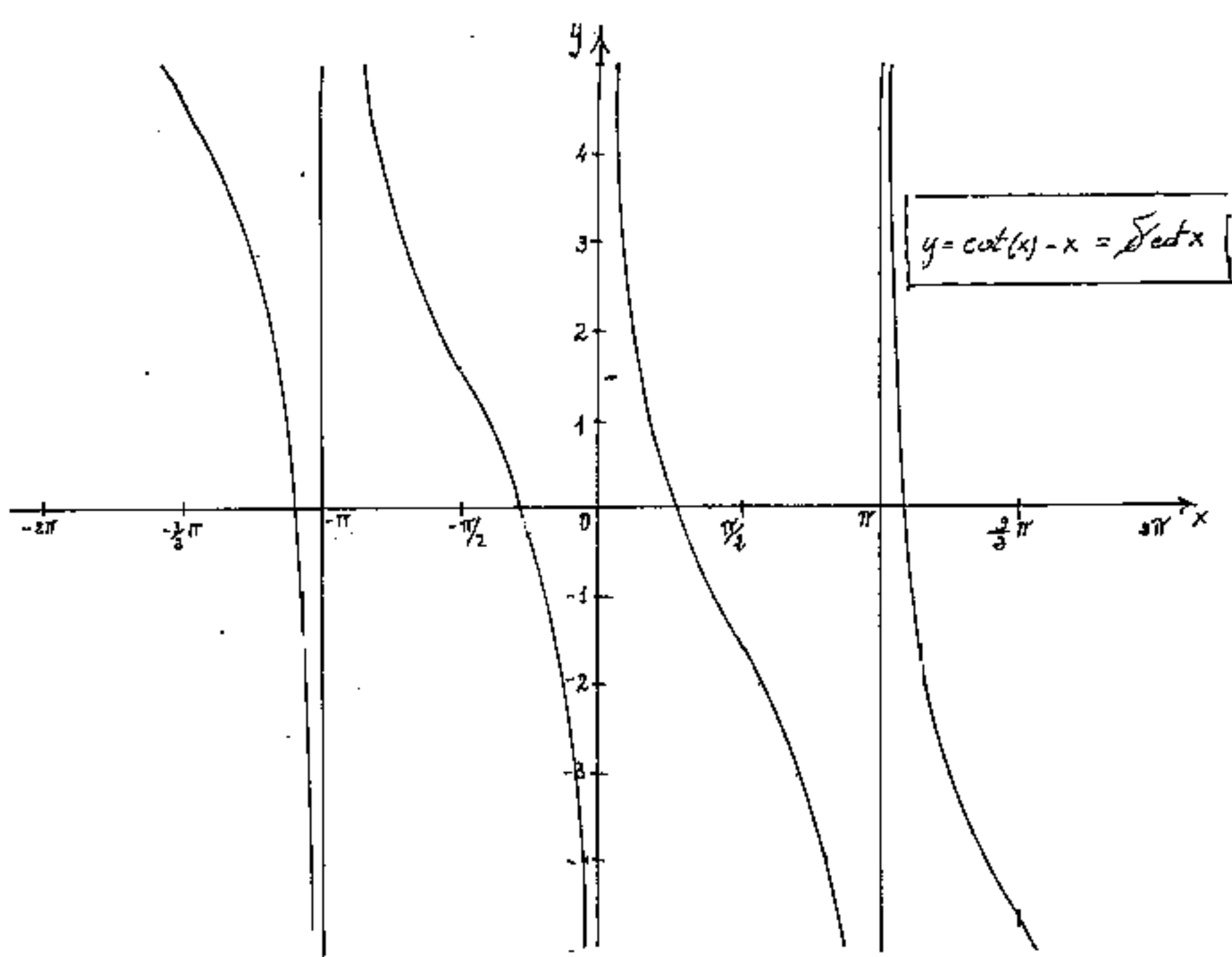
$$y = (\tan x - x) = \int \tan(x) dx$$



$$y = (\tan(x) + x) = \int \tan(x) dx$$







Grafici delle Funzioni Iperboliche

Abbiamo già introdotto la trigonometria iperbolica, nel II Vol., ed abbiamo dato l'origine partendo dall'iperbole equilatera, nonché le relazioni fra le funzioni iperboliche fra loro, e le correlazioni con le funzioni trigonometriche circolari.

Avremo occasione di mostrare che il cono iperbolico che simboleggiamo con " $\cosh(x)$ " in opportune unità grafiche è detto "Catenaria" ed è la curva di equilibrio di una catenella, o fune, perfettamente flessibile, di peso uniforme, sospesa ai suoi estremi, in campo gravitazionale.

Avremo anche occasione di dimostrare che la catenaria, (nel calcolo delle variazioni) è, fra tutte le curve continue e derivabili, passanti per due punti A e B quella che minimizza (massimizza) l'integrale curvilineo: $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$.

Rimandiamo al Volume di Statica la trattazione della catenaria.

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{tanh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

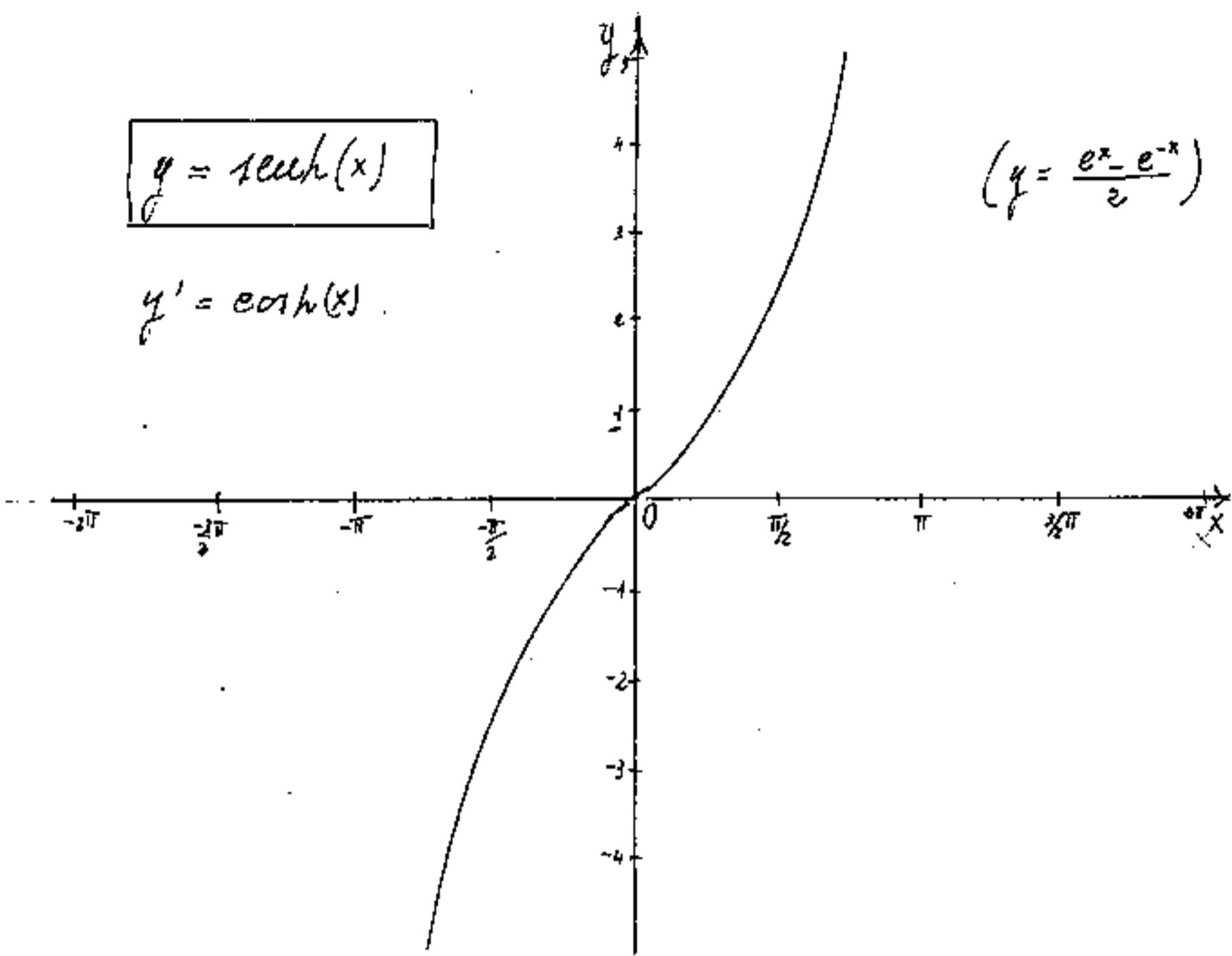
$$\operatorname{coth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad \operatorname{argsech}[k] = \ln[k + \sqrt{k^2 - 1}]; \quad \operatorname{argcosh}[k] = \ln[k + \sqrt{k^2 - 1}]$$

$$\operatorname{versh}(x) = \cosh(x) - 1;$$

$$y = \operatorname{sech}(x)$$

$$y' = \operatorname{cosh}(x)$$

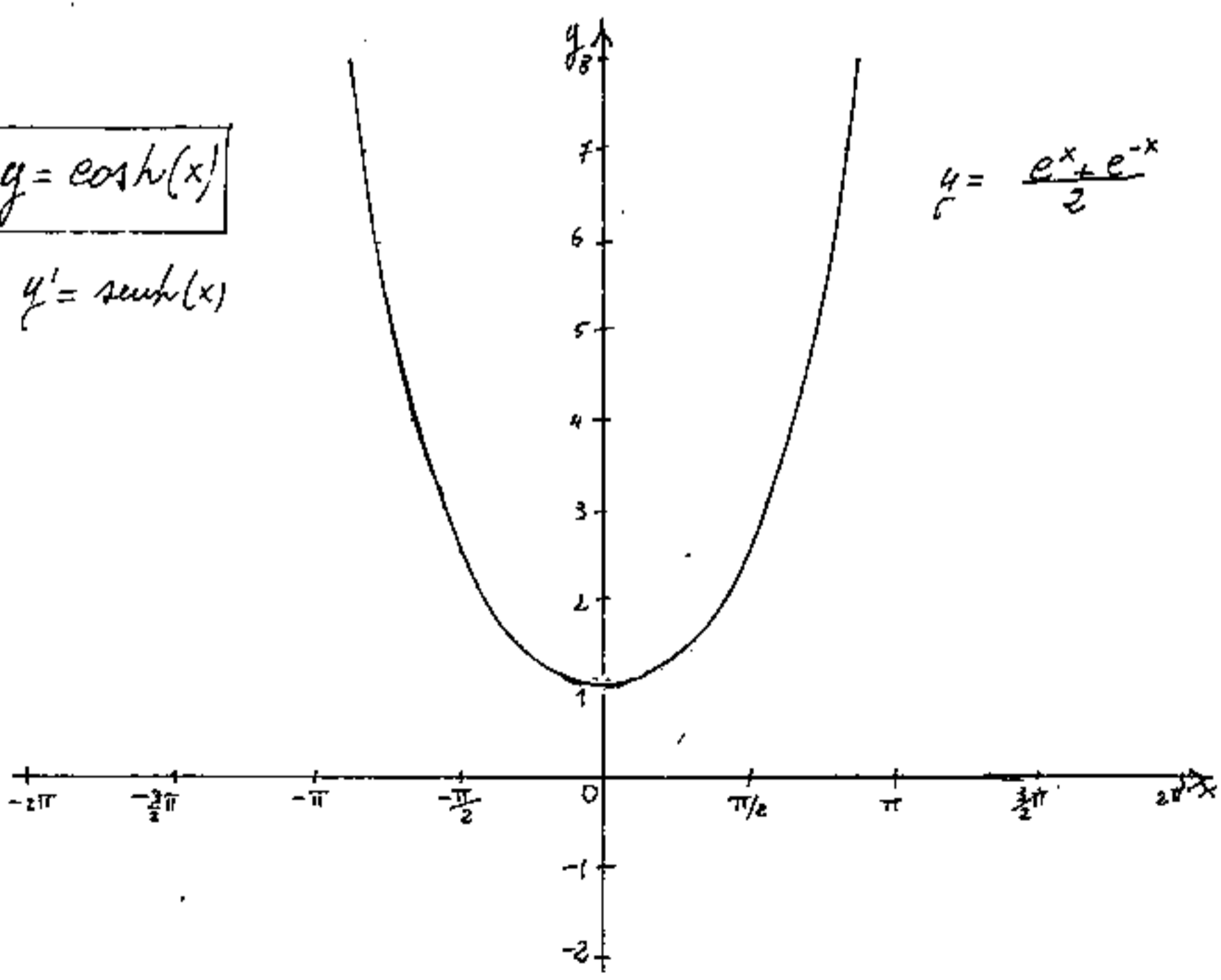
$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

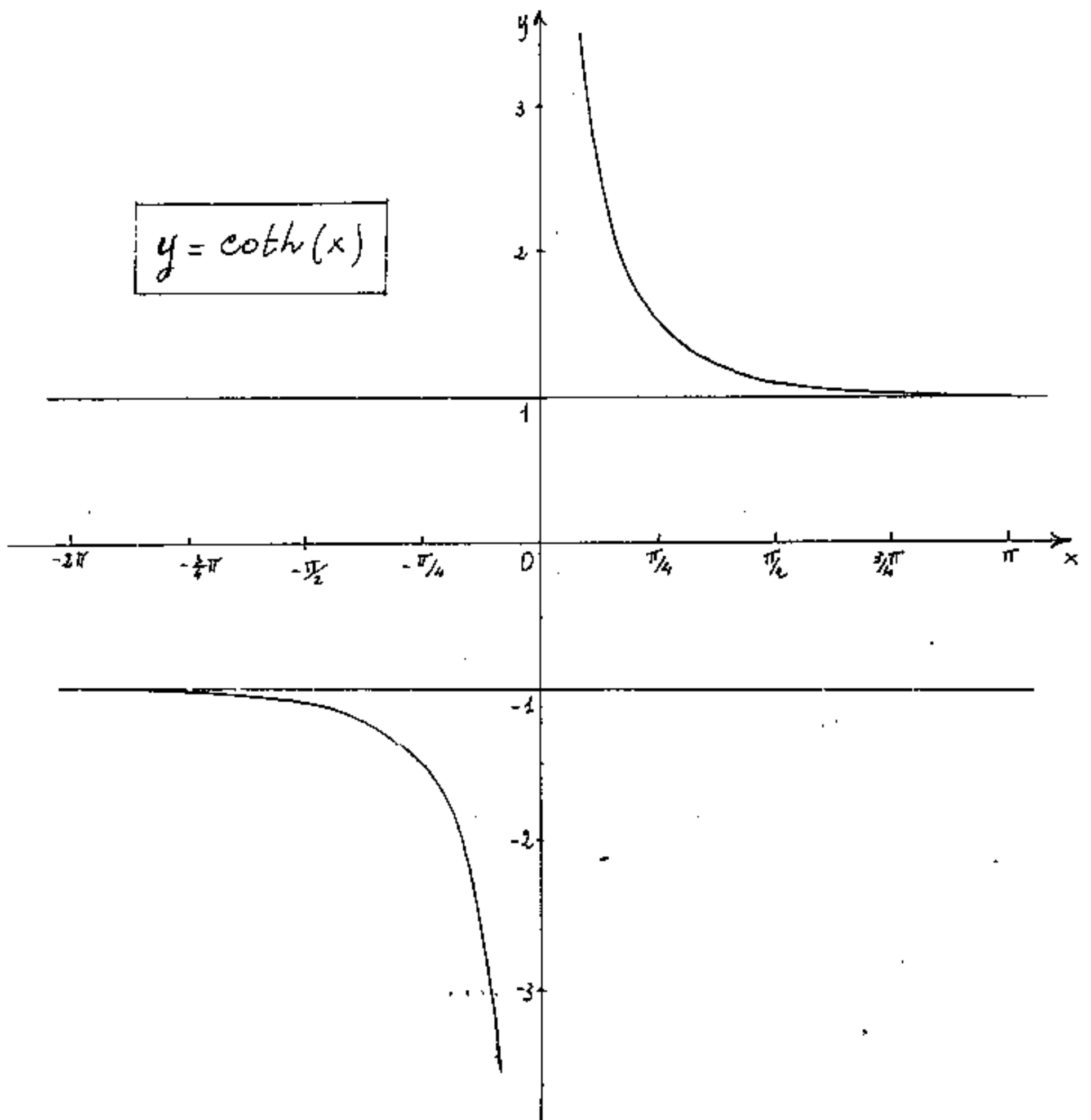
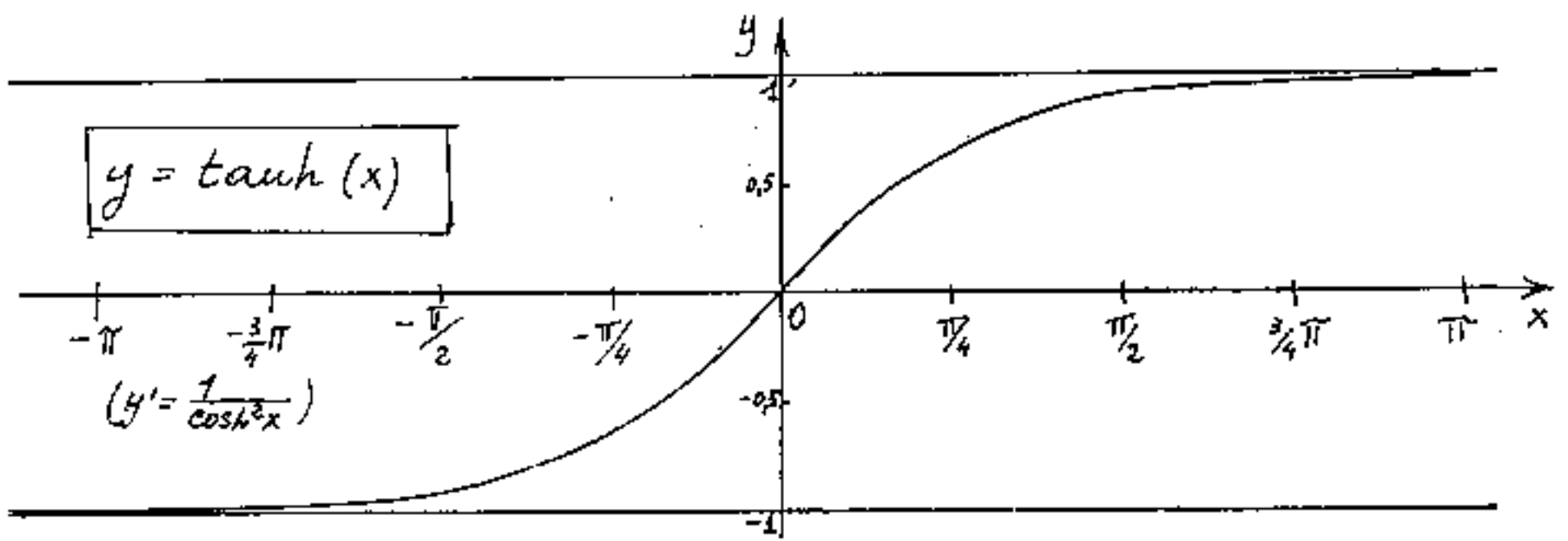


$$y = \operatorname{cosh}(x)$$

$$y' = \operatorname{sech}(x)$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

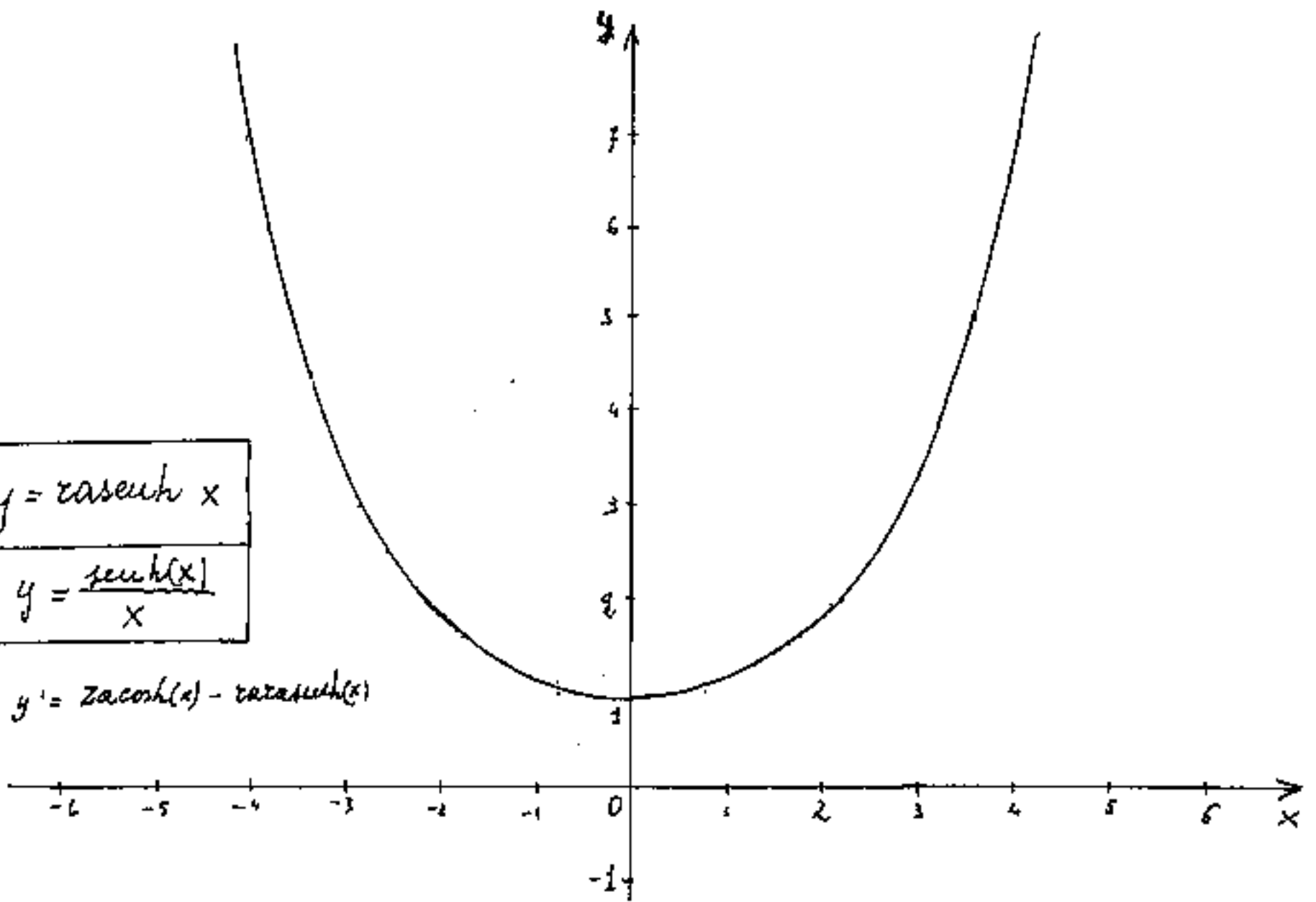




$$y = \operatorname{casinh} x$$

$$y = \frac{\operatorname{sinh}(x)}{x}$$

$$y' = \operatorname{zacosinh}(x) - \operatorname{casinh}(x)$$

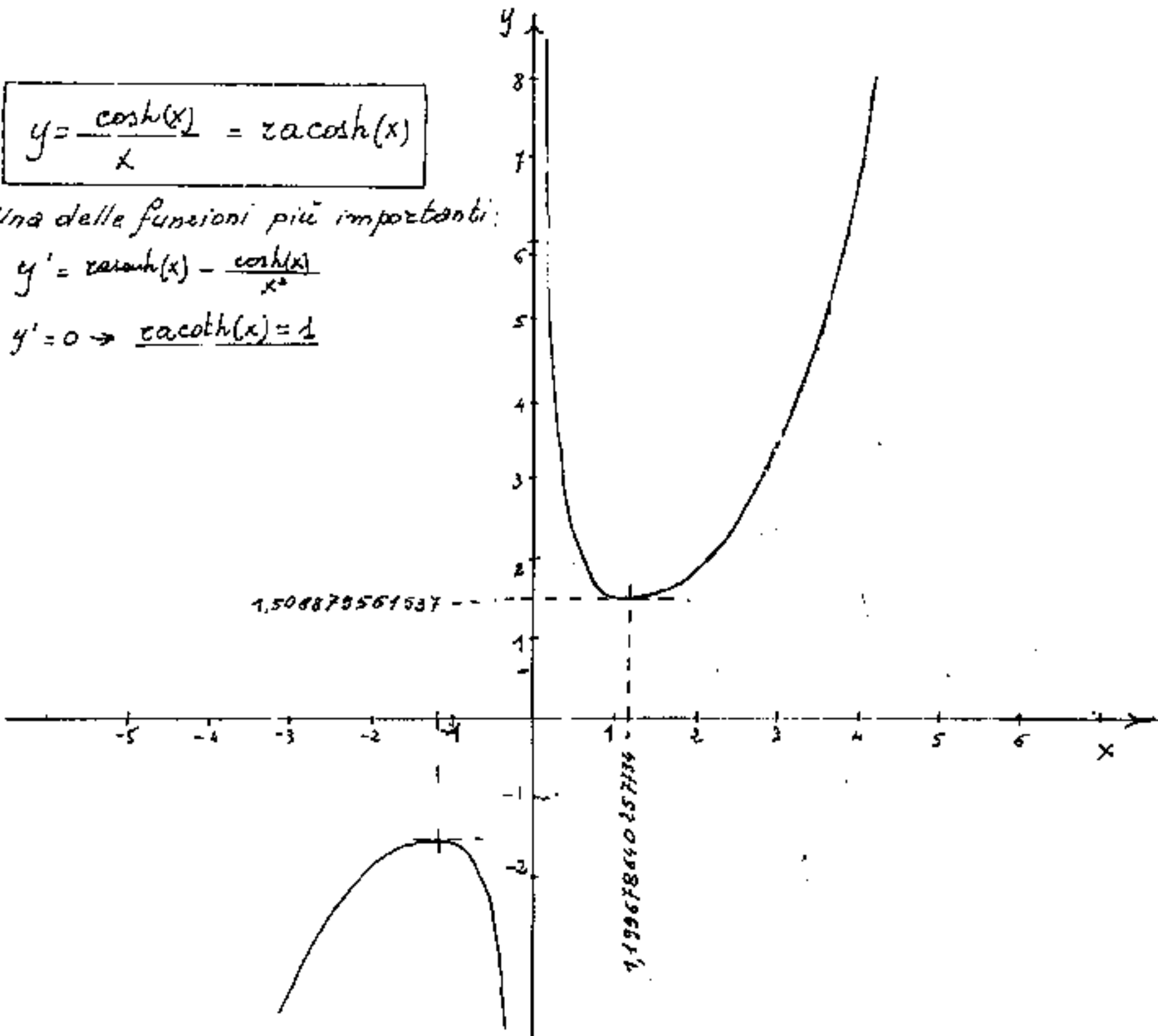


$$y = \frac{\operatorname{cosh}(x)}{x} = \operatorname{zacosh}(x)$$

Una delle funzioni più importanti:

$$y' = \operatorname{zarcosh}(x) - \frac{\operatorname{cosh}(x)}{x^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow \operatorname{zarcosh}(x) = \frac{1}{x}$$



$$y = \frac{\cosh(x) - 1}{x}$$

$$y = \operatorname{zaverzh}(x)$$

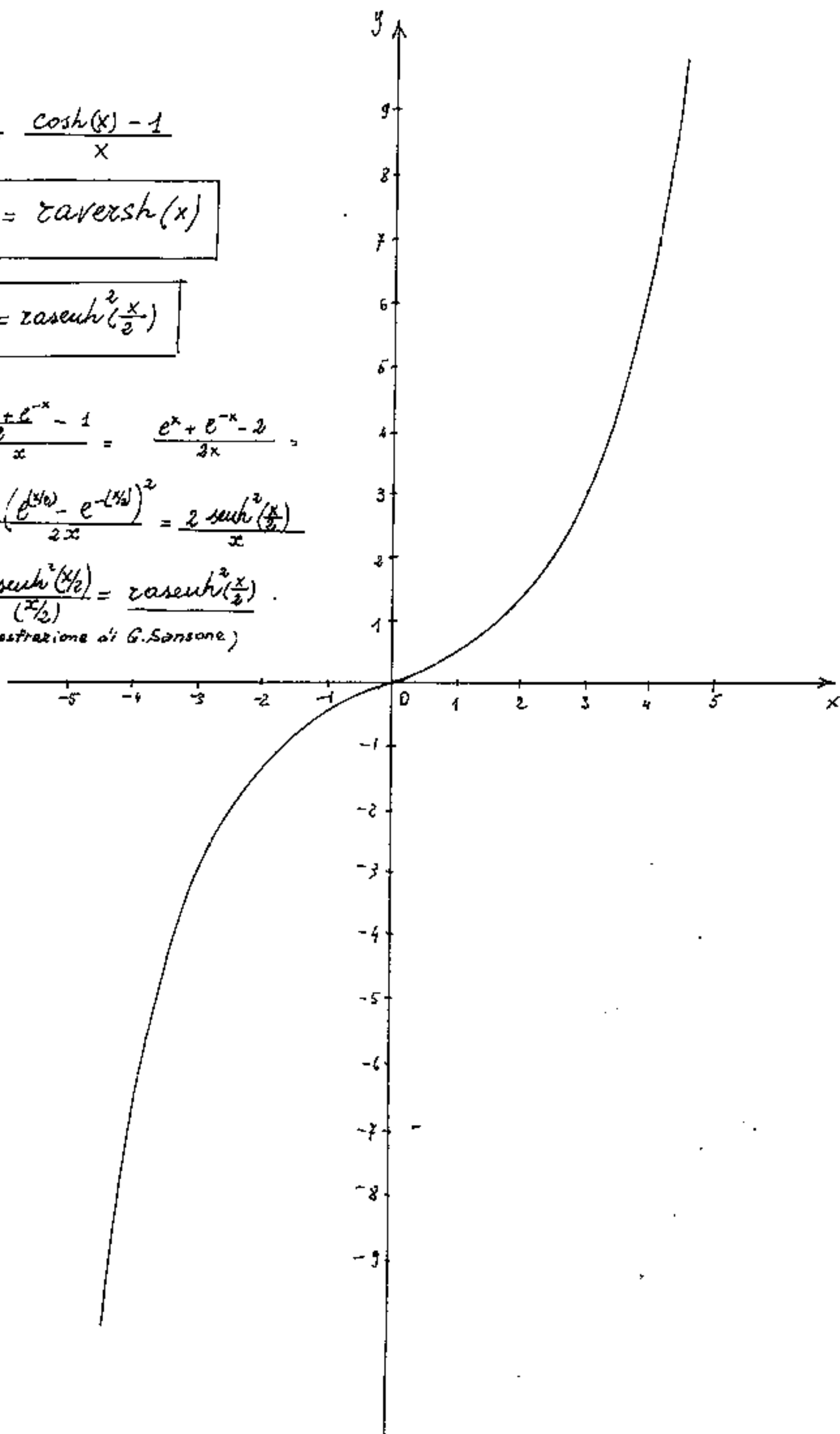
$$y = \operatorname{zasevsh}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x}$$

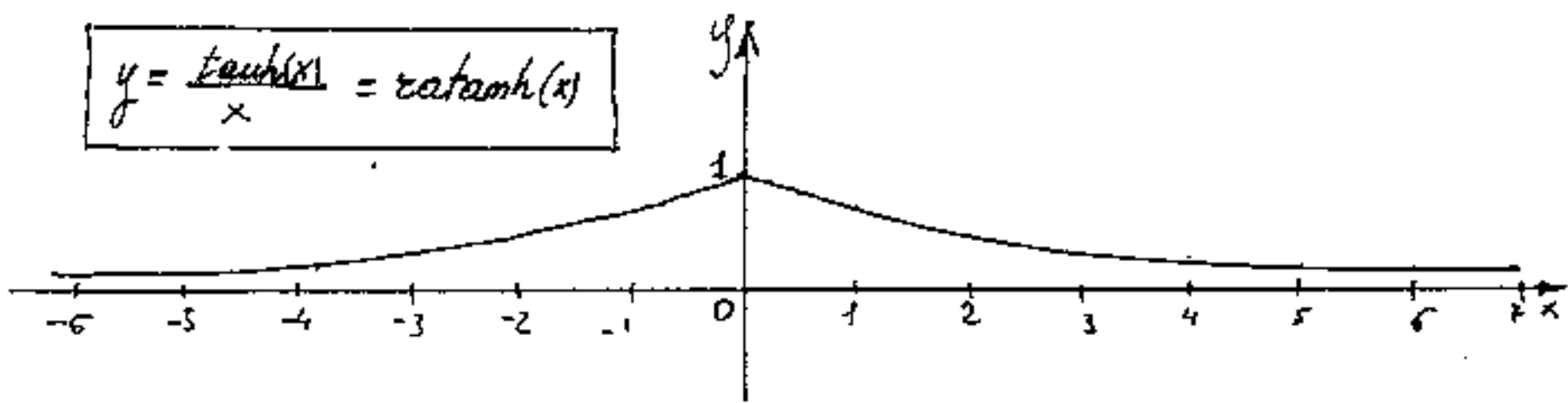
$$= \frac{\left(\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{2}\right)^2}{2x} = \frac{2 \operatorname{sevh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{\operatorname{sevh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{zasevsh}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

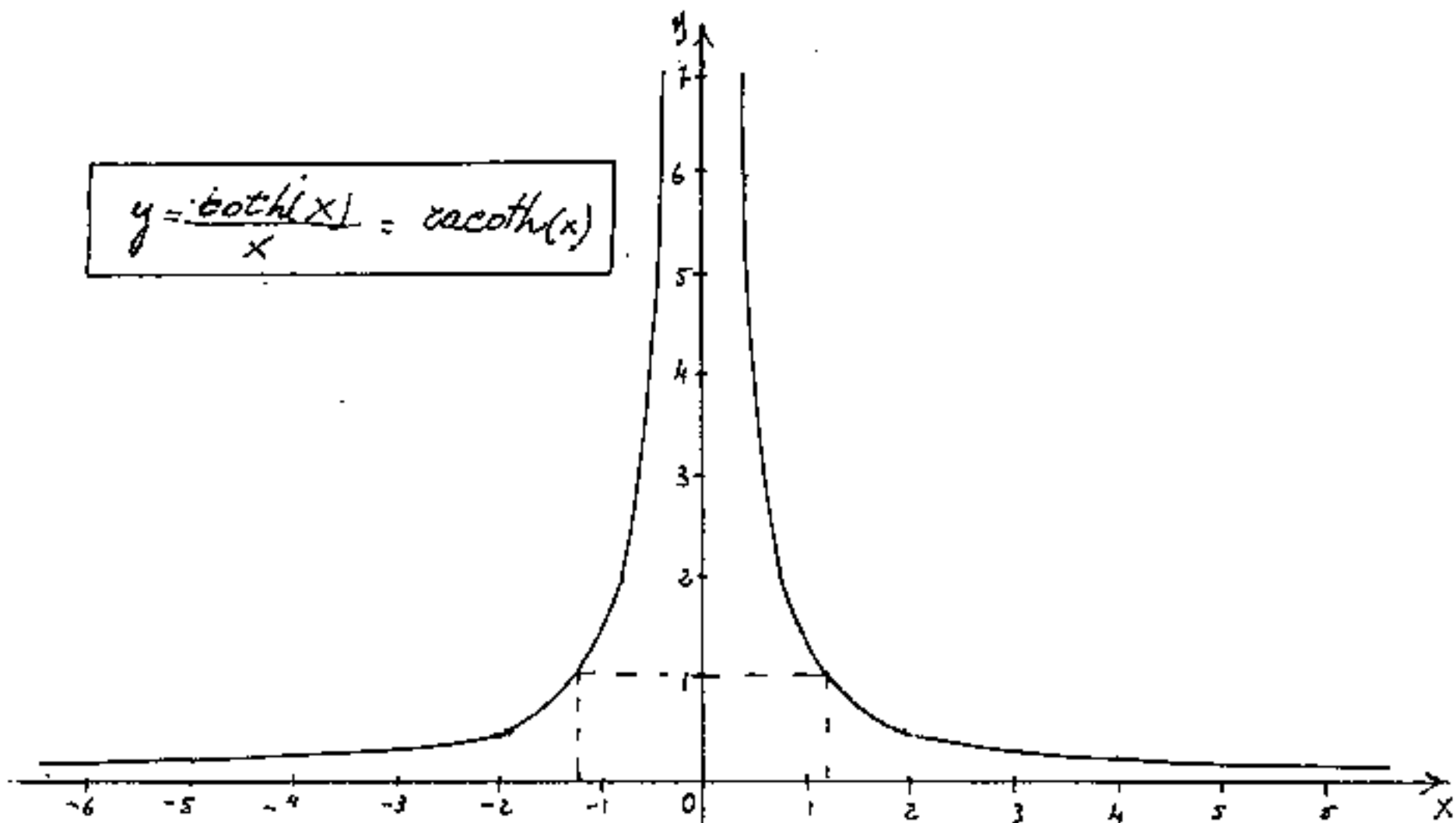
(dimostrazione di G. Sansone)



$$y = \frac{\operatorname{tanh}(x)}{x} = \operatorname{ratanh}(x)$$

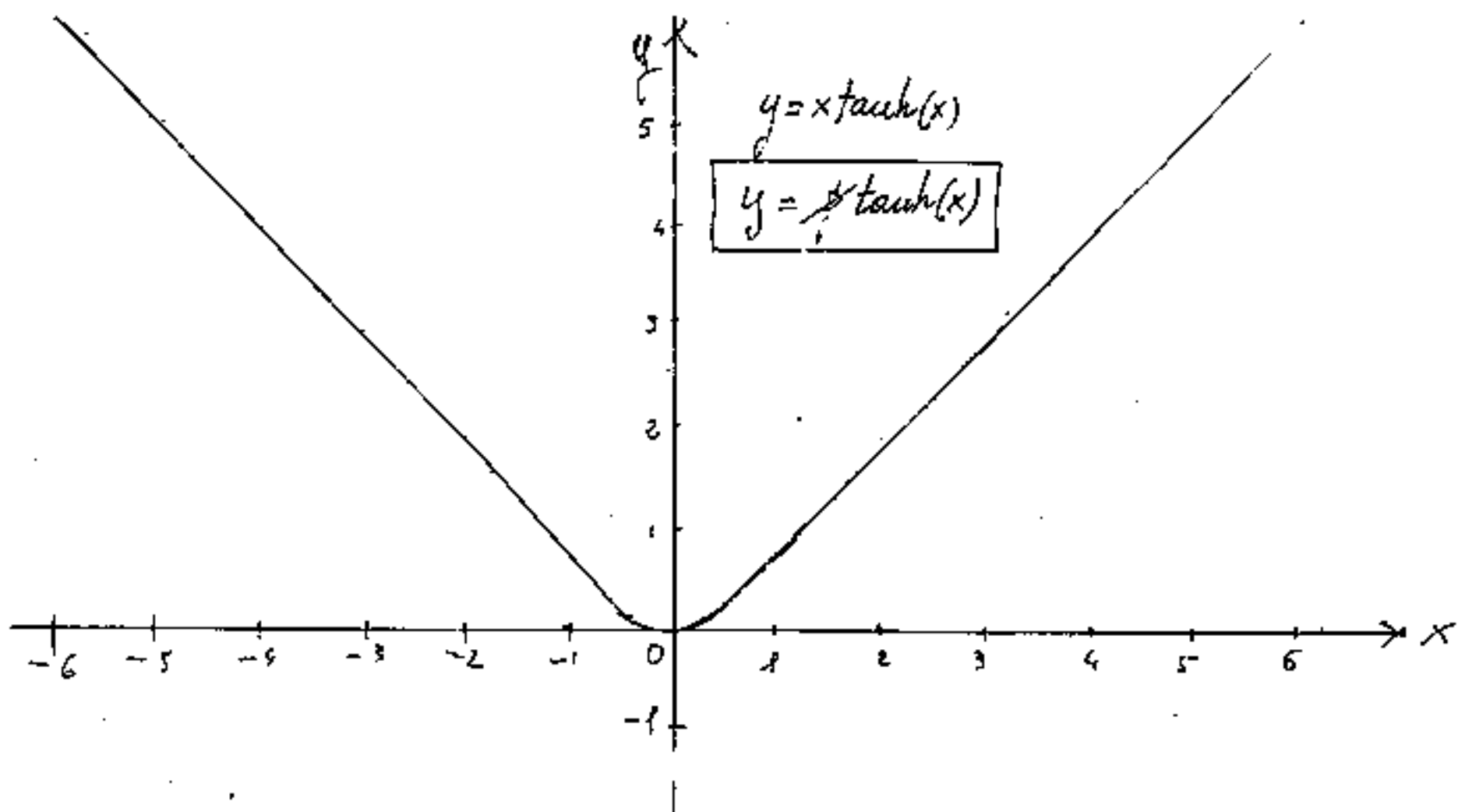


$$y = \frac{\operatorname{coth}(x)}{x} = \operatorname{racoth}(x)$$



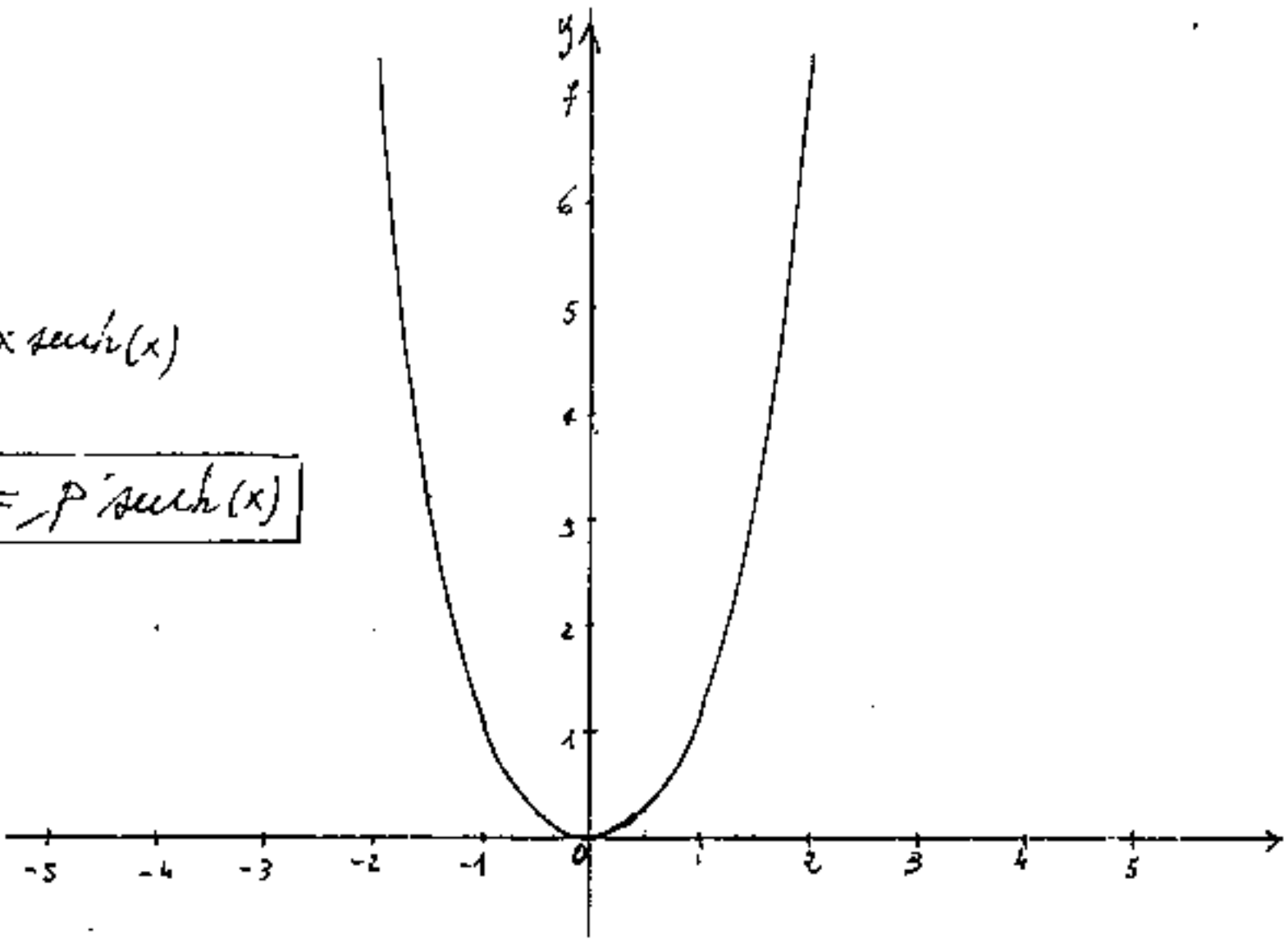
$$y = x \operatorname{tanh}(x)$$

$$y = \frac{x}{\operatorname{tanh}(x)}$$



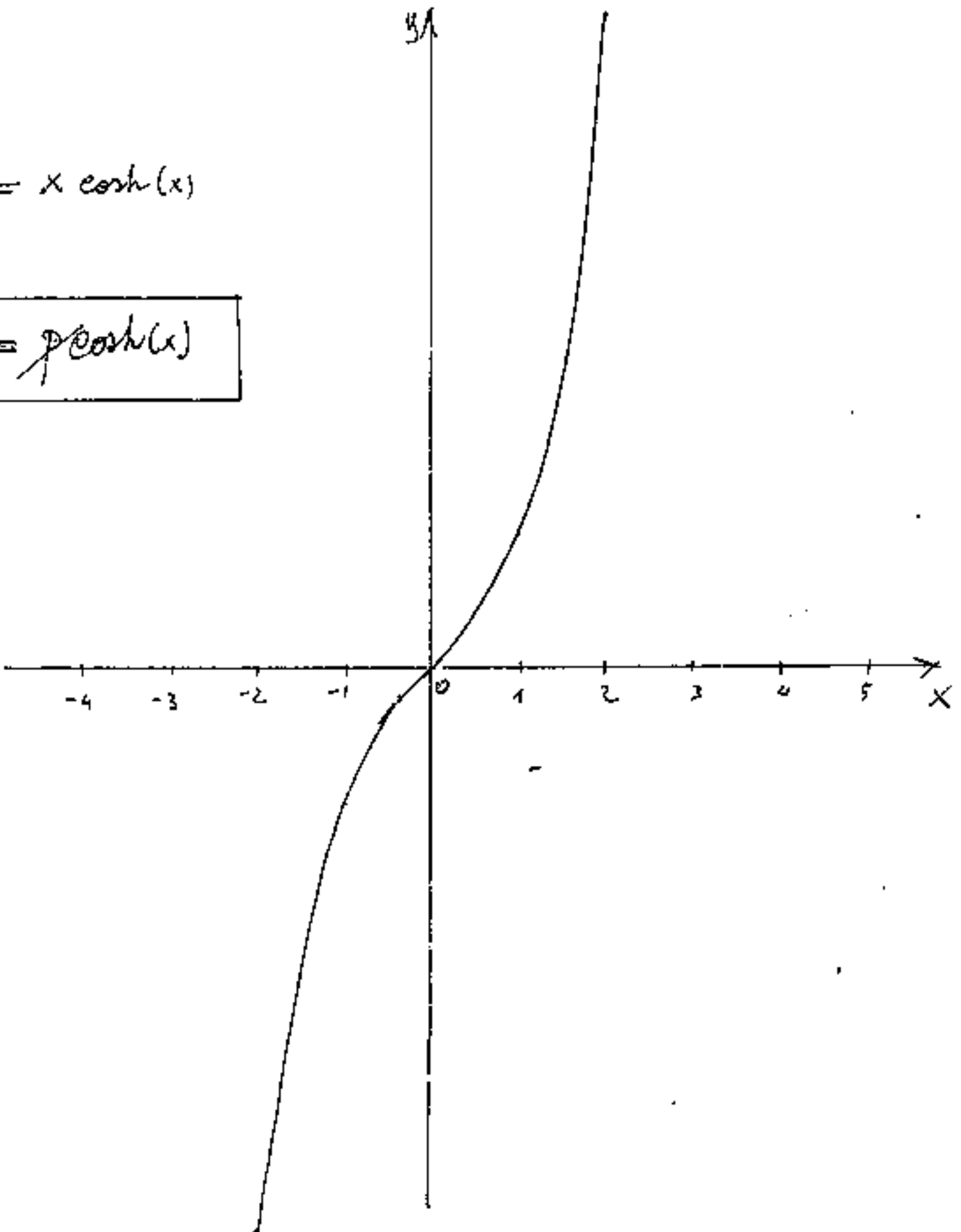
$$y = x \operatorname{sech}(x)$$

$$y = p \operatorname{sech}(x)$$



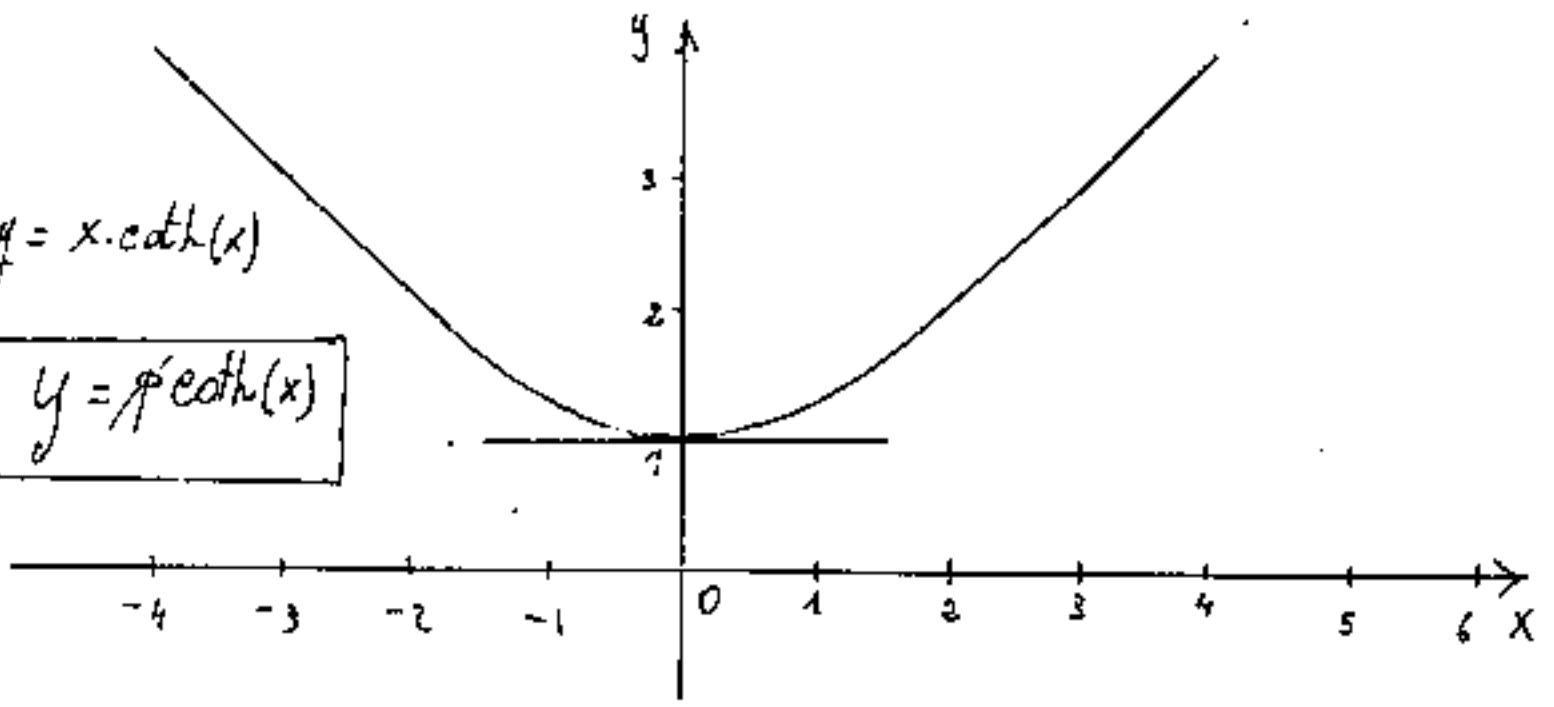
$$y = x \operatorname{cosh}(x)$$

$$y = p \operatorname{cosh}(x)$$



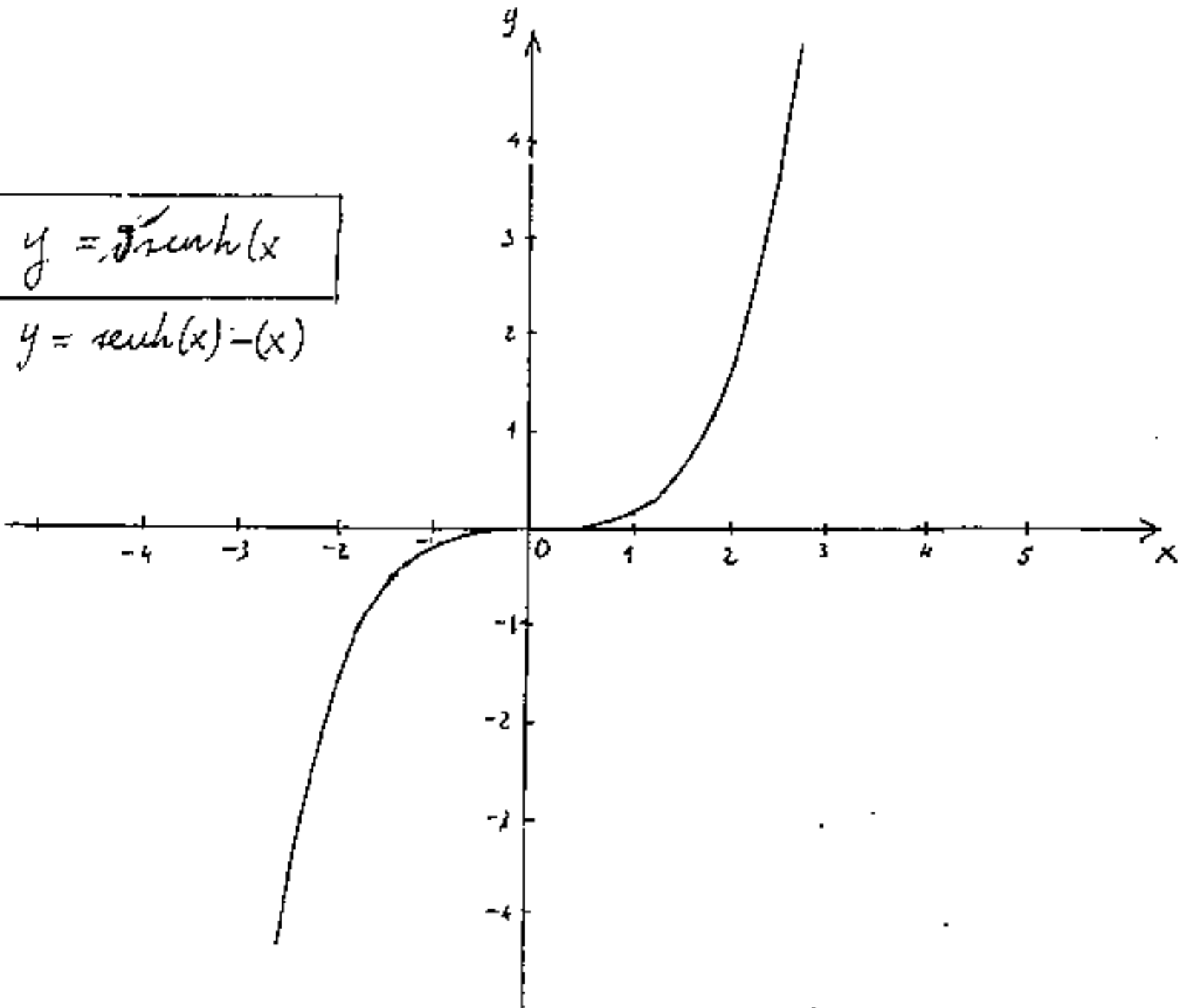
$$y = x \cdot \operatorname{coth}(x)$$

$$y = \operatorname{coth}(x)$$



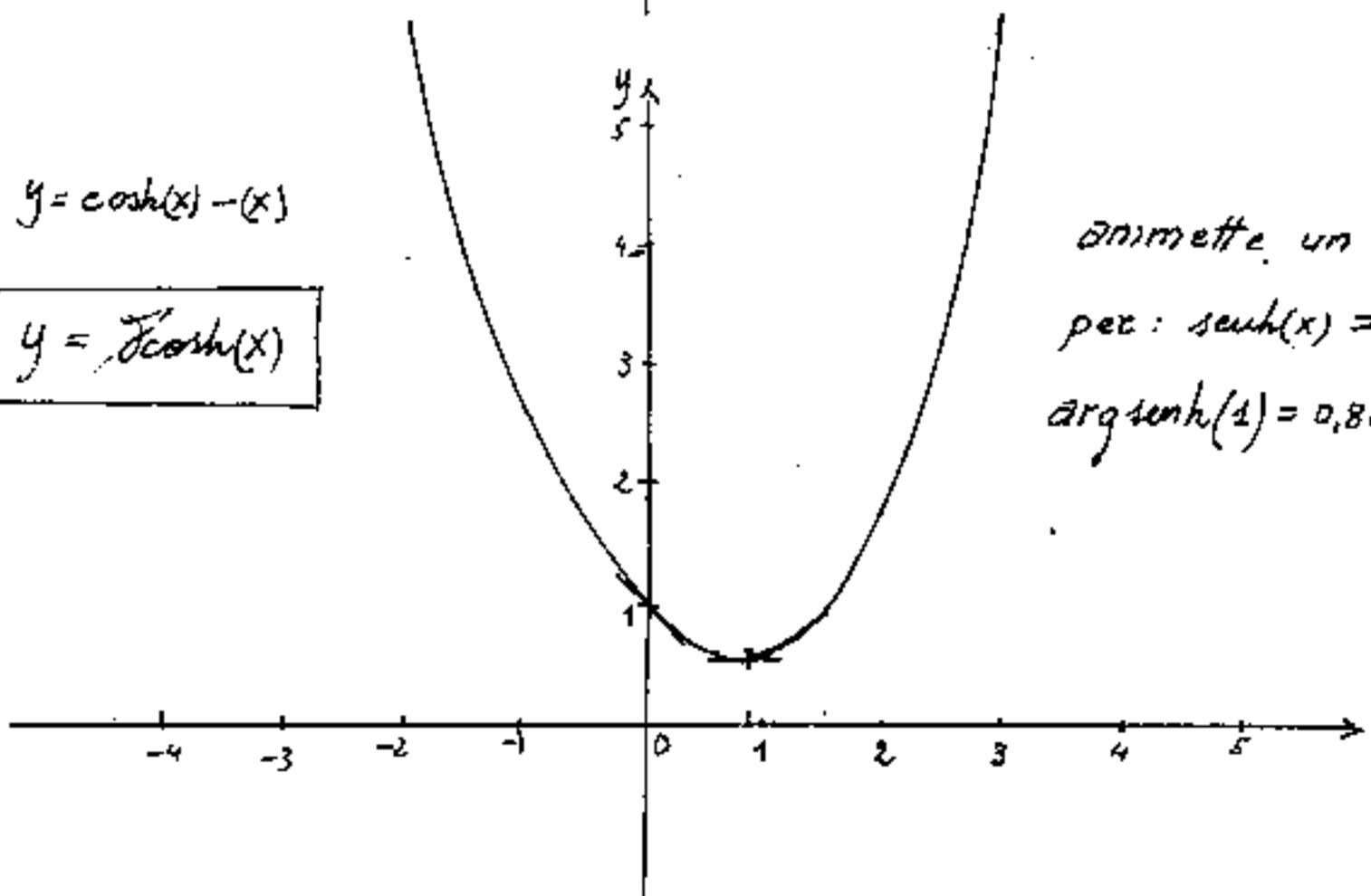
$$y = \operatorname{sech}(x)$$

$$y = \operatorname{sech}(x) - (x)$$

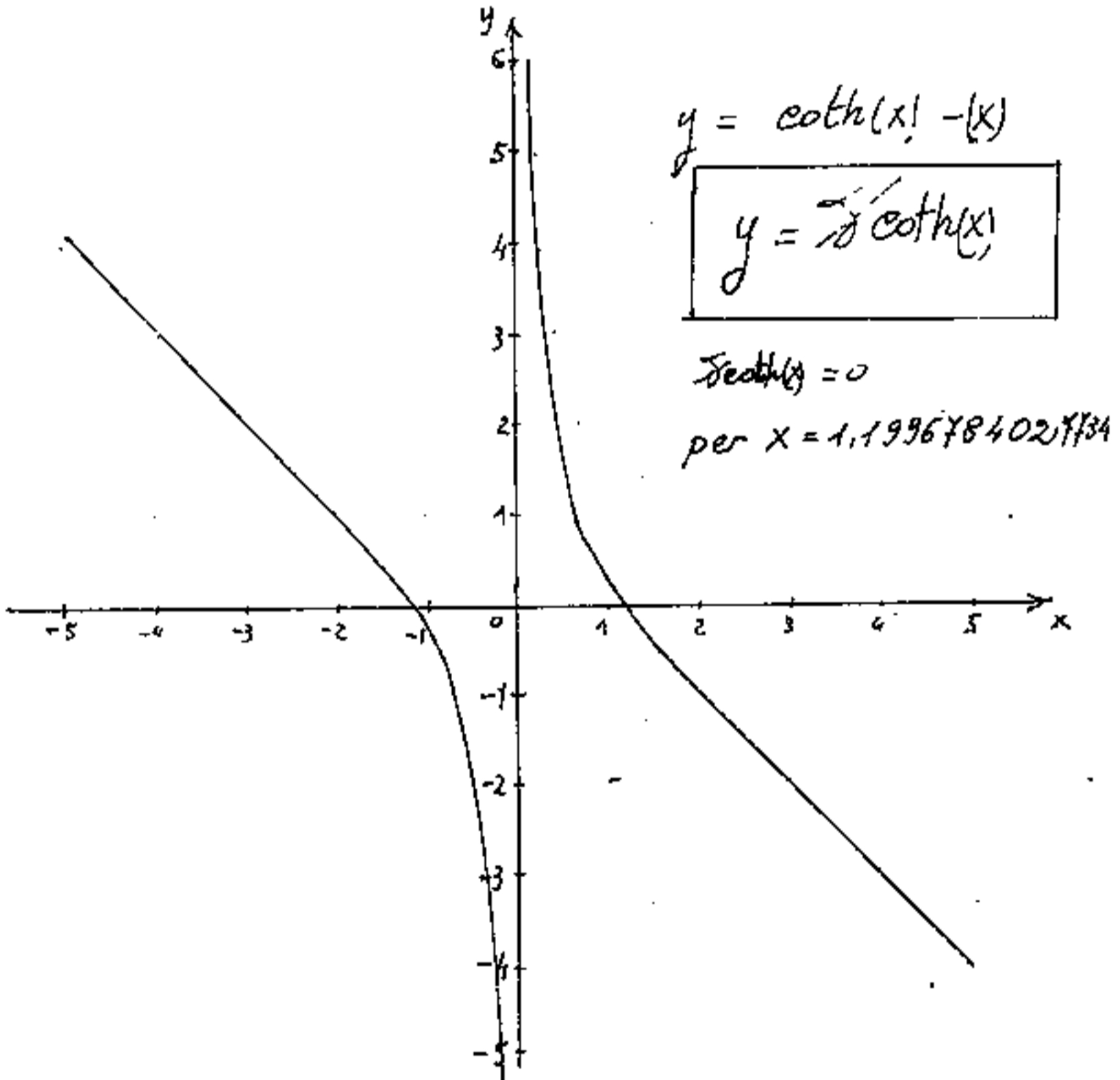
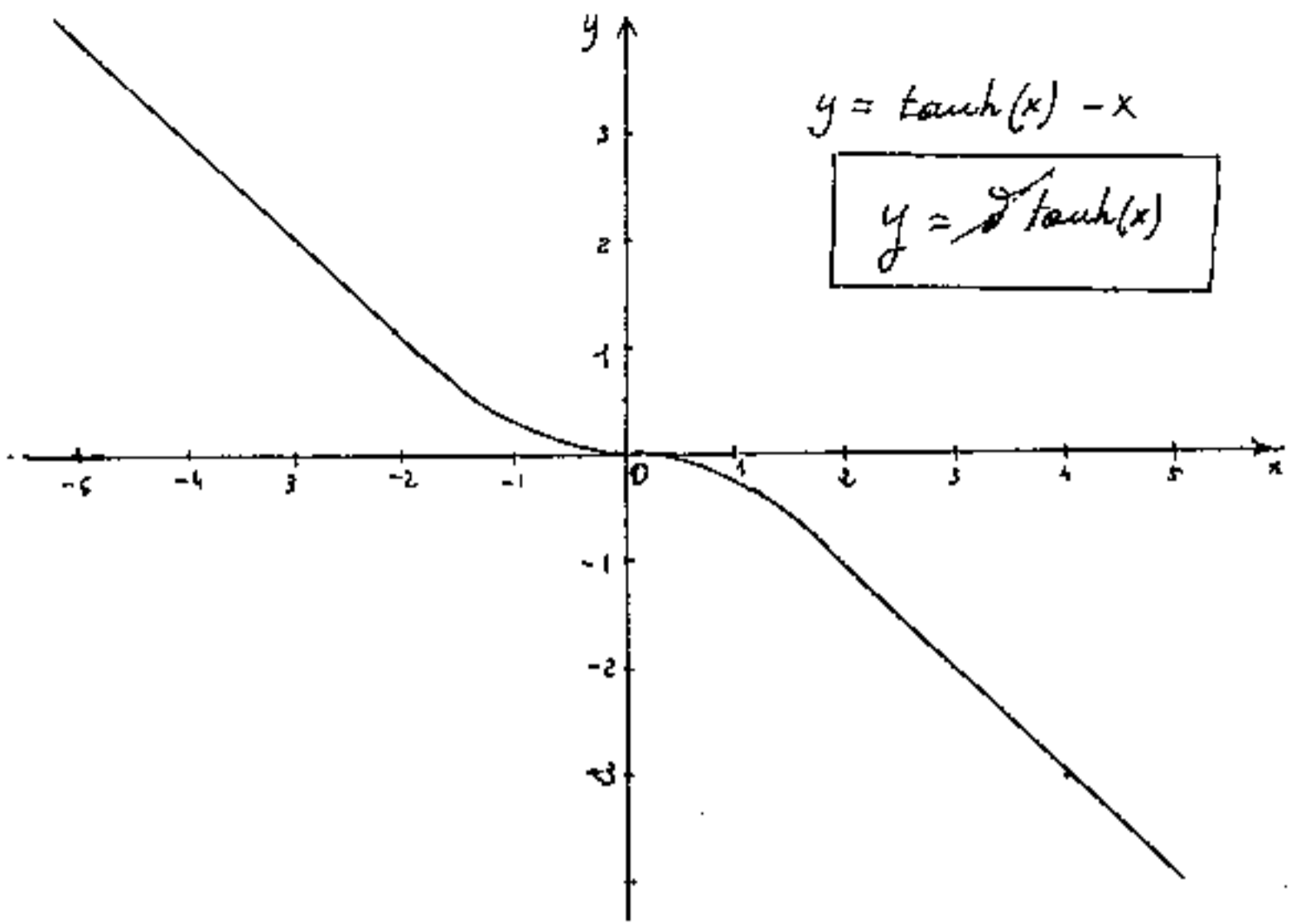


$$y = \operatorname{cosh}(x) - (x)$$

$$y = \operatorname{cosh}(x)$$

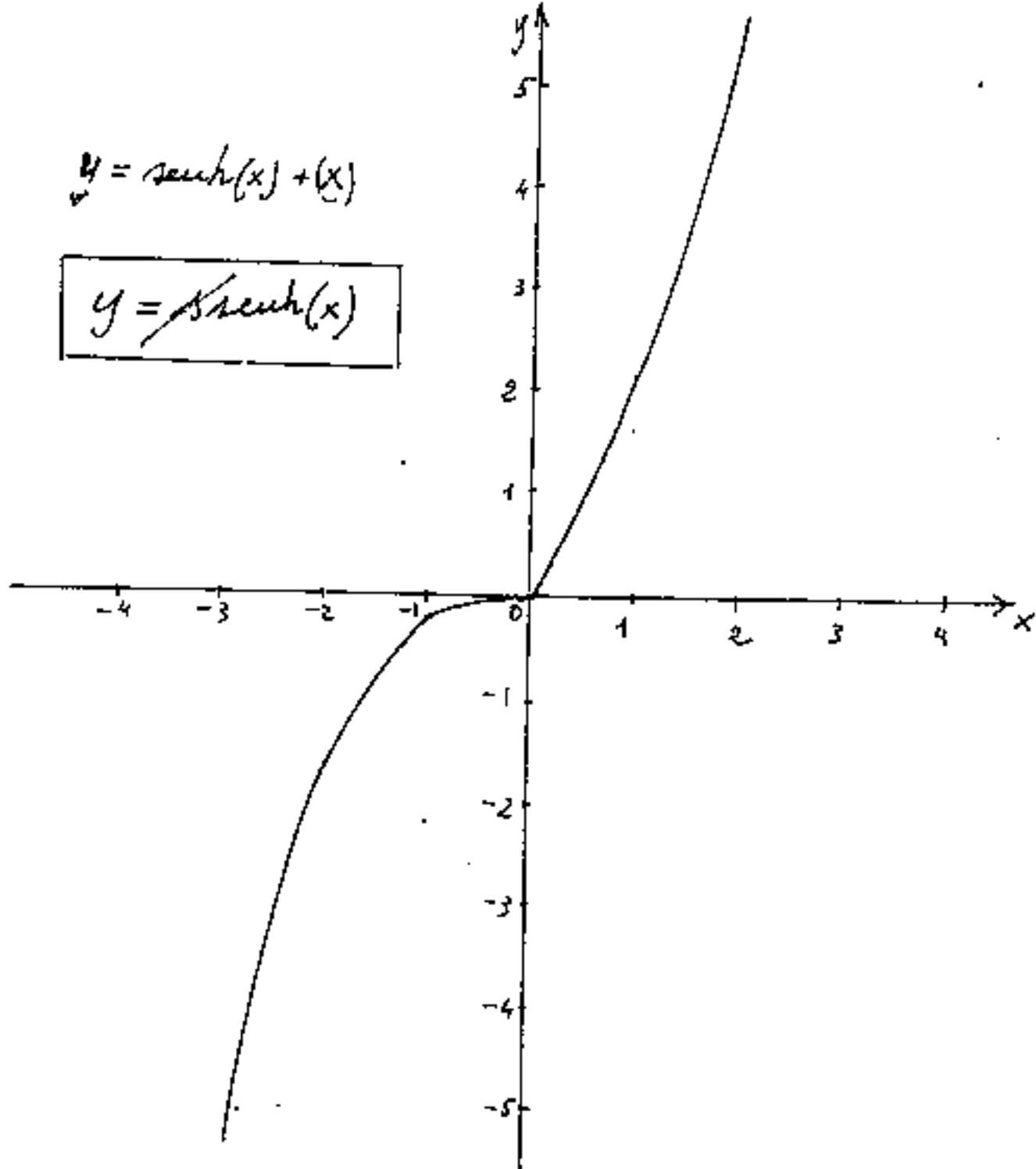


ammette un minimo
per: $\operatorname{sech}(x) = 1$
 $\operatorname{argsech}(1) = 0,881373587$



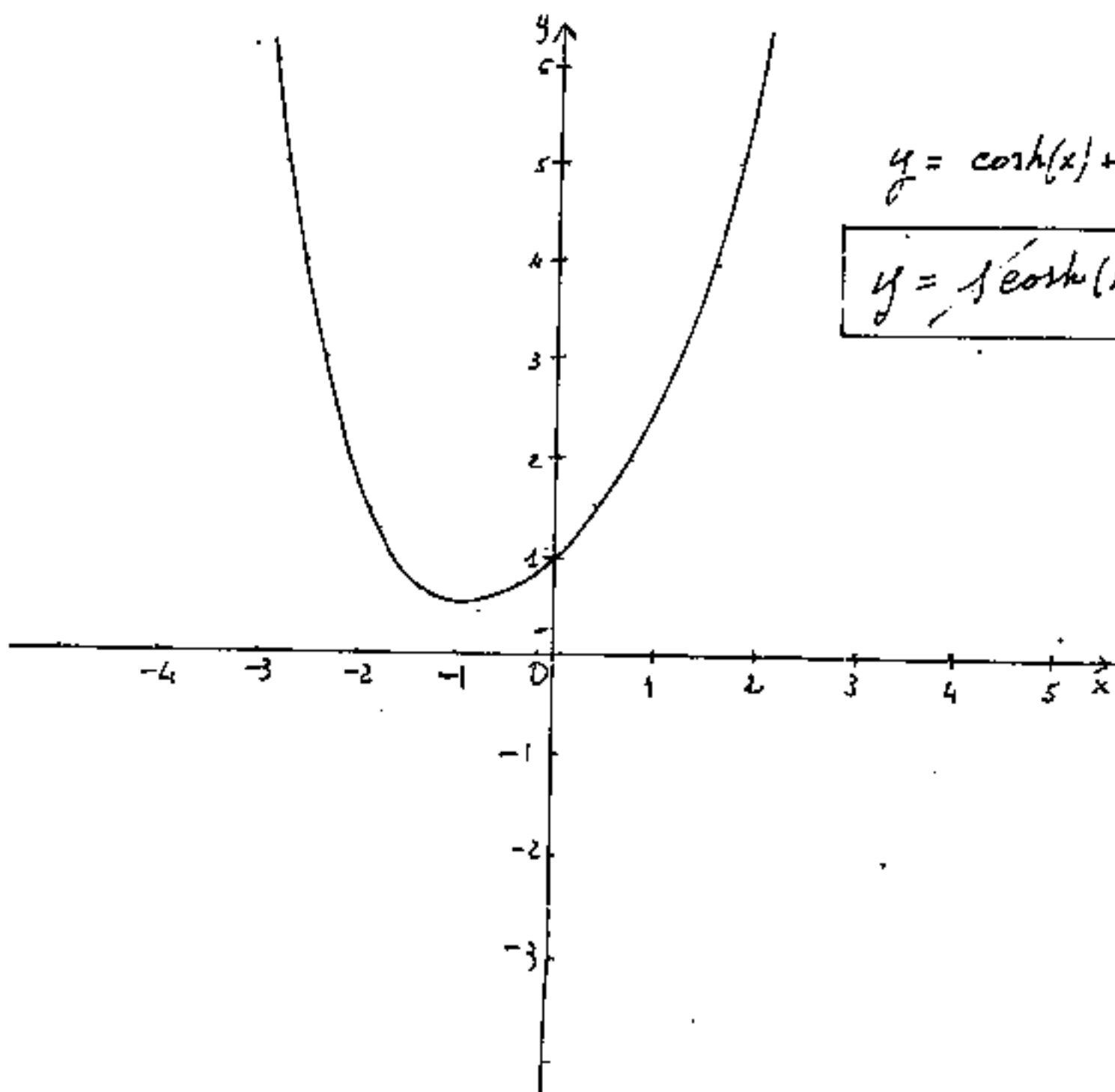
$$y = \operatorname{sech}(x) + (x)$$

$$y = \int \operatorname{sech}(x)$$



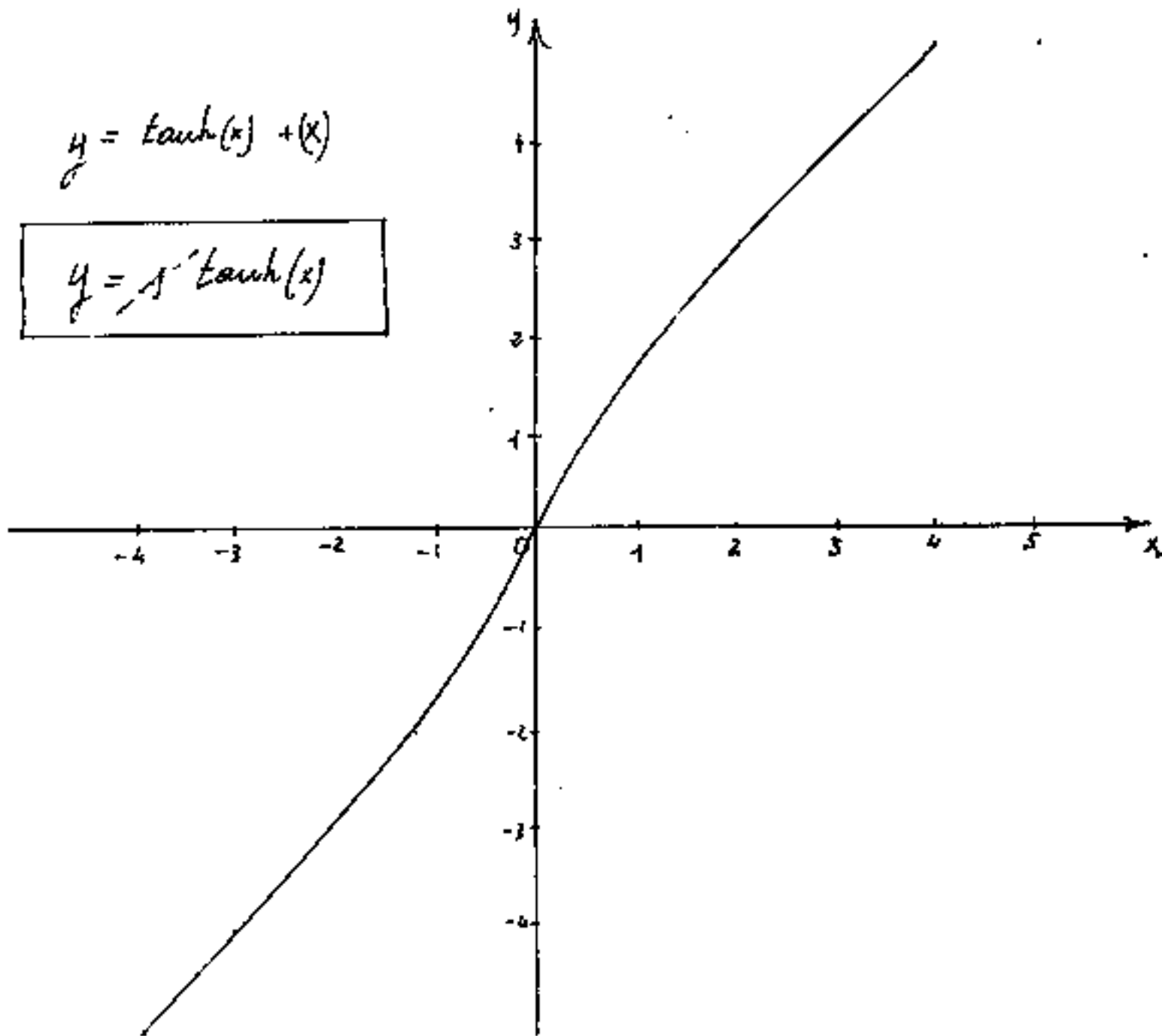
$$y = \operatorname{cosh}(x) + (x)$$

$$y = \int \operatorname{cosh}(x)$$



$$y = \tanh(x) + (x)$$

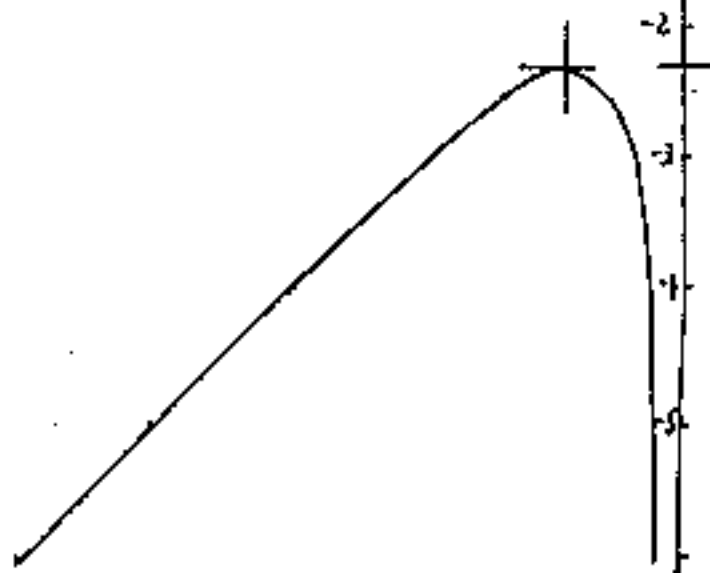
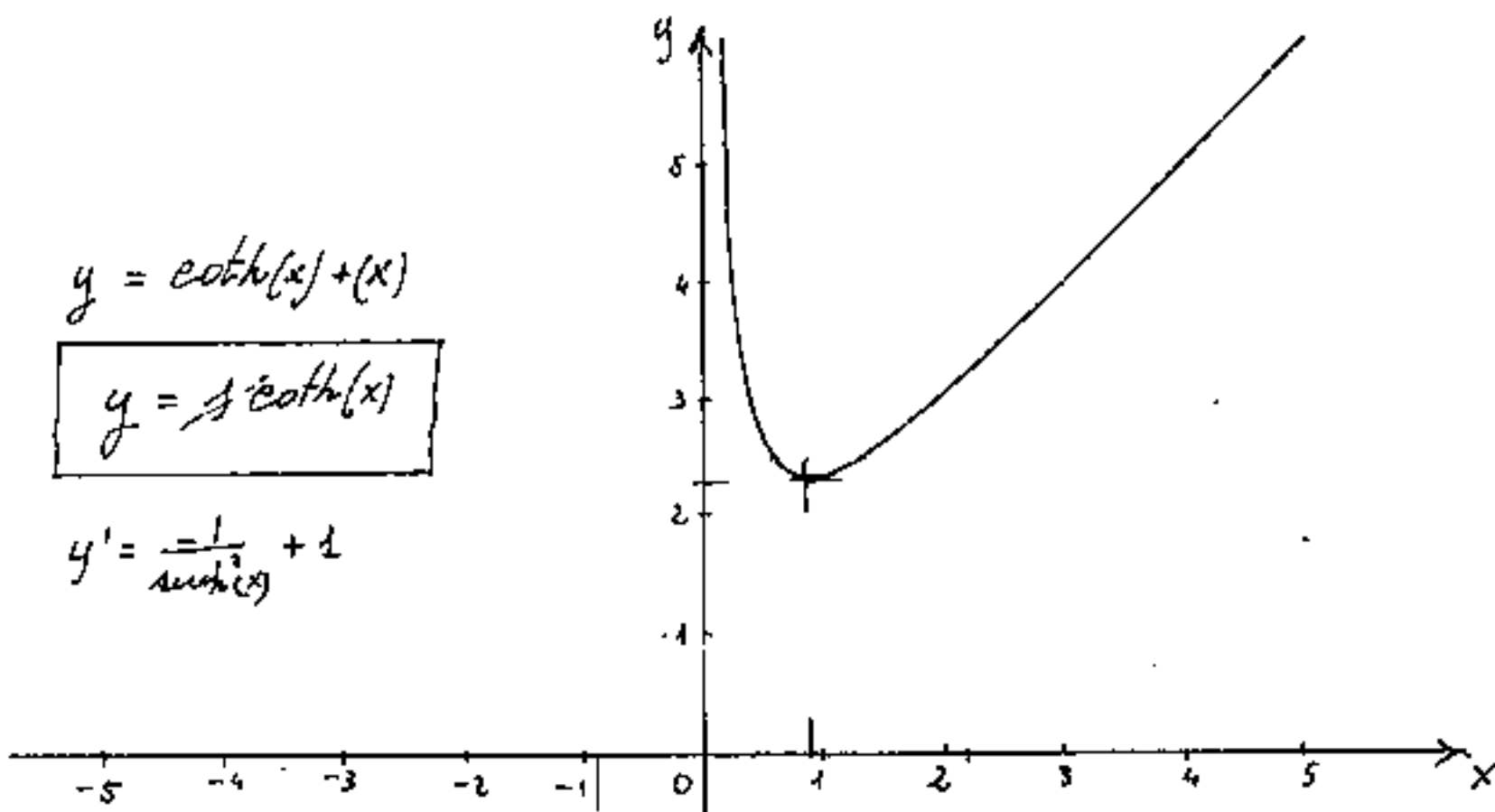
$$y = \int \tanh(x)$$



$$y = \coth(x) + (x)$$

$$y = \int \coth(x)$$

$$y' = \frac{-1}{\sinh^2(x)} + 1$$



$$y' = 0 \quad \text{for } \sinh(x) = \pm 1$$

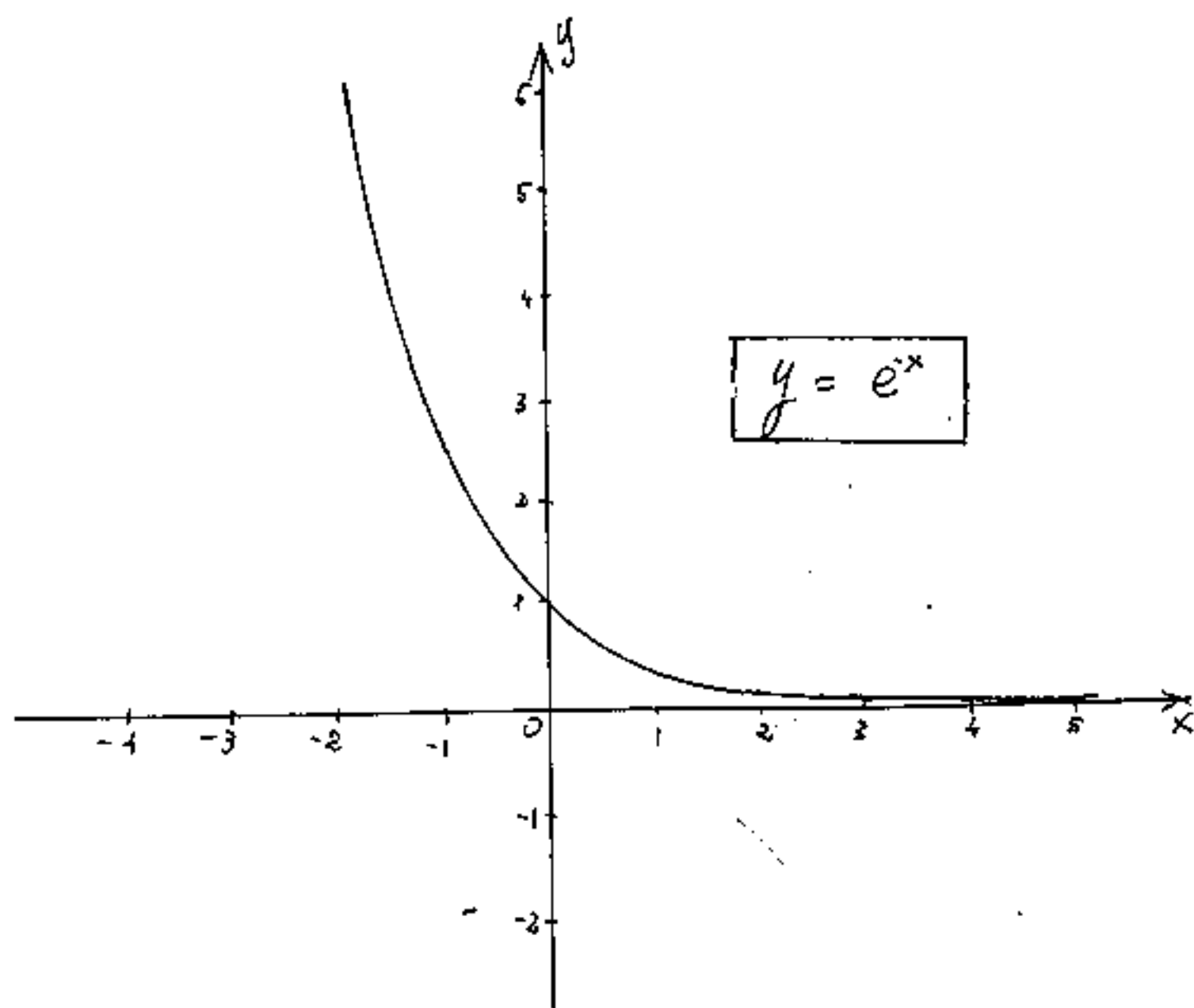
$$\text{for } x = \pm 0,8813735869$$

$$y = 2,295587149$$

Operatori esponenziali

Questi operatori sono la base anche degli operatori iperbolici. Per ragioni di spazio e pratiche abbiamo diviso gli operatori su: $e^{(+x)}$; $e^{(-x)}$; $\ln(x)$. che in effetti dovrebbero stare sulla stessa riga per ogni arg. —

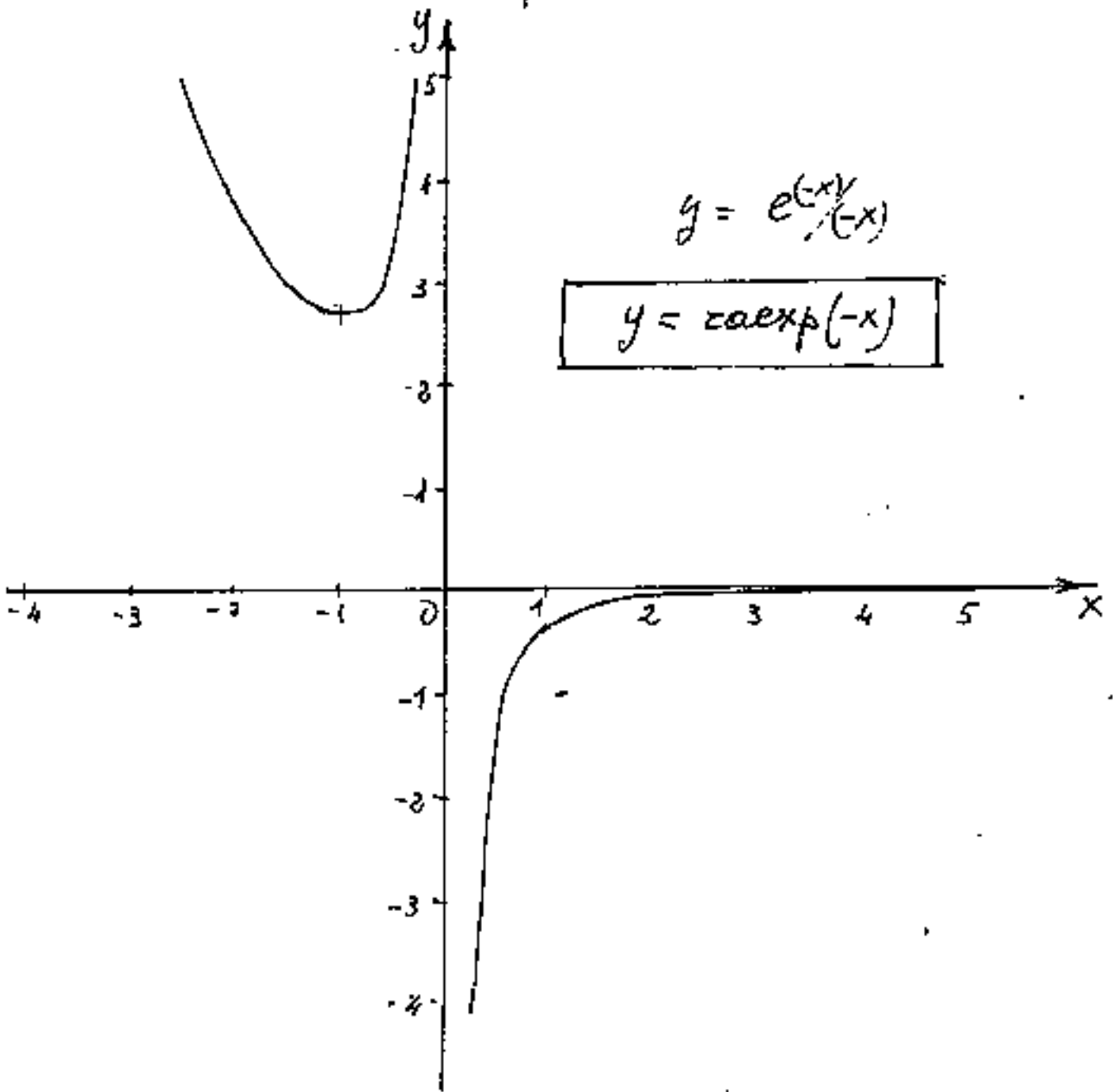
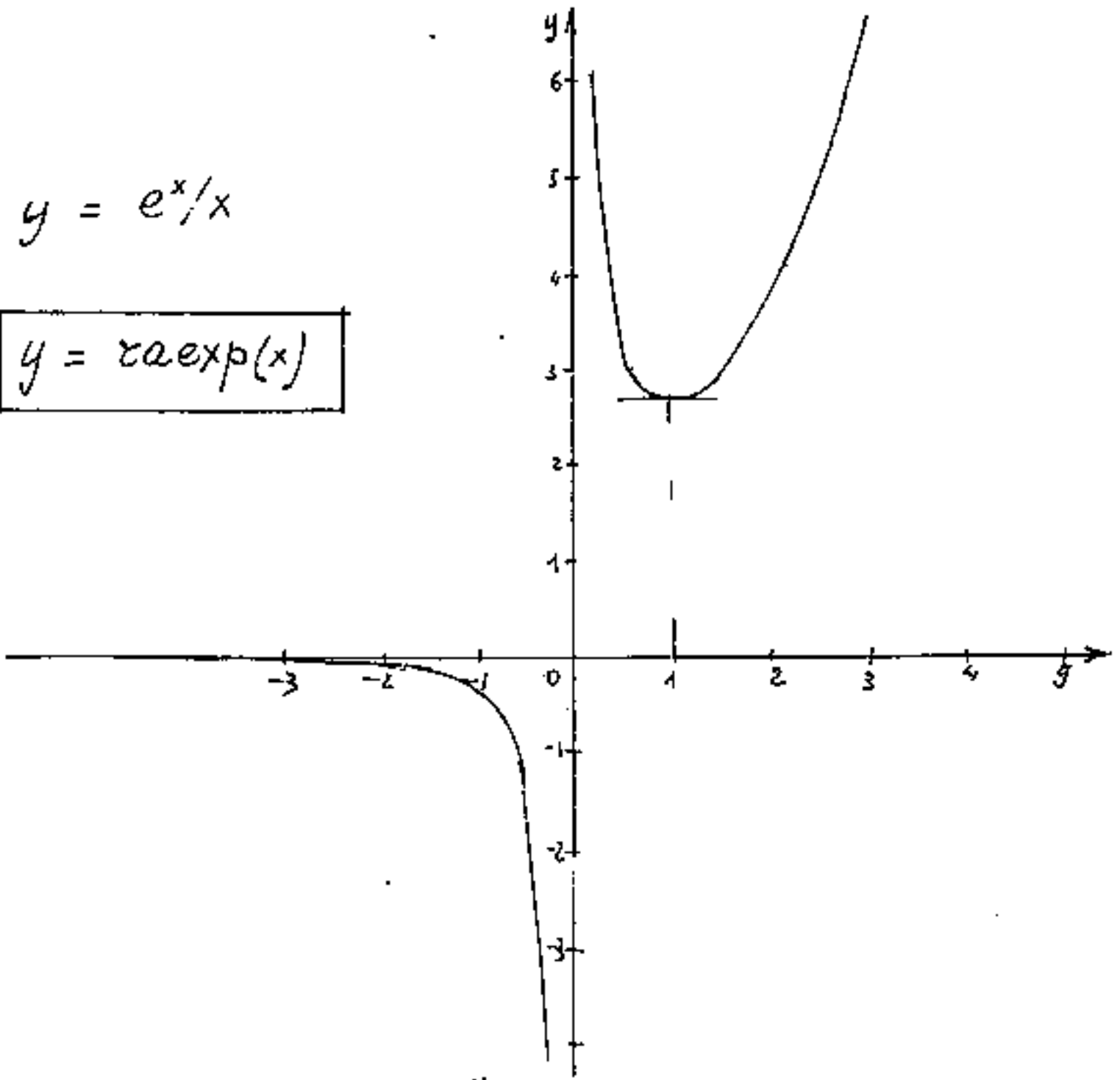
Abbiamo già esposto la linea $y = e^x$ e $y = \ln(x)$, vediamo ora: $y = e^{-x}$



Che è la stessa linea di e^x ruotata intorno y .

$$y = e^x/x$$

$$y = \gamma \alpha \exp(x)$$



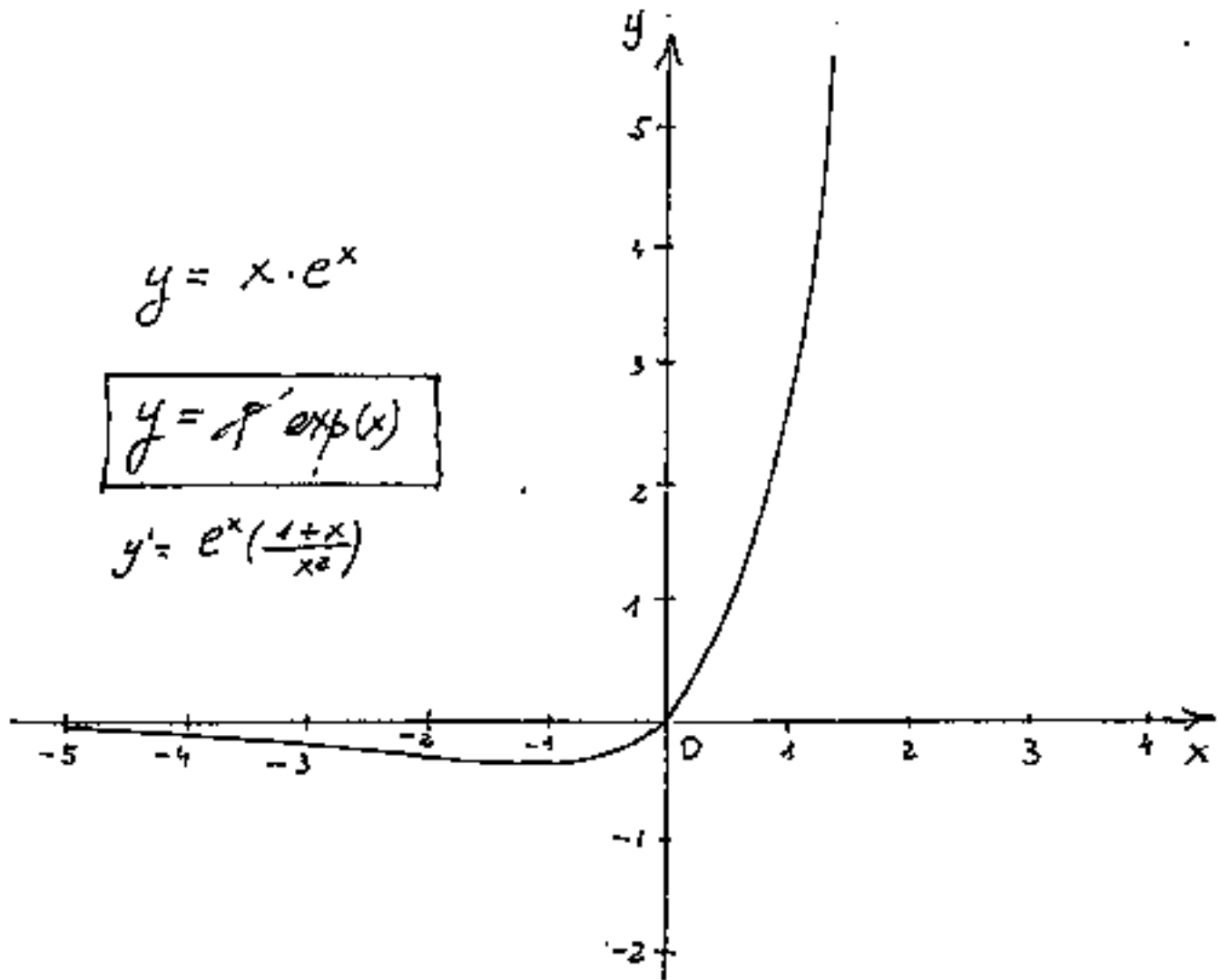
$$y = e^{(-x)}/(-x)$$

$$y = \gamma \alpha \exp(-x)$$

$$y = x \cdot e^x$$

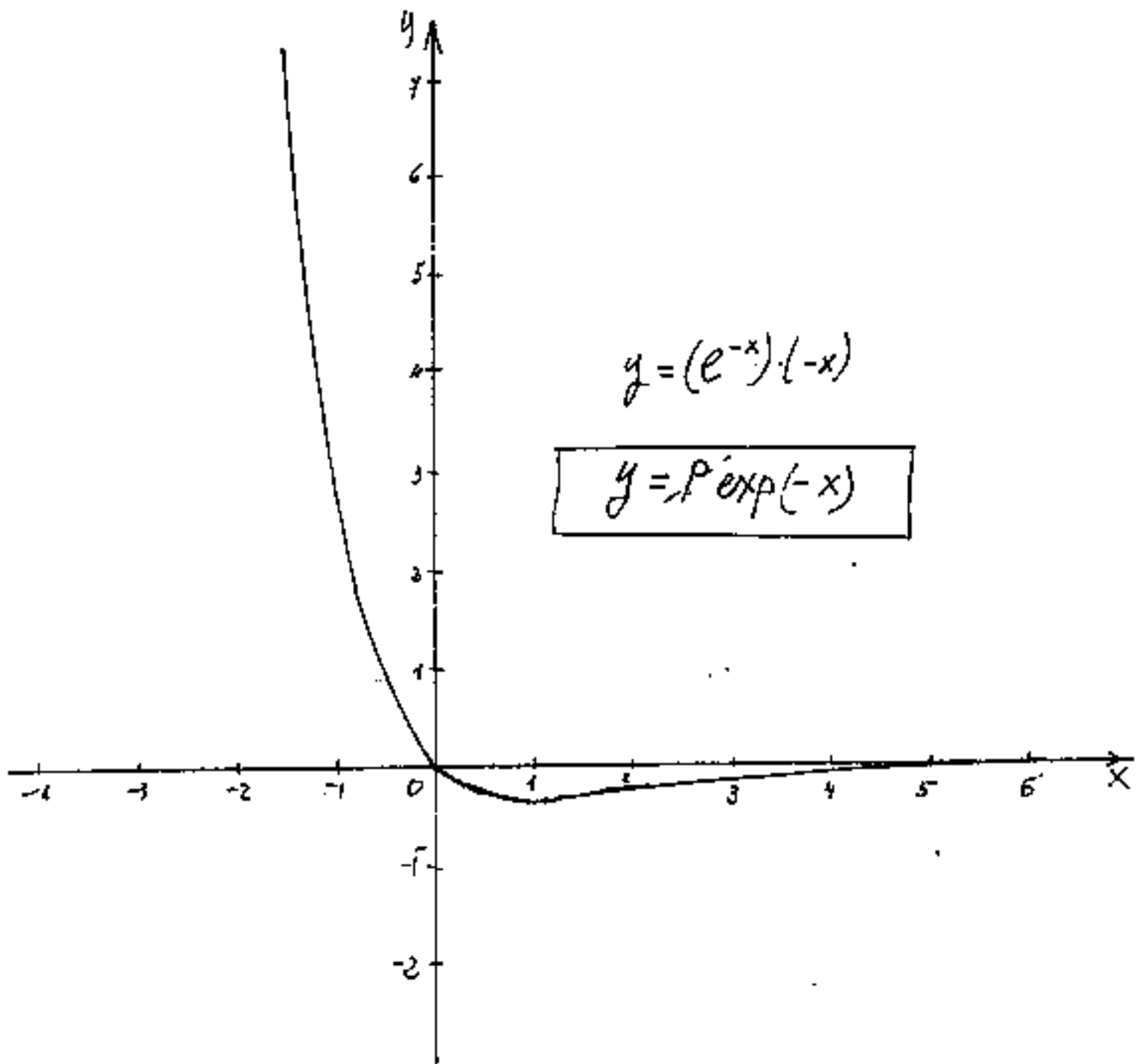
$$y = f' \exp(x)$$

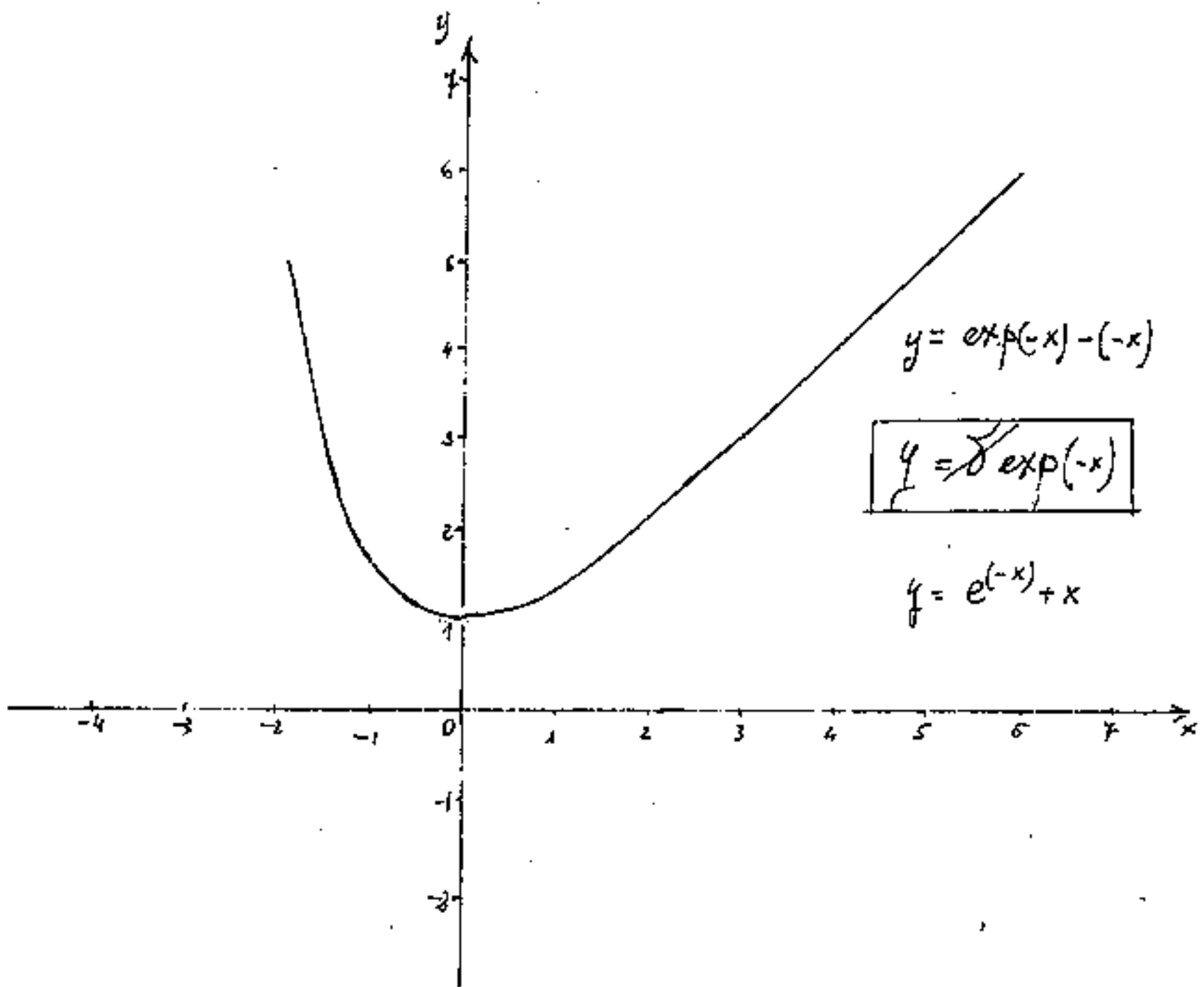
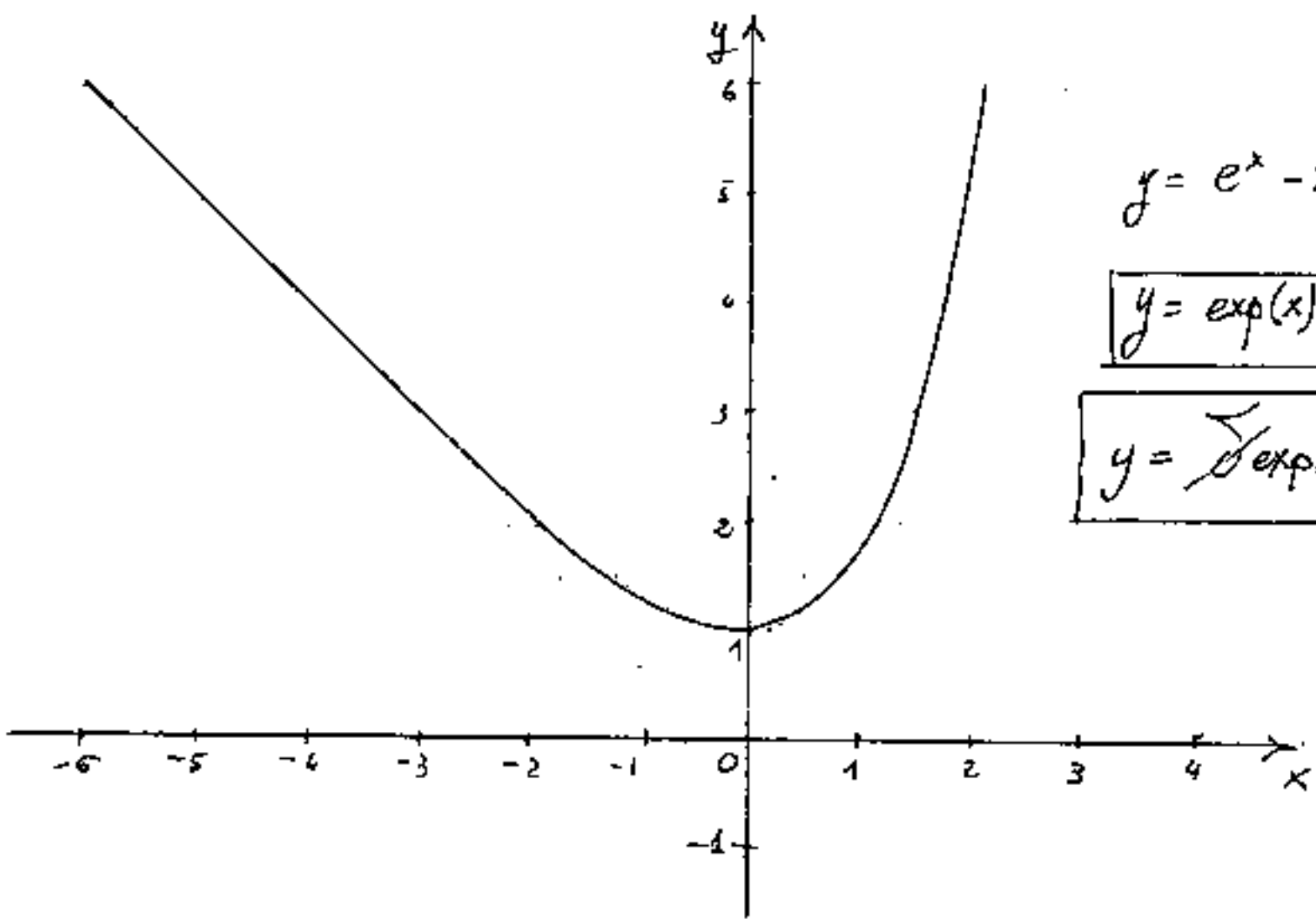
$$y' = e^x \left(\frac{1+x}{x^2} \right)$$



$$y = (e^{-x}) \cdot (-x)$$

$$y = f' \exp(-x)$$

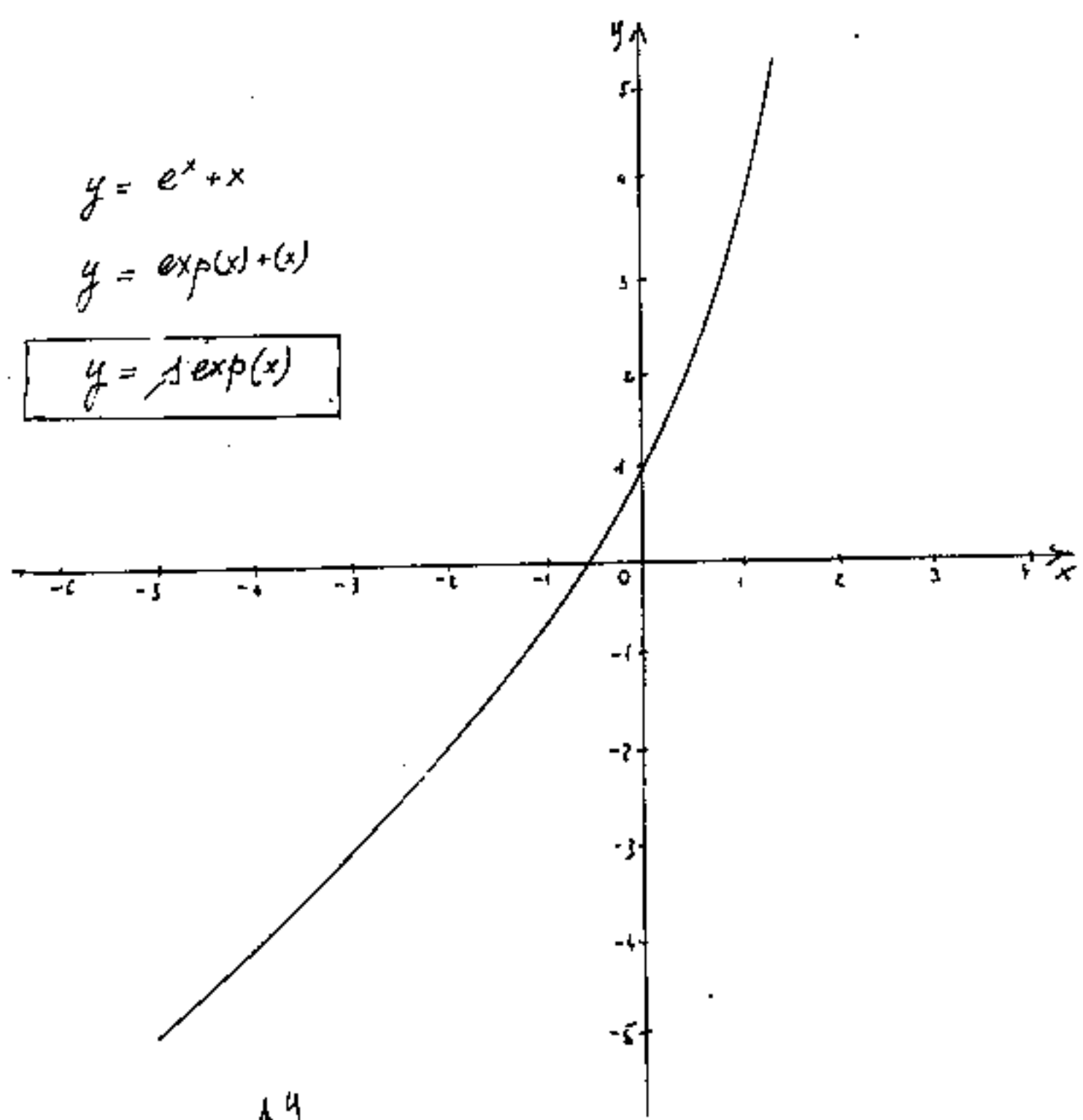




$$y = e^x + x$$

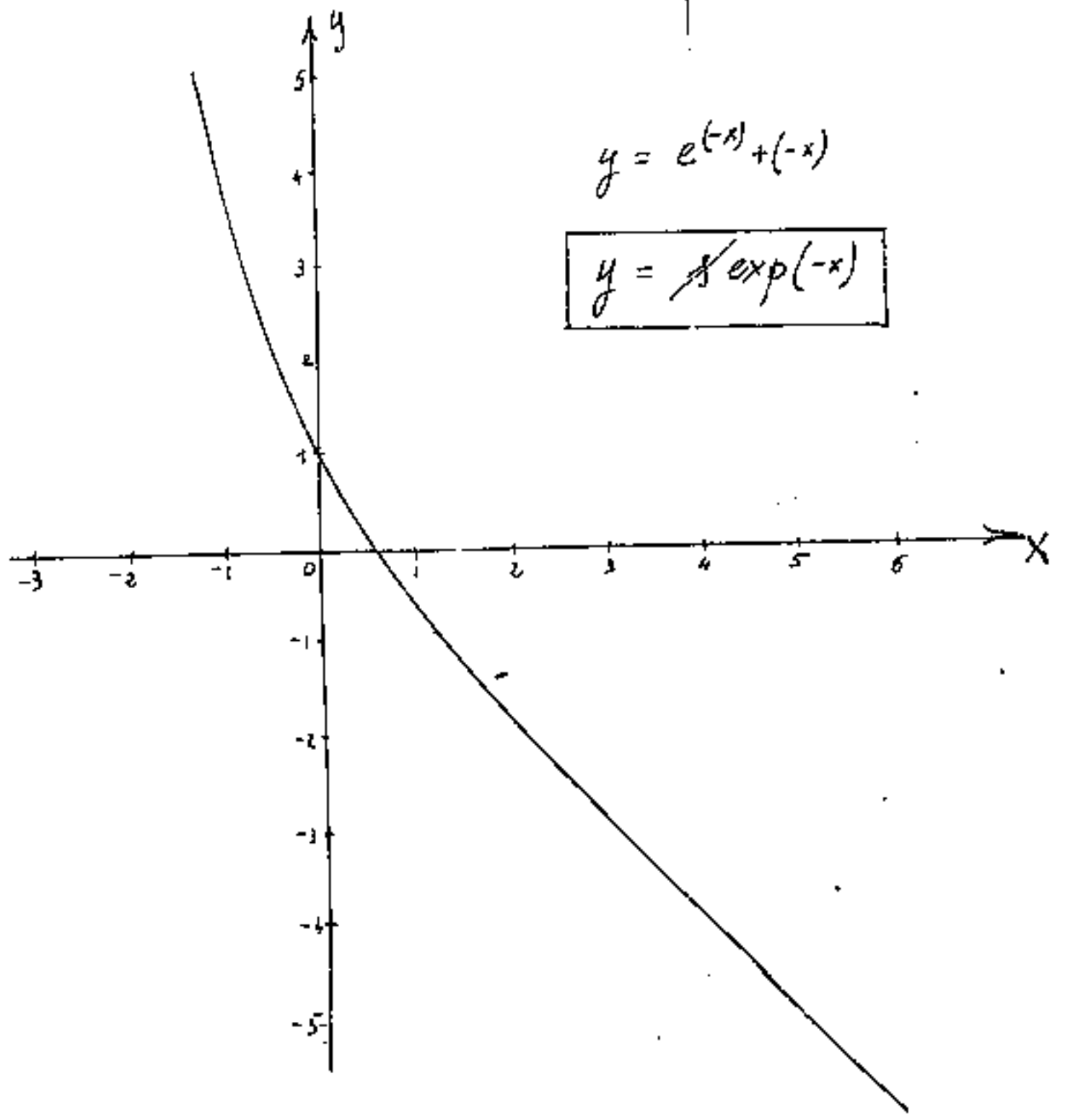
$$y = \exp(x) + (x)$$

$$y = \cancel{\int} \exp(x)$$

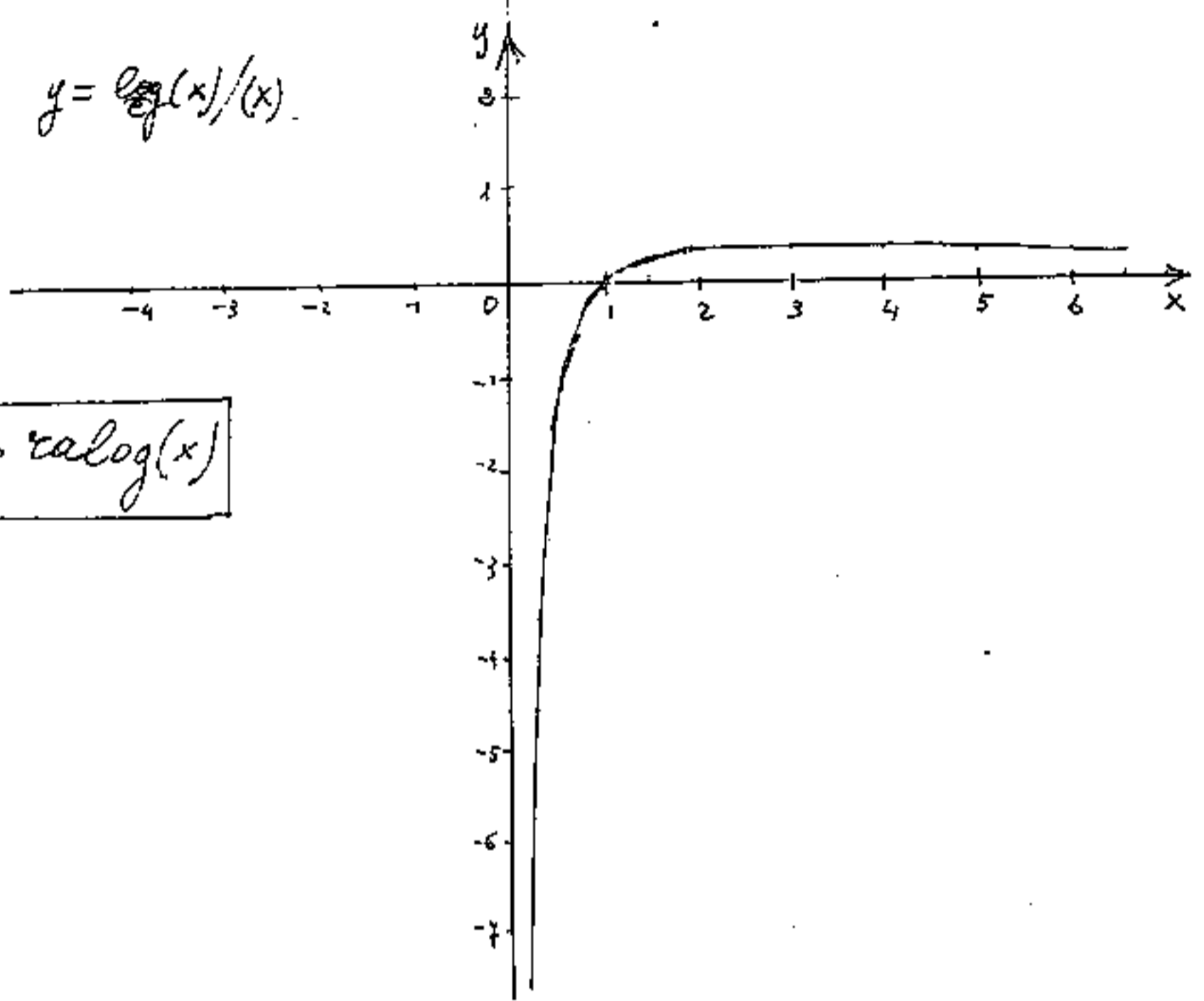


$$y = e^{-x} + (-x)$$

$$y = \cancel{\int} \exp(-x)$$



$$y = \log(x)/x$$



$$y = x \log(x)$$

$$y = (x) \cdot \log(x)$$

$$y = x^p \log(x)$$

